

Grundkurs Mathematik II

**Prof. Dr. Holger Brenner
Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik**

Sommersemester 2019

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	9
31. Vorlesung - Lineare Gleichungssysteme	10
31.1. Lineare Gleichungen	10
31.2. Lineare Gleichungssysteme	12
31.3. Lösungsverfahren für zwei Gleichungen in zwei Variablen	16
31. Arbeitsblatt	17
31.1. Die Pausenaufgabe	17
31.2. Übungsaufgaben	18
31.3. Aufgaben zum Abgeben	21
32. Vorlesung - Eliminationsverfahren	22
32.1. Das Lösen von linearen Gleichungssystemen	22
32.2. Lineare Gleichungssysteme in Dreiecksgestalt	29
32. Arbeitsblatt	30
32.1. Die Pausenaufgabe	30
32.2. Übungsaufgaben	30
32.3. Aufgaben zum Abgeben	34
33. Vorlesung - Zahlenräume	35
33.1. Die Zahlenräume	35
33.2. Der Matrizenkalkül	40
33. Arbeitsblatt	43
33.1. Die Pausenaufgabe	43
33.2. Übungsaufgaben	44
33.3. Aufgaben zum Abgeben	48
34. Vorlesung - Gerade, Ebene, Raum	49
34.1. Untervektorräume	49
34.2. Geraden in der Ebene	51
34.3. Geraden und Ebenen im Raum	53
34. Arbeitsblatt	56
34.1. Die Pausenaufgabe	56
34.2. Übungsaufgaben	56
34.3. Aufgaben zum Abgeben	62

35. Vorlesung - Lineare Abbildungen	63
35.1. Lineare Abbildungen	64
35.2. Lineare Abbildungen und Matrizen	67
35. Arbeitsblatt	70
35.1. Die Pausenaufgabe	70
35.2. Übungsaufgaben	71
35.3. Aufgaben zum Abgeben	77
36. Vorlesung - Invertierbarkeit	78
36.1. Invertierbare Matrizen	79
36.2. Elementarmatrizen	80
36.3. Auffinden der inversen Matrix	84
36. Arbeitsblatt	86
36.1. Die Pausenaufgabe	86
36.2. Übungsaufgaben	86
36.3. Aufgaben zum Abgeben	89
37. Vorlesung - Relationen	90
37.1. Relationen	90
37.2. Relationen und Abbildungen	94
37.3. Relationen auf einer Menge	95
37.4. Ordnungsrelationen	97
37. Arbeitsblatt	98
37.1. Die Pausenaufgabe	98
37.2. Übungsaufgaben	98
37.3. Aufgaben zum Abgeben	105
38. Vorlesung - Äquivalenzrelationen	107
38.1. Äquivalenzrelationen	107
38. Arbeitsblatt	113
38.1. Die Pausenaufgabe	113
38.2. Übungsaufgaben	113
38.3. Aufgaben zum Abgeben	117
39. Vorlesung - Quotientenmengen	119
39.1. Äquivalenzklassen und Repräsentantensysteme	119
39.2. Quotientenmenge und kanonische Abbildung	122

39. Arbeitsblatt	126
39.1. Die Pausenaufgabe	126
39.2. Übungsaufgaben	126
39.3. Aufgaben zum Abgeben	133
40. Vorlesung - Zahlbereichserweiterungen	135
40.1. Die Konstruktion der ganzen Zahlen	135
40.2. Die Konstruktion der rationalen Zahlen	141
40. Arbeitsblatt	144
40.1. Die Pausenaufgabe	144
40.2. Übungsaufgaben	144
40.3. Aufgaben zum Abgeben	147
41. Vorlesung - Restklassenbildung	149
41.1. Restklassengruppen	150
41.2. Restklassenringe	152
41.3. Die Restklassenringe von $\mathbb{Z}$	153
41. Arbeitsblatt	154
41.1. Die Pausenaufgabe	154
41.2. Übungsaufgaben	155
41.3. Aufgaben zum Abgeben	161
42. Vorlesung - Lücken auf dem Zahlenstrahl	162
42.1. Lücken auf der Zahlengeraden	162
42.2. Lücken schließen	171
42. Arbeitsblatt	171
42.1. Die Pausenaufgabe	171
42.2. Übungsaufgaben	171
42.3. Aufgaben zum Abgeben	176
43. Vorlesung - Quadratwurzeln	177
43.1. Quadratwurzeln	177
43.2. Das Heron-Verfahren	180
43.3. Folgen	184
43. Arbeitsblatt	185
43.1. Die Pausenaufgabe	185
43.2. Übungsaufgaben	185

43.3. Aufgaben zum Abgeben	189
44. Vorlesung - Konvergente Folgen	189
44.1. Beispiele für Folgen	189
44.2. Rechenregeln für Folgen	192
44. Arbeitsblatt	197
44.1. Die Pausenaufgabe	197
44.2. Übungsaufgaben	197
44.3. Aufgaben zum Abgeben	202
45. Vorlesung - Cauchy-Folgen	203
45.1. Cauchy-Folgen	203
45.2. Das Vollständigkeitsaxiom	210
45. Arbeitsblatt	210
45.1. Die Pausenaufgabe	210
45.2. Übungsaufgaben	210
45.3. Aufgaben zum Abgeben	213
46. Vorlesung - Konstruktion der reellen Zahlen	214
46.1. Die Konstruktion der reellen Zahlen	214
46. Arbeitsblatt	219
46.1. Die Pausenaufgabe	219
46.2. Übungsaufgaben	219
46.3. Aufgaben zum Abgeben	224
47. Vorlesung - Dezimalentwicklung	225
47.1. Der Isomorphiesatz	225
47.2. Monotone Folgen	226
47.3. Zifferndarstellung reeller Zahlen	226
47.4. Die geometrische Reihe	229
47.5. Rationale Zahlen und periodische Ziffernentwicklung	230
47. Arbeitsblatt	231
47.1. Die Pausenaufgabe	231
47.2. Übungsaufgaben	232
47.3. Aufgaben zum Abgeben	240
48. Vorlesung - Intervallschachtelungen	241
48.1. Intervallschachtelungen	241

48.2. Dedekindsche Schnitte	242
48.3. Existenz der Wurzeln	244
48.4. Die eulersche Zahl e	246
48. Arbeitsblatt	248
48.1. Die Pausenaufgabe	248
48.2. Übungsaufgaben	248
48.3. Aufgaben zum Abgeben	252
49. Vorlesung - Polynome	253
49.1. Der Polynomring über einem Körper	253
49.2. Quadratische Polynome	256
49. Arbeitsblatt	261
49.1. Die Pausenaufgabe	261
49.2. Übungsaufgaben	261
49.3. Aufgaben zum Abgeben	266
50. Vorlesung - Polynomdivision	267
50.1. Polynomfunktionen	267
50.2. Die Division mit Rest für Polynome	269
50.3. Nullstellen	271
50.4. Der Interpolationssatz	272
50.5. Rationale Funktionen	273
50. Arbeitsblatt	274
50.1. Die Pausenaufgabe	274
50.2. Übungsaufgaben	274
50.3. Aufgaben zum Abgeben	280
51. Vorlesung - Stetigkeit	281
51.1. Stetige Funktionen	281
51.2. Rechenregeln für stetige Funktionen	285
51. Arbeitsblatt	287
51.1. Die Pausenaufgabe	287
51.2. Übungsaufgaben	287
51.3. Aufgaben zum Abgeben	291
52. Vorlesung - Zwischenwertsatz	292
52.1. Der Zwischenwertsatz	292

52.2. Stetige bijektive Funktionen und ihre Umkehrfunktion	296
52.3. Stetigkeit der Wurzeln	297
52. Arbeitsblatt	298
52.1. Die Pausenaufgabe	298
52.2. Übungsaufgaben	298
52.3. Aufgaben zum Abgeben	302
53. Vorlesung - Exponentialfunktionen	303
53.1. Die rationalen Exponentialfunktionen	303
53.2. Die reellen Exponentialfunktionen	306
53.3. Logarithmen	310
53. Arbeitsblatt	311
53.1. Die Pausenaufgabe	311
53.2. Übungsaufgaben	312
53.3. Aufgaben zum Abgeben	316
54. Vorlesung - Trigonometrische Funktionen	317
54.1. Der Einheitskreis	317
54.2. Winkel und trigonometrisches Dreieck	319
54.3. Die trigonometrischen Funktionen	321
54.4. Drehungen, Additionstheoreme und Stetigkeit	323
54. Arbeitsblatt	325
54.1. Die Pausenaufgabe	325
54.2. Übungsaufgaben	325
54.3. Aufgaben zum Abgeben	333
55. Vorlesung - Endliche Wahrscheinlichkeitsräume	334
55.1. Endliche Wahrscheinlichkeitsräume	334
55.2. Laplace-Räume	337
55. Arbeitsblatt	340
55.1. Die Pausenaufgabe	340
55.2. Übungsaufgaben	340
55.3. Aufgaben zum Abgeben	343
56. Vorlesung - Produkträume	344
56.1. Produkte von endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen	344
56.2. Die Binomialverteilung	347

56.3. Das Gesetz der großen Zahlen	349
56. Arbeitsblatt	352
56.1. Die Pausenaufgabe	352
56.2. Übungsaufgaben	352
56.3. Aufgaben zum Abgeben	357
57. Vorlesung - Unabhängigkeit	358
57.1. Unabhängige Ereignisse	358
57. Arbeitsblatt	363
57.1. Die Pausenaufgabe	363
57.2. Übungsaufgaben	363
57.3. Aufgaben zum Abgeben	366
58. Vorlesung - Bedingte Wahrscheinlichkeit	367
58.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit	367
58. Arbeitsblatt	374
58.1. Die Pausenaufgabe	374
58.2. Übungsaufgaben	374
58.3. Aufgaben zum Abgeben	377
Anhang A: Bildlizenzen	379
Abbildungsverzeichnis	379

VORWORT

Dieses Skript gibt die Vorlesung Grundkurs Mathematik II wieder, die ich im Sommersemester 2019 an der Universität Osnabrück im Studiengang Mathematik (Bildung Erziehung Unterricht) gehalten habe.

