Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 11

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 11.1. Sei $R \subseteq S$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die zugehörige Erweiterung $R_F \subseteq S_F$ ganz ist.

Aufgabe 11.2.*

Seien R und S Integritätsbereiche und sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Es sei $f \in R$ ein Element, das in S eine Einheit ist. Zeige, dass f dann schon in R eine Einheit ist.

Aufgabe 11.3. Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra. Zeige, dass wenn R ein Körper ist, die Begriffe algebraisch und ganz für ein Element $x \in A$ übereinstimmen. Zeige ferner, dass für einen Integritätsbereich, der kein Körper ist, diese beiden Begriffe auseinanderfallen.

Aufgabe 11.4. Man gebe ein Beispiel einer ganzen Ringerweiterung $R \subseteq S$, wo es einen Nichtnullteiler $f \in R$ gibt, der ein Nullteiler in S wird.

Aufgabe 11.5. Sei K ein Körper und sei $R_i \subseteq K$, $i \in I$, eine Familie von normalen Unterringen. Zeige, dass auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} R_i$ normal ist.

Aufgabe 11.6. Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass R genau dann normal ist, wenn er mit seiner Normalisierung übereinstimmt.

Aufgabe 11.7. Sei R ein Integritätsbereich. Sei angenommen, dass die Normalisierung von R gleich dem Quotientenkörper $Q(R)$ ist. Zeige, dass dann R selbst schon ein Körper ist.

Aufgabe 11.8.*

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $f \in R$, $f \neq 0$. Zeige, dass die Nenneraufnahme R_f ebenfalls normal ist.

AUFGABE 11.9. Sei R ein normaler Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die Nenneraufnahme R_S normal ist.

AUFGABE 11.10. Sei R ein faktorieller Bereich. Zeige, dass jedes von null verschiedene Primideal ein Primelement enthält.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 11.11. (3 Punkte)

Seien R, S, T kommutative Ringe und seien $\varphi : R \to S$ und $\psi : S \to T$ Ringhomomorphismen derart, dass S ganz über R und T ganz über S ist. Zeige, dass dann auch T ganz über R ist.

AUFGABE 11.12. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F \in K[X, Y]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass der Restklassenring

$$K[X, Y]/(F)$$

eine endliche $K[T]$-Algebra ist.

AUFGABE 11.13. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und A eine endliche K-Algebra. Zeige: Dann ist A artinsch.

AUFGABE 11.14. (3 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Sei $f \in R$. Zeige, dass für das von f erzeugte Hauptideal gilt:

$$R \cap (f)S = (f)R \,.$$

AUFGABE 11.15. (6 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich. Zeige, dass dann auch der Polynomring $R[X]$ normal ist.

AUFGABE 11.16. (5 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $a \in R$. Es sei vorausgesetzt, dass a keine Quadratwurzel in R besitzt. Zeige, dass das Polynom $X^2 - a$ prim in $R[X]$ ist. Tipp: Verwende den Quotientenkörper $Q(R)$. Warnung: Prim muss hier nicht zu irreduzibel äquivalent sein.

Aufgabe 11.17. (4 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) R ist normal
(2) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ normal.
(3) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$ normal.

(Man sagt daher, dass normal eine *lokale Eigenschaft* ist.)

Aufgabe 11.18. (4 Punkte)

Seien $M \subseteq N$ endlich erzeugte kommutative Monoide. Zeige, dass für einen Körper K der Ringhomomorphismus $K[M] \subseteq K[N]$ genau dann endlich ist, wenn es zu jedem $n \in N$ ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit $kn \in M$ gibt.