Der Text wurde auf Wikiversity geschrieben und steht unter der Creative-Commons-Attribution-ShareAlike 4.0. Die Bilder wurden von Commons übernommen und unterliegen den dortigen freien Lizenzen. In einem Anhang werden die einzelnen Bilder mit ihren Autoren und Lizenzen aufgeführt. Die CC-BY-SA 4.0 Lizenz ermöglicht es, dass das Skript in seinen Einzelteilen verwendet, verändert und weiterentwickelt werden darf. Ich bedanke mich bei der Wikimedia-Gemeinschaft und insbesondere bei Benutzer Exxu für die wichtigen Beiträge im Projekt semantische Vorlagen, die eine weitgehend automatische Erstellung des Latexcodes ermöglichen.

Bei Ilia Pirashvili bedanke ich mich für die Durchführung des Übungsbetriebs und die Korrekturen, bei den Tutoren Daniel Geist, Pia Hofbauer, Mara Jeddelloh, Annika Weichert für ihre Mitarbeit. Bei Frau Marianne Gausmann bedanke ich mich für die Erstellung der Pdf-Files und bei den Studierenden für einzelne Korrekturen und viele Anregungen.

Holger Brenner

31. VORLESUNG - LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

In den folgenden Vorlesungen werden wir uns mit *linearer Algebra* beschäftigen. Sie ist uns bereits in der 22. Vorlesung des ersten Semesters im Rahmen der Proportionalität und der linearen Funktionen begegnet. In der linearen Algebra wird stets ein Körper K zugrunde gelegt, wobei man dabei grundsätzlich an die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ denken kann.

31.1. Lineare Gleichungen.

Die „Mutter aller linearen Gleichungssysteme“ ist eine einzige lineare Gleichung in einer Variablen der Form

$$ax = b$$

mit gegebenen Elementen a, b aus einem Körper K und gesuchtem x . Schon hier zeigen sich drei Möglichkeiten, wie die Lösung aussehen kann. Bei $a \neq 0$ kann man die Gleichung mit dem Inversen von a in K , also mit a^{-1} , multiplizieren und erhält als eindeutige Lösung

$$x = ba^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Rechnerisch kann man also die Lösung erhalten, wenn man inverse Elemente bestimmen und mit ihnen multiplizieren kann. Bei $a = 0$ hängt das Lösungsverhalten von b ab. Bei $b = 0$ ist jedes $x \in K$ eine Lösung, bei $b \neq 0$ gibt es keine Lösung.

Wir untersuchen nun die entsprechende Situation, wenn es mehr als eine Variable gibt.

Definition 31.1. Es sei K ein Körper und $a_1, \dots, a_n \in K$. Dann nennt man

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

eine (homogene) *lineare Gleichung* in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ zu den Koeffizienten a_j , $j = 1, \dots, n$. Ein Tupel¹ $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$ heißt *Lösung der linearen Gleichung*, wenn $\sum_{j=1}^n a_j \xi_j = 0$ ist.

Wenn $c \in K$ ein weiteres Element ist, so heißt

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$$

eine *inhomogene lineare Gleichung* und ein Tupel $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in K^n$ heißt *Lösung der inhomogenen linearen Gleichung*, wenn $\sum_{j=1}^n a_j \zeta_j = c$ ist.

Im Sinne von 17. Vorlesung des ersten Semesters handelt es sich um eine Bedingungsgleichung. Insbesondere soll nach den Tupeln gesucht werden,

¹Der K^n ist der n -fache Produktraum von K mit sich selbst. Lösungstupel werden wir häufig einfach auch mit $(x_1, \dots, x_n)$ bezeichnen.

die die Gleichung erfüllen.² Statt von Koeffizienten spricht man auch von Parametern der Gleichung. Da die Lösungen im Produktraum K^n liegen, sollte man sich von Anfang an um eine geometrische Deutung der Situation bemühen. Bei $n = 2$ liegen die Lösungspunkte in der Ebene, bei $n = 3$ im Raum. Einfache Beispiele wie das folgende zeigen aber auch, dass es künstlich wäre, die Anzahl der Variablen auf 3 zu beschränken, um eine geometrische Vorstellungbarkeit zu sichern.

Beispiel 31.2. Lucy Sonnenschein befindet sich an einem Obststand und möchte für 10 Euro Obst kaufen. Dabei kosten (jeweils pro Hundert Gramm) die Kirschen 0,5 Euro, die Heidelbeeren 1,20 Euro, die Himbeeren 0,9 Euro und die Trauben 0,6 Euro. Ein Einkauf wird durch ein Tupel (x, y, z, w) repräsentiert, wobei sich die einzelnen Zahlen auf die gekaufte Menge (in Hundert Gramm) der Obstsorten bezieht. Der Einkaufspreis ist somit

$$0,5 \cdot x + 1,2 \cdot y + 0,9 \cdot z + 0,6 \cdot w$$

und die Bedingung, genau 10 Euro auszugeben, führt auf die Gleichung

$$0,5 \cdot x + 1,2 \cdot y + 0,9 \cdot z + 0,6 \cdot w = 10$$

bzw. in Brüchen

$$\frac{1}{2} \cdot x + \frac{6}{5} \cdot y + \frac{9}{10} \cdot z + \frac{3}{5} \cdot w = 10.$$

Es gibt hier sehr viele Lösungen. Sie kann beispielsweise nur Kirschen kaufen, dann wären das 20 Einheiten von den Kirschen und 0 von den anderen Sorten. Als Tupel geschrieben ist diese Lösung $(20, 0, 0, 0)$. Oder sie könnte für jede Sorte gleich viel, nämlich 2,50 Euro, ausgeben wollen, das würde das Lösungstupel $(5, \frac{25}{12}, \frac{25}{9}, \frac{25}{6})$ ergeben. Oder sie möchte von jeder Sorte gleich viel kaufen. Dann wäre $x = y = z = w$ und es ergibt sich die Bedingung

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{6}{5} + \frac{9}{10} + \frac{3}{5}\right)x = \frac{32}{10}x = 10,$$

also

$$x = \frac{100}{32} = \frac{25}{8}$$

und das Lösungstupel $(\frac{25}{8}, \frac{25}{8}, \frac{25}{8}, \frac{25}{8})$. Die entscheidende Beobachtung an der Situation ist, dass man sich (zumindest, wenn man auch negative Zahlen zulässt) (x, y, z) frei vorgeben darf und dass dadurch der Wert w über

$$w = \frac{5}{3} \left(10 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{6}{5} \cdot y + \frac{9}{10} \cdot z\right)$$

bestimmt ist.

²Dies ist auch der Grund, warum wir Variablen x_i verwendet haben, um die Gleichung zu formulieren, und die Lösungstupel mit ξ_i angesetzt haben. Meistens schreibt man einfach nur x_i und muss die Rolle der Variablen dem Kontext entnehmen.

Lemma 31.3. *Es sei K ein Körper und*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

eine lineare Gleichung über K in den Variablen $x_1, \dots, x_n$. Es sei $a_1 \neq 0$. Dann steht die Lösungsmenge L der Gleichung in einer natürlichen Bijektion zum K^{n-1} , und zwar über die Abbildungen

$$L \longrightarrow K^{n-1}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (x_2, \dots, x_n),$$

und

$$K^{n-1} \longrightarrow L, (x_2, \dots, x_n) \longmapsto \left(\frac{1}{a_1} (c - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n), x_2, \dots, x_n \right).$$

Beweis. Wenn $(x_2, \dots, x_n)$ fixiert ist, so gibt es genau eine Möglichkeit für x_1 , die lineare Gleichung zu erfüllen, nämlich

$$x_1 = \frac{1}{a_1} (c - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n).$$

□

Eine entsprechende Aussage gilt an jeder Stelle mit $a_i \neq 0$, die übrigen Einträge legen dann x_i fest. Die Lösungsmenge notiert man als

$$L = \left\{ \left(\frac{1}{a_i} (c - a_1x_1 - \cdots - a_nx_n), x_2, \dots, x_n \right) \mid x_2, \dots, x_n \in K \right\}.$$

Die Variablen $x_2, \dots, x_n$ treten in dieser Darstellung als *freie Variablen* auf, deren Werte frei vorgegeben werden dürfen, während dadurch der Wert für x_1 (*abhängige Variable*) eindeutig festgelegt wird.

31.2. Lineare Gleichungssysteme.

Bei einem linearen Gleichungssystem gibt es mehrere lineare Gleichungen in einer gegebenen Menge von Variablen, die gleichzeitig erfüllt werden sollen. Wir beginnen mit drei einführenden Beispielen.

Beispiel 31.4. Lucy Sonnenschein befindet sich an einem Obststand und möchte für 10 Euro Obst kaufen. Gleichzeitig möchte sie, dass das Obst genau 30 Milligramm Vitamin C enthält. Die Kirschen kosten (jeweils pro Hundert Gramm) 0,5 Euro und besitzen 3 Milligramm Vitamin C, die Heidelbeeren kosten 1,20 Euro und besitzen 5 Milligramm Vitamin C, die Himbeeren kosten 0,9 Euro und besitzen 2 Milligramm Vitamin C und die Trauben kosten 0,6 Euro und besitzen 4 Milligramm Vitamin C. Ein Einkauf wird durch ein Tupel (x, y, z, w) repräsentiert, wobei sich die einzelnen Zahlen auf die gekauften Mengen (in Hundert Gramm) der Obstsorten beziehen. Die Geldbedingung führt auf die lineare Gleichung

$$\frac{1}{2} \cdot x + \frac{6}{5} \cdot y + \frac{9}{10} \cdot z + \frac{3}{5} \cdot w = 10$$

und die Vitaminbedingung führt auf die lineare Gleichung

$$3 \cdot x + 5 \cdot y + 2 \cdot z + 4 \cdot w = 30.$$

Beide Bedingungen sollen simultan erfüllt sein, gesucht sind also die Tupel (x, y, z, w) , die beide linearen Gleichungen erfüllen.

Beispiel 31.5. Mustafa Müller und Heinz Ngolo sind im Fanshop von Borussia Dortmund. Mustafa zahlt für sieben Wimpel und fünf Aufnäher zusammen 46 Euro und Heinz zahlt für vier Wimpel und sechs Aufnäher zusammen 42 Euro. Wie viel kostet ein Wimpel und wie viel kostet ein Aufnäher? Dies führt zu einem linearen Gleichungssystem mit zwei Variablen und zwei Gleichungen, die beiden Unbekannten sind die Preise für einen Wimpel (sagen wir x) und einen Aufnäher (sagen wir y). Mustafas Rechnung führt auf die Bedingung

$$7x + 5y = 46$$

und Heinz Rechnung führt auf die Bedingung

$$4x + 6y = 42.$$

Beispiel 31.6. An einem Weihnachtsstand auf dem Weihnachtsmarkt gibt es drei verschiedene Glühweintöpfe. Alle drei beinhalten die Zutaten Zimt, Gewürznelken, Rotwein und Zucker, allerdings mit unterschiedlichen Anteilen. Die Zusammensetzung der einzelnen Glühweine ist

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}.$$



Jeder Glühwein wird also repräsentiert durch ein Vierertupel, deren einzelne Einträge für die Anteile an den Zutaten stehen. Die Menge aller (möglichen) Glühweine bilden einen Vektorraum (diesen Begriff werden wir in einer der nächsten Vorlesungen einführen), und die drei konkreten Glühweine sind drei Vektoren in diesem Raum.

Nehmen wir an, dass keiner dieser drei Glühweine genau den gewünschten Geschmack trifft und dass der Wunschglühwein die Zusammensetzung

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

hat. Gibt es eine Möglichkeit, den Wunschglühwein durch Zusammenschütten der vorgegebenen Glühweine zu erhalten? Gibt es also Zahlen³ $a, b, c \in \mathbb{Q}$ derart, dass

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gilt. Hinter dieser einen vektoriellen Gleichung liegen vier einzelne Gleichungen in den „Variablen“ a, b, c , wobei die Gleichungen sich aus den Zeilen ergeben. Wann gibt es eine solche Lösung, wann keine, wann mehrere? Das sind typische Fragen der linearen Algebra.

Wir kommen zur allgemeinen Definition eines linearen Gleichungssystems.

Definition 31.7. Es sei K ein Körper und $a_{ij} \in K$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Dann nennt man

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein (homogenes) *lineares Gleichungssystem* in den Variablen $x_1, \dots, x_n$. Ein Tupel $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$ heißt *Lösung des linearen Gleichungssystems*, wenn $\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ ist.

Wenn $(c_1, \dots, c_m) \in K^m$ beliebig⁴ ist, so heißt

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* und ein Tupel

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in K^n$$

³Sinnvoll interpretierbar sind in diesem Beispiel nur positive Zahlen, da man schwerlich aus einem Glühweingemisch die einzelnen verwendeten Glühweinsorten wieder herausziehen kann. In der linearen Algebra spielt sich aber alles über einem Körper ab, so dass wir auch negative Zahlen zulassen.

⁴Ein solcher Vektor heißt manchmal ein *Störvektor* des Systems.

heißt *Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems*, wenn

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \zeta_j = c_i$$

für alle i ist.

Die Menge aller Lösungen eines linearen Gleichungssystems heißt die *Lösungsmenge*. Im homogenen Fall spricht man auch vom *Lösungsraum*, da es sich in der Tat, wie wir in Lemma 34.2 sehen werden, um einen Untervektorraum des K^n handelt.

Ein homogenes lineares Gleichungssystem besitzt immer die sogenannte *triviale Lösung* $0 = (0, \dots, 0)$. Ein inhomogenes Gleichungssystem braucht nicht unbedingt eine Lösung zu haben. Beispielsweise ist das durch die beiden Gleichungen

$$3x = 7$$

und

$$5x = 8$$

in der einen Variablen x gegebene System offenbar nicht lösbar. Grundsätzlich kann auch eine Gleichung der Form

$$0 = 1$$

auftreten, wenn sämtliche Koeffizienten der Gleichung 0 sind und die Störkomponente nicht 0 ist. In diesem Fall gibt es keine Lösung.

Zu einem inhomogenen linearen Gleichungssystem heißt das homogene System, das entsteht, wenn man den Störvektor gleich 0 setzt, das *zugehörige homogene System*. Dies mag auf den ersten Blick willkürlich erscheinen, da man ja das Gleichungssystem, das man lösen möchte, einfach ändert. Der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems hat aber mehr Struktur und hilft, die Lösungsmenge des inhomogenen Systems zu verstehen, siehe insbesondere Lemma 34.5.

Bemerkung 31.8. Gelegentlich ist ein lineares Gleichungssystem nicht in der Form gegeben, dass die Variablen nur auf einer Seite der Gleichungen auftauchen, wie beispielsweise bei

$$3x - 4 + 5y = 8z + 7x,$$

$$2 - 4x + z = 2y + 3x + 6,$$

$$4z - 3x + 2x + 3 = 5x - 11y + 2z - 8.$$

In diesem Fall muss man das System zuerst durch einfache Additionen und Zusammenfassen der Koeffizienten in jeder einzelnen Gleichung in die Standardgestalt bringen.

31.3. Lösungsverfahren für zwei Gleichungen in zwei Variablen.

In der nächsten Vorlesung werden wir ein allgemeines Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme kennenlernen, das *Eliminationsverfahren*. Für eine einzige Gleichung in beliebig vielen Variablen haben wir ein Lösungsverfahren bereits in Lemma 31.3 gesehen. Die grundlegende Beobachtung für jedes Lösungsverfahren für ein lineares Gleichungssystem ist, dass wenn $(x_1, \dots, x_n)$ die beiden Gleichungen

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c$$

und

$$b_1x_1 + \dots + b_nx_n = d$$

erfüllt, dass dieses Tupel dann auch die Gleichung

$$(a_1 + b_1)x_1 + \dots + (a_n + b_n)x_n = c + d$$

erfüllt. Das bedeutet, dass man die Gleichungen umformen kann mit dem Ziel, ein vereinfachtes System zu finden, aus dem man die Lösungen direkt ablesen kann.

Hier besprechen wir den Fall von zwei linearen Gleichungen in zwei Variablen.

Beispiel 31.9. Wir knüpfen an Beispiel 31.5 an, d.h. wir möchten das lineare Gleichungssystem

$$7x + 5y = 46$$

und

$$4x + 6y = 42$$

lösen. Wir wollen geeignete Vielfache der beiden Gleichungen miteinander addieren mit dem Ziel, dass in der Summe eine Variable herausfällt. Man kann beispielsweise das Vierfache der ersten Gleichung mit dem -7 -fachen der zweiten Gleichung addieren. Diese Vielfachengleichungen sind

$$28x + 20y = 184$$

bzw.

$$-28x - 42y = -294.$$

Wenn man diese beiden Gleichungen addiert, so erhält man

$$-22y = -110$$

und damit

$$y = 5.$$

Somit kennt man den Preis für einen Aufnäher. Diese Information kann man mit einer der Ausgangsgleichungen weiter verarbeiten. Es ist

$$7x + 5 \cdot 5 = 46$$

und somit

$$7x = 46 - 25 = 21,$$

also

$$x = 3.$$

Verfahren 31.10. Es sei ein lineares Gleichungssystem über dem Körper K mit zwei Gleichungen in den zwei Variablen x und y gegeben, d.h. es soll

$$ax + by = e$$

und

$$cx + dy = f$$

mit vorgegebenen Zahlen $a, b, c, d, e, f \in K$ simultan gelöst werden. Wenn

$$a = c = 0$$

ist, so kommt die Variable x gar nicht explizit vor und es liegt somit im Prinzip ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in der einen Variablen y vor. In diesem Extremfall hängt die Lösbarkeit und die Lösungen von b, d, e, f ab, insbesondere davon, ob diese Zahlen gleich 0 oder nicht gleich 0 sind. Betrachten wir also den Fall, wo $a \neq 0$ ist. Wenn man zur zweiten Gleichung das $-\frac{c}{a}$ -fache der ersten Gleichung hinzuaddiert (also das $\frac{c}{a}$ -fache abzieht), so ergibt sich die neue Gleichung

$$cx + dy - \frac{c}{a}(ax + by) = \left(d - \frac{c}{a}b\right)y = f - \frac{c}{a}e.$$

Eine Lösung des Ausgangssystems muss auch eine Lösung des neuen Gleichungssystems (und umgekehrt) sein, das aus der ersten Gleichung

$$ax + by = e$$

und der neuen Gleichung (mit neuen Buchstaben für die neuen Koeffizienten)

$$ry = s$$

besteht. In dieser zweiten Gleichung kommt nur y als Variable vor, entscheidend ist, ob r gleich oder nicht gleich 0 ist (da sich der neue Koeffizient durch eine Rechnung ergibt, ist nicht von vornherein klar, welcher Fall eintreten wird). Bei $r \neq 0$ (dies ist der „Normalfall“) ist

$$y = \frac{s}{r}$$

und mit der ersten Gleichung erhält man die eindeutige Lösung für x . Bei $r = 0$ und $s \neq 0$ gibt es keine Lösung für y und somit auch keine Lösung für das Gesamtsystem. Bei $r = 0$ und $s = 0$ ist jedes y eine Lösung der zweiten Gleichung und jedes y führt mit der ersten Gleichung zu einer Lösung für x und damit zu einer Gesamtlösung.

31. ARBEITSBLATT

31.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 31.1. Löse das lineare Gleichungssystem

$$2x - 5y = 3.$$

31.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 31.2. Überprüfe, ob die folgenden Tupel Lösungen der linearen Gleichung

$$7x + 2y - 9z = -3$$

sind.

- (1) $(0, 0, 0)$,
- (2) $(3, 3, 3)$,
- (3) $(0, \frac{1}{5}, 0)$,
- (4) $(-2, 7, \frac{1}{3})$.

Wähle „zufällig“ eine Dreiertupel. Ist es eine Lösung der Gleichung?

Aufgabe 31.3. Löse das lineare Gleichungssystem

$$x + y + z = 0.$$

Aufgabe 31.4. Löse das lineare Gleichungssystem

$$4x + 7y - 3z + 6u + 5v = 0.$$

Aufgabe 31.5. Löse das lineare Gleichungssystem

$$-\frac{9}{4}x + \frac{8}{5}y - \frac{5}{3}z = \frac{2}{7}.$$

Aufgabe 31.6. Skizziere die Lösungsmenge der linearen Gleichung

$$4x + 7y = 6$$

im $\mathbb{Q}^2$.

Aufgabe 31.7. Finde zum linearen Gleichungssystem

$$\frac{7}{3}x - \frac{8}{5}y - \frac{3}{2}z = \frac{4}{9}$$

ein äquivalentes Gleichungssystem (also eines mit der gleichen Lösungsmenge), dessen Koeffizienten zu $\mathbb{Z}$ gehören.

Aufgabe 31.8. Entscheide, ob die folgenden Tupel Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x - 6y + 4z &= 1, \\ -2x + 5y - 4z &= -3, \end{aligned}$$

sind.

- a) $(-1, 0, 1)$,
- b) $(2, 3, \frac{7}{2})$,
- c) $(1, 3, 4)$.

Aufgabe 31.9. Die Punkte (zwischen 0 und 15) in einem Kurs setzen sich aus der mündlichen Note, die zu einem Drittel eingeht, und der schriftlichen Note, die zu zwei Dritteln eingeht, zusammen.

- (1) Erstelle eine Funktion, die die Gesamtpunktzahl aus den Teilergebnissen berechnet.
- (2) Erstelle eine Gleichung, die beschreibt, dass die Gesamtpunktzahl gleich 11 ist.
- (3) Lucy Sonnenschein war während der Unterrichtsstunden etwas unaufmerksam, was sich in ihrer mündlichen Note mit 7 Punkten niederschlägt. Wie muss sie schriftlich abschneiden, um auf ihre gewünschte Gesamtpunktzahl von 11 Punkten zu kommen?
- (4) Löse das Gleichungssystem aus Teil (2). Unterscheide zwischen mathematisch korrekten Lösungen und korrekten Lösungen, die im Kontext sinnvoll interpretiert werden können.
- (5) Finde für mathematisch korrekte Lösungen, die auf den ersten Blick im gegebenen Kontext nicht sinnvoll interpretiert werden können, doch eine sinnvolle Interpretation.
- (6) Interpretiere die zugehörige homogene Gleichung.

Aufgabe 31.10.*

Kevin zahlt für einen Winterblumenstrauß mit 3 Schneeglöckchen und 4 Mistelzweigen 2,50 € und Jennifer zahlt für einen Strauß aus 5 Schneeglöckchen und 2 Mistelzweigen 2,30 €. Wie viel kostet ein Strauß mit einem Schneeglöckchen und 11 Mistelzweigen?

Aufgabe 31.11. Mustafa Müller und Heinz Ngolo sind im Fanshop von Borussia Dortmund. Mustafa zahlt für drei Pappspieler und vier handsignierte Fotos zusammen 55 Euro und Heinz zahlt für fünf Pappspieler und drei handsignierte Fotos zusammen 66 Euro. Wie viel kostet ein Pappspieler und wie viel kostet ein handsigniertes Foto?

Aufgabe 31.12. Löse das lineare Gleichungssystem

$$2x + 3y = 7 \text{ und } 5x + 4y = 3.$$

Aufgabe 31.13. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\frac{3}{7}x - \frac{4}{11}y = -\frac{7}{3} \text{ und } -\frac{4}{7}x + \frac{5}{3}y = \frac{6}{5}.$$

Aufgabe 31.14. Löse das lineare Gleichungssystem

$$x + y = 1 \text{ und } y = 1$$

über dem Körper mit zwei Elementen.

Aufgabe 31.15. Löse das lineare Gleichungssystem

$$x = -8 \text{ und } y = 5.$$

Aufgabe 31.16. Löse das lineare Gleichungssystem

$$x = 5, 2y = 3, 4z + w = 3.$$

Aufgabe 31.17.*

Sie wollen für eine Party 100 Liter an Getränken einkaufen und dafür 80 € ausgeben. Sorte A kostet 70 Cent pro 1,25-Liter-Flasche, Sorte B kostet 1,40 € pro 750-ml-Flasche. Wie viele Flaschen kaufen Sie von jeder Sorte? Zusatzfrage: Weil man nur ganze Flaschen kaufen kann, kommt man nicht exakt auf 100 Liter und 80 €. Wie groß ist der Fehler?

Aufgabe 31.18. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\frac{2}{9}x + \frac{3}{10}y + \frac{5}{3} = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{5}y - \frac{3}{5} \text{ und } -\frac{3}{8}x + \frac{8}{5}y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}x + \frac{4}{7}y + \frac{1}{5}.$$

Aufgabe 31.19. Es sei ein lineares Gleichungssystem durch die Gleichungen $G_1, \dots, G_n$ und ein zweites lineares Gleichungssystem durch die Gleichungen $H_1, \dots, H_m$ gegeben, beide über dem Körper K und in den Variablen $X_1, \dots, X_r$. Wie verhält sich die Lösungsmenge L_1 zum ersten System und die Lösungsmenge L_2 zum zweiten System zur Lösungsmenge des Systems, das aus den beiden Systemen zusammengesetzt ist?

Aufgabe 31.20. Über dem Körper K sei ein lineares Gleichungssystem in den Variablen $X_1, \dots, X_n$ und ein zweites lineares Gleichungssystem in den Variablen $Y_1, \dots, Y_m$ gegeben. Wie verhält sich die Lösungsmenge L_1 zum ersten System und die Lösungsmenge L_2 zum zweiten System zur Lösungsmenge des Systems, das aus den beiden Systemen zusammengesetzt ist?

Aufgabe 31.21. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4x - 2y + 6z &= 3 \\ 3x + 7y + 5z &= 2 \\ 5x - 2y + 4z &= -5. \end{aligned}$$

Finde Tupel (x, y, z) , die je zwei dieser Gleichungen erfüllen, aber nicht die dritte.

Aufgabe 31.22. Interpretiere Lemma 31.3, wenn nur eine Variable vorliegt.

Aufgabe 31.23. Wir betrachten eine Uhr mit Stunden- und Minutenzeiger. Es ist jetzt 6 Uhr, so dass die beiden Zeiger direkt gegenüber stehen. Um wie viel Uhr stehen die beiden Zeiger zum nächsten Mal direkt gegenüber?

31.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 31.24. (2 Punkte)

Überprüfe, ob die folgenden Tupel Lösungen der linearen Gleichung

$$3x - 5y + 4z = 11$$

sind.

- (1) $(2, 1, 3)$,
- (2) $(0, 0, \frac{11}{4})$,
- (3) $(1, 2, 1)$,
- (4) $(4, 2, 6)$,
- (5) $(3, \frac{2}{5}, 1)$,
- (6) $(1, 11, 111)$.

Aufgabe 31.25. (2 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$-7x - 8y = 5.$$

Aufgabe 31.26. (3 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$-\frac{3}{4}x + \frac{7}{2}y - \frac{7}{9}z + \frac{6}{7}w = \frac{4}{5}.$$

Aufgabe 31.27. (3 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$4x - 5y = 6 \text{ und } 2x + 11y = -3.$$

Aufgabe 31.28. (3 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$-\frac{4}{5}x - \frac{3}{8}y = -\frac{3}{5} \text{ und } -\frac{6}{7}x + \frac{1}{8}y = \frac{4}{9}.$$

Aufgabe 31.29. (3 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\frac{3}{7}x + \frac{4}{11}y + \frac{4}{5} = -\frac{1}{2}x + \frac{6}{5}y - \frac{7}{4} \text{ und } -\frac{1}{8}x + \frac{7}{6}y - 2 = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{7}y + \frac{3}{5}.$$

32. VORLESUNG - ELIMINATIONSVERFAHREN

Verwandle große
Schwierigkeiten in kleine und
kleine in gar keine

Chinesische Weisheit

32.1. Das Lösen von linearen Gleichungssystemen.

Es ist von vornherein gar nicht so klar, was man unter dem Lösen eines (linearen) Gleichungssystems verstehen soll. Jedenfalls geht es um eine möglichst gute Beschreibung der Lösungsmenge. Wenn es nur eine Lösung gibt, so geht es darum, diese Lösung zu finden und anzugeben. Wenn es überhaupt keine Lösung gibt, geht es darum, dies festzustellen und zu begründen. Im Allgemeinen ist aber die Lösungsmenge eines Gleichungssystems groß. Dann versteht man unter der Lösung eines Systems, freie Variablen zu identifizieren, die beliebige Werte annehmen dürfen, und explizit zu beschreiben, wie die anderen (abhängigen) Variablen von diesen freien Variablen abhängen. Man spricht auch von einer *expliziten Beschreibung* der Lösungsmenge.

Lineare Gleichungssysteme können systematisch mit dem *Eliminationsverfahren* gelöst werden, bei dem nach und nach Variablen eliminiert werden und

schließlich ein besonders einfaches äquivalentes Gleichungssystem (in Dreiecksgestalt) entsteht, das direkt gelöst werden kann (bzw. von dem gezeigt werden kann, dass es keine Lösung besitzt). Systeme mit zwei Gleichungen in zwei Variablen haben wir schon in der letzten Vorlesung behandelt. Wir fahren mit einem typischen Beispiel fort.

Beispiel 32.1. Wir wollen das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrr} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ 3x & -4y & & +u & +2v & = & 1 \\ 4x & & -2z & +2u & & = & 7 \end{array}$$

über $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{Q}$) lösen. Wir eliminieren zuerst x , indem wir die erste Zeile I beibehalten, die zweite Zeile II durch $II - \frac{3}{2}I$ und die dritte Zeile III durch $III - 2I$ ersetzen. Das ergibt

$$\begin{array}{rrrrrr} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ & -\frac{23}{2}y & -3z & +u & +\frac{7}{2}v & = & -\frac{7}{2} \\ & -10y & -6z & +2u & +2v & = & 1. \end{array}$$

Wir könnten jetzt aus der (neuen) dritten Zeile mit Hilfe der zweiten Zeile y eliminieren. Wegen der Brüche eliminieren wir aber lieber z (dies eliminiert gleichzeitig u). Wir belassen also die erste und zweite Zeile und ersetzen die dritte Zeile III durch $III - 2II$. Dies ergibt, wobei wir das System in einer neuen Reihenfolge⁵ aufschreiben, das System

$$\begin{array}{rrrrrr} 2x & +2z & & +5y & -v & = & 3 \\ & -3z & +u & -\frac{23}{2}y & +\frac{7}{2}v & = & -\frac{7}{2} \\ & & & 13y & -5v & = & 8. \end{array}$$

Wir können uns nun v beliebig (oder „frei“) vorgeben. Die dritte Zeile legt dann y eindeutig fest, es muss nämlich

$$y = \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v$$

gelten. In der zweiten Gleichung können wir wieder u beliebig vorgeben, was dann z eindeutig festlegt, nämlich

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{3} \left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{23}{2} \left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v \right) \right) \\ &= -\frac{1}{3} \left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{92}{13} + \frac{115}{26}v \right) \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{93}{26} - u + \frac{12}{13}v \right) \\ &= -\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v. \end{aligned}$$

⁵Eine solche Umstellung ist ungefährlich, wenn man den Namen der Variablen mit-schleppt. Wenn man dagegen das System in Matrizenschreibweise aufführt, also die Variablennamen einfach weglässt, so muss man sich diese Spaltenvertauschungen merken.

Die erste Zeile legt dann x fest, nämlich

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(3 - 2z - 5y + v) \\ &= \frac{1}{2}\left(3 - 2\left(-\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v\right) - 5\left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v\right) + v\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{30}{13} - \frac{2}{3}u - \frac{4}{13}v\right) \\ &= \frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v. \end{aligned}$$

Daher kann man die Gesamtlösungsmenge als

$$\left\{ \left(\frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v, \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v, -\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v, u, v \right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

schreiben. Eine besonders einfache Lösung ergibt sich, wenn man die freien Variablen u und v gleich 0 setzt. Dies führt auf die spezielle Lösung

$$(x, y, z, u, v) = \left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{31}{26}, 0, 0 \right).$$

In der allgemeinen Lösung kann man u und v als Koeffizienten rausziehen und dann die Lösungsmenge auch als

$$\left\{ \left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{31}{26}, 0, 0 \right) + u \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0 \right) + v \left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1 \right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

schreiben. Dabei ist

$$\left\{ u \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0 \right) + v \left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1 \right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Beschreibung der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

Definition 32.2. Es sei K ein Körper und seien zwei (inhomogene) lineare Gleichungssysteme zur gleichen Variablenmenge gegeben. Die Systeme heißen *äquivalent*, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

Lemma 32.3. Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über K . Dann führen die folgenden Manipulationen an diesem Gleichungssystem zu einem äquivalenten Gleichungssystem.

- (1) Das Vertauschen von zwei Gleichungen.
- (2) Die Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar $s \neq 0$.
- (3) Das einfache Weglassen einer Gleichung, die doppelt vorkommt.

- (4) *Das Verdoppeln einer Gleichung (im Sinne von eine Gleichung zweimal hinschreiben).*
- (5) *Das Weglassen oder Hinzufügen einer Nullzeile (einer Nullgleichung)*
- (6) *Das Ersetzen einer Gleichung H durch diejenige Gleichung, die entsteht, wenn man zu H eine andere Gleichung G des Systems addiert.*

Beweis. Die meisten Aussagen sind direkt klar. (2) ergibt sich einfach daraus, dass wenn

$$\sum_{i=1}^n a_i \xi_i = c$$

gilt, dass dann auch

$$\sum_{i=1}^n (sa_i) \xi_i = sc$$

für jedes $s \in K$ gilt. Bei $s \neq 0$ kann man diesen Übergang durch Multiplikation mit s^{-1} rückgängig machen.

(6). Es sei G die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = c$$

und H die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n b_i x_i = d.$$

Wenn ein Tupel $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$ die beiden Gleichungen erfüllt, so erfüllt es auch die Gleichung $H' = G + H$. Und wenn das Tupel die beiden Gleichungen G und H' erfüllt, so auch die Gleichung G und $H = H' - G$. $\square$

Für die praktische Lösung eines linearen Gleichungssystems sind die beiden Manipulationen (2) und (6) am wichtigsten, wobei man in aller Regel diese beiden Schritte kombiniert und eine Gleichung H durch eine Gleichung der Form $H + \lambda G$ (mit $G \neq H$) ersetzt. Dabei wird $\lambda \in K$ so gewählt, dass die neue Gleichung eine Variable weniger besitzt als die alte. Man spricht von *Elimination einer Variablen*. Diese Elimination wird nicht nur für eine Zeile durchgeführt, sondern für alle Zeilen mit Ausnahme von einer (geeignet gewählten) „Arbeitszeile“ G und mit einer fixierten „Arbeitsvariablen“. Das folgende *Eliminationslemma* beschreibt diesen Rechenschritt.

Lemma 32.4. *Es sei K ein Körper und S ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem über K in den Variablen $x_1, \dots, x_n$. Es sei x eine Variable, die in mindestens einer Gleichung G mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten a vorkommt. Dann lässt sich jede von G verschiedene⁶ Gleichung H*

⁶Mit verschieden ist hier gemeint, dass die beiden Gleichungen einen unterschiedlichen Index im System haben. Es ist also sogar der Fall erlaubt, dass G und H dieselbe, aber doppelt aufgeführte Gleichung ist.

durch eine Gleichung H' ersetzen, in der x nicht mehr vorkommt, und zwar so, dass das neue Gleichungssystem S' , das aus G und den Gleichungen H' besteht, äquivalent zum Ausgangssystem S ist.

Beweis. Durch Umnummerieren kann man $x = x_1$ erreichen. Es sei G die Gleichung

$$ax_1 + \sum_{i=2}^n a_i x_i = b$$

(mit $a \neq 0$) und H die Gleichung

$$cx_1 + \sum_{i=2}^n c_i x_i = d.$$

Dann hat die Gleichung

$$H' = H - \frac{c}{a}G$$

die Gestalt

$$\sum_{i=2}^n \left(c_i - \frac{c}{a}a_i\right) x_i = d - \frac{c}{a}b,$$

in der x_1 nicht mehr vorkommt. Wegen $H = H' + \frac{c}{a}G$ sind die Gleichungssysteme äquivalent. $\square$

Das praktische Verfahren, bei dem man sukzessive das Verfahren im Beweis des vorstehenden Lemmas anwendet, um auf Dreiecksgestalt bzw. Stufenform zu kommen, nennt man *Gaußsches Eliminationsverfahren* (oder *Additionsverfahren*). Es werden also Variablen eliminiert, indem man geeignete Vielfache von Gleichungen zu anderen Gleichungen hinzuaddiert.

Satz 32.5. *Jedes (inhomogene) lineare Gleichungssystem über einem Körper K lässt sich durch die in Lemma 32.3 beschriebenen elementaren Umformungen und durch das Weglassen von überflüssigen Gleichungen in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem der Stufenform*

$$\begin{array}{cccccccccccl} b_{1s_1}x_{s_1} & +b_{1s_1+1}x_{s_1+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & +b_{1n}x_n & = & d_1 \\ 0 & \dots & 0 & b_{2s_2}x_{s_2} & \dots & \dots & \dots & +b_{2n}x_n & = & d_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b_{ms_m}x_{s_m} & \dots & +b_{mn}x_n & = & d_m \\ (0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & = & d_{m+1}) \end{array}$$

überführen, bei dem alle Startkoeffizienten $b_{1s_1}, b_{2s_2}, \dots, b_{ms_m}$ von 0 verschieden sind. Dabei ist (bei $d_{m+1} = 0$) die letzte Zeile überflüssig oder aber (bei $d_{m+1} \neq 0$) das System besitzt keine Lösung.

Durch Variablenumbenennungen erhält man ein äquivalentes System der Form

$$\begin{array}{cccccccc}
 c_{11}y_1 & +c_{12}y_2 & \dots & +c_{1m}y_m & +c_{1m+1}y_{m+1} & \dots & +c_{1n}y_n & = & d_1 \\
 0 & c_{22}y_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & +c_{2n}y_n & = & d_2 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & c_{mm}y_m & +c_{mm+1}y_{m+1} & \dots & +c_{mn}y_n & = & d_m \\
 (0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & = & d_{m+1})
 \end{array}$$

mit Diagonalelementen $c_{ii} \neq 0$.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Eliminationslemma, mit dem man sukzessive Variablen eliminiert. Man wendet es auf die erste (in der gegebenen Reihenfolge) Variable (diese sei x_{s_1}) an, die in mindestens einer Gleichung mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten auftaucht. Diese Eliminationsschritte wendet man solange an, solange das im Eliminationsschritt entstehende variablenreduzierte Gleichungssystem (also ohne die vorhergehenden Arbeitsgleichungen) noch mindestens zwei Gleichungen mit von 0 verschiedenen Koeffizienten erhält. Wenn dabei Gleichungen in der Form der letzten Gleichung übrig bleiben, und diese nicht alle die Nullgleichung sind, so besitzt das System keine Lösung. Wenn wir $y_1 = x_{s_1}, y_2 = x_{s_2}, \dots, y_m = x_{s_m}$ setzen und die anderen Variablen mit $y_{m+1}, \dots, y_n$ benennen, so erhält man das angegebene System in Dreiecksgestalt. $\square$

Es kann sein, dass die Variable x_1 gar nicht in dem System mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt, und, dass in einer Variablenelimination gleichzeitig mehrere Variablen eliminiert werden. Dann erhält man wie beschrieben ein Gleichungssystem in Stufenform, das erst durch Variablenvertauschungen in die Dreiecksform gebracht werden kann.

Bemerkung 32.6. Gelegentlich möchte man ein *simultanes lineares Gleichungssystem* der Form

$$\begin{array}{rcll}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & c_1 & (= d_1, = e_1, \dots) \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & c_2 & (= d_2, = e_2, \dots) \\
 \vdots & & \vdots & \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & c_m & (= d_m, = e_m, \dots)
 \end{array}$$

lösen. Es sollen also für verschiedene Störvektoren Lösungen des zugehörigen inhomogenen Gleichungssystems berechnet werden. Grundsätzlich könnte man dies als voneinander unabhängige Gleichungssysteme betrachten, es ist aber geschickter, die Umwandlungen, die man auf der linken Seite macht, um Dreiecksgestalt zu erreichen, simultan auf der rechten Seiten mit allen Störvektoren durchzuführen. Ein wichtiger Spezialfall bei $n = m$ liegt vor, wenn die Störvektoren die Standardvektoren durchlaufen, siehe Verfahren 36.12.

Wir besprechen noch kurz weitere Verfahren, ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

Bemerkung 32.7. Ein weiteres Verfahren, ein lineares Gleichungssystem zu lösen, ist das *Einsetzungsverfahren*. Dabei werden ebenfalls Variablen sukzessive eliminiert, allerdings in einer anderen Weise. Wenn man mit diesem Verfahren die Variable x_1 eliminieren möchte, so löst man eine Gleichung, sagen wir G_1 , in der x_1 mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt, nach x_1 auf, und erhält eine neue Gleichung der Form

$$G'_1 : x_1 = F_1,$$

wobei in F_1 die Variable x_1 nicht vorkommt. In allen weiteren Gleichungen $G_2, \dots, G_m$ ersetzt man die Variable x_1 durch F_1 und erhält (nach Umformungen) ein Gleichungssystem $G'_2, \dots, G'_m$ ohne die Variable x_1 , das zusammen mit G'_1 äquivalent zum Ausgangssystem ist.

Bemerkung 32.8. Ein anderes Verfahren, ein lineares Gleichungssystem zu lösen, ist das *Gleichsetzungsverfahren*. Dabei werden ebenfalls Variablen sukzessive eliminiert, allerdings in anderer Weise. Bei diesem Verfahren löst man die Gleichungen $G_i, i = 1, \dots, m$, nach einer festen Variablen, sagen wir x_1 auf. Es seien (nach Umordnung) $G_1, \dots, G_k$ die Gleichungen, in denen die Variable x_1 mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt. Diese Gleichungen bringt man in die Form

$$G'_i : x_1 = F_i,$$

wobei in F_i die Variable x_1 nicht vorkommt. Das Gleichungssystem bestehend aus

$$G'_1, F_1 = F_2, F_1 = F_3, \dots, F_1 = F_k, G_{k+1}, \dots, G_m$$

ist zum gegebenen System äquivalent. Mit diesem System ohne G'_1 fährt man fort.

Bemerkung 32.9. Die in Satz 32.5, Bemerkung 32.7 und Bemerkung 32.8 beschriebenen Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems unterscheiden sich hinsichtlich Schnelligkeit, strategischer Konzeption, Systematik, Fehleranfälligkeit. Beim Eliminationsverfahren tritt die systematische Reduzierung der Variablenanzahl (Dimensionsreduktion) besonders deutlich hervor und man kann mit ihm eigentlich keine Fehler (außer Rechenfehler) machen und weiß immer, wie es weiter geht. Allerdings treten diese Vorteile erst ab zumindest drei Variablen hervor. Bei zwei Variablen ist es nahezu egal, welchen Weg man wählt. Die Bewertung der Verfahren hängt auch wesentlich von konkreten Besonderheiten des vorliegenden Systems ab. Solche Besonderheiten muss man berücksichtigen, um „Abkürzungen“ auf dem Weg zur Lösung zu sehen. Die bewusste Wahl eines für das konkrete Problem angemessenen Lösungsweges nennt man *Adaptivität* (ein Begriff, der im didaktischen Kontext mit unterschiedlichen Bedeutungen verwendet wird). Wenn beispielsweise eine Zeile des Systems die Form $x = 3$ besitzt, so sollte man erkennen, dass daraus unmittelbar ein Teil der Lösung ablesbar ist,

und nicht zu dieser Zeile andere Zeilen hinzuaddieren und dadurch viele Variablen reinkriegen. Hier sollte man stattdessen in den anderen Zeilen das x durch die 3 ersetzen und dann weiter machen. Oder: Wenn es vier Gleichungen gibt, wobei in zwei Gleichungen nur die Variablen x und y und in den beiden anderen Gleichungen nur die Variablen z und w vorkommen, so sollte man erkennen, dass im Prinzip zwei entkoppelte lineare Systeme mit je zwei Variablen vorliegen und diese getrennt lösen. Oder: Es kann sein, dass ein kleines Teilsystem des Gleichungssystems bereits sicherstellt, dass es gar keine Lösung gibt. Dann muss man nur dies herausarbeiten und die anderen Gleichungen gar nicht berücksichtigen. Und: die genaue Fragestellung beachten! Wenn gefragt ist, ob ein bestimmtes Tupel eine Lösung ist, so muss man das Tupel nur in die Gleichungen einsetzen, Manipulationen an den Gleichungen sind nicht nötig.

Bemerkung 32.10. Unter einem *linearen Ungleichungssystem* über den rationalen Zahlen oder den reellen Zahlen versteht man ein System der Form

$$\begin{array}{rccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \star & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \star & c_2 \\ & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \star & c_m, \end{array}$$

wobei $\star$ gleich $\leq$ oder $\geq$ ist. Die Lösungsmenge ist deutlich schwieriger zu beschreiben als im Gleichungsfall. Eine Eliminierung von Variablen ist im Allgemeinen nicht möglich.

32.2. Lineare Gleichungssysteme in Dreiecksgestalt.

Satz 32.11. *Es sei ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über einem Körper K in Dreiecksgestalt*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \dots & +a_{1m}x_m & \dots & +a_{1n}x_n & = & c_1 \\ 0 & a_{22}x_2 & \dots & \dots & \dots & +a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mm}x_m & \dots & +a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

gegeben, wobei vorne die Diagonalelemente alle ungleich 0 seien. Dann stehen die Lösungen $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ in Bijektion zu den Tupeln $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in K^{n-m}$. D.h. die hinteren $n - m$ Einträge sind frei wählbar und legen eine eindeutige Lösung fest, und jede Lösung wird dabei erfasst.

Beweis. Dies ist klar, da bei gegebenem $(x_{m+1}, \dots, x_n)$ die Zeilen von unten nach oben sukzessive die anderen Variablen eindeutig festlegen. $\square$

Bei $m = n$ gibt es keine freien Variablen und es ist $K^0 = 0$ und das Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung. Ein beliebiges lineares Gleichungssystem formt man mit Hilfe des Eliminationslemmas in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem in Stufengestalt um. Dann stellt man fest, dass es

entweder keine Lösung besitzt oder aber man kann aus der Stufengestalt eine Beschreibung der Lösungsmenge erhalten.

32. ARBEITSBLATT

32.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 32.1. Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4x + 6y &= 0 \\ 5x + 8y &= 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung $(0, 0)$ besitzt.

32.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 32.2. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot x + \frac{6}{5} \cdot y + \frac{9}{10} \cdot z + \frac{3}{5} \cdot w &= 10, \\ 3 \cdot x + 5 \cdot y + 2 \cdot z + 4 \cdot w &= 30 \end{aligned}$$

aus Beispiel 31.4.

Aufgabe 32.3. Gibt es eine Lösung $(a, b, c) \in \mathbb{Q}$ für das lineare Gleichungssystem

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 31.6?

Aufgabe 32.4. In der großen Pause fährt das Süßwarenmobil von Raul Zuccherro auf den Schulhof. Gabi kauft einen Schokoriegel, zwei Packungen Brausepulver und drei saure Zungen und zahlt dafür 1,30 €. Lucy kauft zwei Schokoriegel, eine Packung Brausepulver und zwei saure Zungen und zahlt dafür 1,60 €. Mustafa kauft einen Schokoriegel, eine Packung Brausepulver und zwei saure Zungen und zahlt dafür einen €. Heinz kauft zwei Schokoriegel, zwei Packungen Brausepulver und eine saure Zunge und zahlt dafür 1,70 €. Wie viel kostet ein Schokoriegel, eine Packung Brausepulver, eine saure Zunge?

Benötigt man die volle Information, um dies herauszufinden?

Es sei der Einkauf von Gabi und von Lucy bekannt, ferner sei bekannt, dass Lucys kleine Schwester Veronika für drei Packungen Brausepulver und vier saure Zungen einen Euro zahlt. Kann man daraus die Preise rekonstruieren?

Aufgabe 32.5. In einer Familie leben M, P, S und T . Dabei ist M dreimal so alt wie S und T zusammen, M ist älter als P und S ist älter als T , wobei der Altersunterschied von S zu T doppelt so groß wie der von M zu P ist. Ferner ist P siebenmal so alt wie T und die Summe aller Familienmitglieder ist so alt wie die Großmutter väterlicherseits, nämlich 83.

a) Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, das die beschriebenen Verhältnisse ausdrückt.

b) Löse dieses Gleichungssystem.

Aufgabe 32.6.*

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrcl} 3x & & +z & +4w & = & 4 \\ 2x & +2y & & +w & = & 0 \\ 4x & +6y & & +w & = & 2 \\ x & +3y & +5z & & = & 3. \end{array}$$

Aufgabe 32.7. Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrcl} x & +2y & +3z & +4w & = & 1 \\ 2x & +3y & +4z & +5w & = & 7 \\ x & & +z & & = & 9 \\ x & +5y & +5z & +w & = & 0. \end{array}$$

Aufgabe 32.8. Zeige, dass es zu jedem linearen Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ ein dazu äquivalentes Gleichungssystem mit der Eigenschaft gibt, dass alle Koeffizienten ganzzahlig sind.

Aufgabe 32.9. Zeige, dass es zu jedem linearen Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ ein dazu äquivalentes Gleichungssystem mit der Eigenschaft gibt, dass darin der Betrag aller Koeffizienten kleiner als 1 ist.

Aufgabe 32.10. Zeige, dass die lineare Gleichung

$$2x + 2y = 1$$

über $\mathbb{Q}$ unendlich viele Lösungen besitzt, aber keine ganzzahlige Lösung.

Aufgabe 32.11. Bestimme sämtliche ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$3x + 7y = 0.$$

Aufgabe 32.12. Es sei ein homogenes lineares Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ gegeben, das eine nichttriviale Lösung besitze. Zeige, dass es auch eine ganzzahlige nichttriviale Lösung besitzt.

Aufgabe 32.13.*

Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x - 7y - 4z &= 0 \\ 2x + y - 3z &= 0 \\ 7x + 6y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung $(0, 0, 0)$ besitzt.

Aufgabe 32.14. Bringe das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - 4 + 5y &= 8z + 7x, \\ 2 - 4x + z &= 2y + 3x + 6, \\ 4z - 3x + 2x + 3 &= 5x - 11y + 2z - 8 \end{aligned}$$

in Standardgestalt und löse es.

Aufgabe 32.15. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x + 7y + 3z &= 4 \\ 11x + 9y + 13z &= 9 \\ 6x + 8y + 5z &= 2 \end{aligned}$$

mit dem Einsetzungsverfahren.

Aufgabe 32.16. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x - y + 7z &= 6 \\ 3x + 6y + 3z &= -2 \\ 8x + 8y + 7z &= 3 \end{aligned}$$

mit dem Einsetzungsverfahren.

Aufgabe 32.17. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x + 6y + 2z &= 6 \\ 4x + 8y + 9z &= 5 \\ 11x + 5y + 7z &= 8 \end{aligned}$$

mit dem Gleichsetzungsverfahren.

Aufgabe 32.18. Zeige durch ein Beispiel, dass das durch die drei Gleichungen I,II,III gegebene lineare Gleichungssystem nicht zu dem durch die drei Gleichungen I-II, I-III, II-III gegebenen linearen Gleichungssystem äquivalent sein muss.

Aufgabe 32.19. Es sei K der in Beispiel 11.4 eingeführte Körper mit zwei Elementen. Löse in K das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & +y & & & & & = & 1 \\ & & y & +z & & & = & 0 \\ x & +y & +z & & & & = & 0. \end{array}$$

In den folgenden vier Aufgaben geht es im Sinne von Bemerkung 32.9 insbesondere darum, ein für die Aufgabenstellung angemessenes Lösungsverfahren zu finden und durchzuführen.

Aufgabe 32.20. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} & & +7y & +3z & & & & & = & 4 \\ x & & & & & & +4w & & = & 9 \\ & & -3y & -5z & & & & & = & 2 \\ -2x & & & & & & +3w & & = & 3 \end{array}.$$

Aufgabe 32.21. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} 7y = 5, \\ 4z = 8, \\ 2u - 3v = 0, \\ 5w = 0, \\ 6x - 3y + 2z - 11u - v + 5w = 17, \\ 4u - 5v = 0. \end{array}$$

Aufgabe 32.22.*

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} 4x - 5y + 7z = -3, \\ -2x + 4y + 3z = 9, \\ x = -2. \end{array}$$

Aufgabe 32.23. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - 67y + 14z - 123u - 51w &= 5, \\ 8x - 11y + 12z - 27u - 65w &= 51, \\ 66x - 67y - 77z - u + 100w &= 0, \\ 8x - 11y + 12z - 27u - 65w &= -15, \\ -301x + 44y + 33z - 31u - 18w &= 571. \end{aligned}$$

Aufgabe 32.24.*

Bestimme die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$2x \geq 7$$

und

$$5x \leq 12$$

über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 32.25. Bestimme die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$4x \geq 3$$

und

$$6x \leq 11$$

über $\mathbb{Q}$.

32.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 32.26. (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrr} x & +y & -z & -w & = & 1 \\ 2x & +5y & -7z & -5w & = & -2 \\ 2x & -y & +z & +3w & = & 4 \\ 5x & +2y & -4z & +2w & = & 6. \end{array}$$

Aufgabe 32.27. (3 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem in den Variablen $x_1, x_2, \dots, x_{10}$, das durch die beiden Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 0$$

und

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 + x_9 - x_{10} = 0$$

gegeben ist.

Aufgabe 32.28. (3 Punkte)

Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 8x + 7y + 6z &= 0 \\ 12x - 9y - 5z &= 0 \\ 7x + 6y - 11z &= 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung $(0, 0, 0)$ besitzt.

Aufgabe 32.29. (4 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x - y + 7z &= 6 \\ 3x + 6y + 3z &= -2 \\ 8x + 8y + 7z &= 3 \end{aligned}$$

mit dem Einsetzungsverfahren.

Aufgabe 32.30. (4 Punkte)

Zeige, dass ein lineares Gleichungssystem

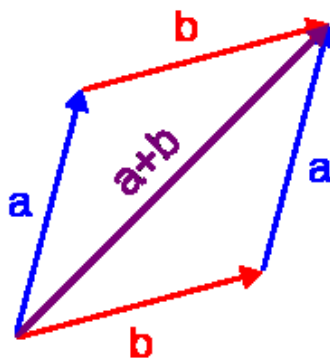
$$ax + by = 0$$

$$cx + dy = 0$$

genau dann nur die triviale Lösung $(0, 0)$ besitzt, wenn $ad - bc \neq 0$ ist.

33. VORLESUNG - ZAHLENRÄUME

33.1. Die Zahlenräume.



Die Addition von zwei Pfeilen a und b , ein typisches Beispiel für Vektoren.

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Produktmenge

$$K^n = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n\text{-mal}} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in K\}$$

mit der komponentenweisen Addition, also

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

und der durch

$$s(x_1, \dots, x_n) = (sx_1, \dots, sx_n)$$

definierten Skalarmultiplikation ein sogenannter *Vektorraum*. Damit ist folgendes gemeint: Die Menge K^n ist mit der Verknüpfung $+$, die man (Vektor)-Addition nennt, eine kommutative Gruppe, und die Operation $K \times K^n \rightarrow K^n$, die man *Skalarmultiplikation* nennt, erfüllt die folgenden Eigenschaften.

- (1) $r(su) = (rs)u$.
- (2) $r(u + v) = ru + rv$.
- (3) $(r + s)u = ru + su$
- (4) $1u = u$.

Diese Eigenschaften lassen sich für den K^n direkt überprüfen.

Man nennt den K^n mit diesen Strukturen den n -dimensionalen *Standardraum* oder (kartesischen) *Zahlenraum*. Insbesondere ist $K^1 = K$ selbst ein Vektorraum. Die Elemente in einem Vektorraum nennt man *Vektoren*, und die Elemente $r \in K$ heißen *Skalare*. Zu

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in K^n$$

nennt man v_i die i -te Koordinate des Vektors. Das Nullelement

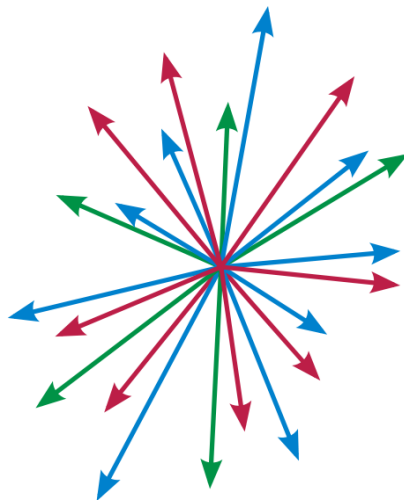
$$0 = (0, \dots, 0) \in K^n$$

wird auch als *Nullvektor* bezeichnet, und zu $v = (v_1, \dots, v_n)$ heißt

$$-v = -(v_1, \dots, v_n) = (-v_1, \dots, -v_n)$$

das *Negative* zu v . Wie in Ringen gilt wieder *Punktrechnung vor Strichrechnung*, d.h. die Skalarmultiplikation bindet stärker als die Vektoraddition.

Den Körper, der im Vektorraumbegriff vorausgesetzt ist, nennt man auch den *Grundkörper*. Alle Begriffe der linearen Algebra beziehen sich auf einen solchen Grundkörper, er darf also nie vergessen werden, auch wenn er manchmal nicht explizit aufgeführt wird. Bei $K = \mathbb{Q}$ spricht man von *rationalen Vektorräumen* und bei $K = \mathbb{R}$ von *reellen Vektorräumen*. Zunächst entwickeln wir aber die algebraische Theorie der Vektorräume über einem beliebigen Körper.



Der Nullraum 0 , der aus dem einzigen Element 0 besteht, ist ebenfalls ein Vektorraum. Man kann ihn auch als $K^0 = 0$ auffassen.

Die Vektoren im Standardraum K^n kann man als Zeilenvektoren

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

oder als Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

schreiben. Der Vektor

$$e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die 1 an der i -ten Stelle steht, heißt i -ter *Standardvektor*.

Definition 33.1. Zu Vektoren $v_1, \dots, v_n$ im K^m und Skalaren $s_1, \dots, s_n \in K$ nennt man

$$\sum_{i=1}^n s_i v_i$$

eine *Linearkombination* dieser Vektoren.

Definition 33.2. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ im K^m heißen ein *Erzeugendensystem* des K^m , wenn man jeden Vektor $w \in K^m$ als eine Linearkombination mit den Vektoren $v_1, \dots, v_n$ schreiben kann, wenn es also Skalare $s_1, \dots, s_n \in K$ mit

$$w = \sum_{i=1}^n s_i v_i$$

gibt.

Man verlangt hier keine Eindeutigkeit, bei einem Erzeugendensystem kann man einen Vektor im Allgemeinen auf verschiedene Arten als Linearkombination darstellen.

Beispiel 33.3. Wir betrachten im $\mathbb{Q}^2$ die drei Vektoren $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ -13 \end{pmatrix}$. Den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann man als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{9}{53} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{53} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \end{pmatrix},$$

aber auch als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \end{pmatrix}$$

schreiben. Besonders deutlich wird das Uneindeutigkeitsphänomen, wenn man den Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ betrachtet. Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \end{pmatrix}$$

die sogenannte *triviale Darstellung* des Nullvektors, aber es ist auch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 115 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + 51 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} + 53 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Lemma 33.4. Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, $\dots$, $v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ Vektoren im K^m . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (1) Die Vektoren bilden ein Erzeugendensystem des K^m .
- (2) Für jeden Standardvektor e_i gibt es eine Darstellung als Linearkombination

$$e_i = \sum s_j v_j.$$

(3) Für jedes $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in K^m$ ist das lineare Gleichungssystem

$$s_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + s_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

lösbar.

Beweis. (1) und (3) sind äquivalent, da (3) lediglich eine ausgeschriebene Version von (1) ist. Die Eigenschaft (2) ist eine Spezialisierung von (1). Die Umkehrung ergibt sich so. Man schreibt

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = w_1 e_1 + \cdots + w_m e_m.$$

Da man nach Voraussetzung die e_i als Linearkombinationen der v_j ausdrücken kann, ergibt sich auch eine Linearkombination von w mit den v_j . $\square$

Wenn die Vektoren die Standardvektoren $e_1, \dots, e_n$ sind, so kann man jeden Vektor wegen

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

unmittelbar und eindeutig als Linearkombination der Standardvektoren darstellen.

Definition 33.5. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ im K^m heißen eine *Basis* des K^m , wenn man jeden Vektor $w \in K^m$ eindeutig als eine Linearkombination mit den Vektoren $v_1, \dots, v_n$ schreiben kann, wenn es also eindeutig bestimmte Skalare $s_1, \dots, s_n \in K$ mit

$$w = \sum_{i=1}^n s_i v_i$$

gibt.

Lemma 33.6. Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ Vektoren im K^m . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (1) Die Vektoren bilden eine Basis des K^m .
- (2) Die Vektoren bilden ein Erzeugendensystem des K^m , und die einzige Darstellung des Nullvektors als Linearkombination der v_j ist die triviale Darstellung

$$0 = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n.$$

(3) Für jedes $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in K^m$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$s_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + s_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung.

Beweis. (1) und (3) sind äquivalent, da (3) lediglich eine ausgeschriebene Version von (1) ist. Die Implikation von (1) nach (2) ist klar, da die eindeutige Darstellbarkeit insbesondere für den Nullvektor gilt. Für die Umkehrung sei

$$w = \sum_{j=1}^n s_j v_j = \sum_{j=1}^n t_j v_j$$

angenommen. Dann ist direkt

$$0 = w - w = \sum_{j=1}^n s_j v_j - \sum_{j=1}^n t_j v_j = \sum_{j=1}^n (s_j - t_j) v_j.$$

Wegen der eindeutigen Darstellbarkeit der 0 muss $s_j - t_j = 0$, also $s_j = t_j$ für alle j sein. $\square$

Es sei bemerkt, dass die Bedingungen im vorstehenden Lemma nur bei $m = n$ erfüllt sein können.

33.2. Der Matrizenkalkül.

Ein lineares Gleichungssystem lässt sich am einfachsten mit Matrizen schreiben. Dies ermöglicht es, die Umformungen, die zur Lösung eines solchen Systems führen, durchzuführen, ohne immer die Variablen mitschleppen zu müssen. Matrizen (und der zugehörige Kalkül) sind recht einfache Objekte; sie können aber ganz unterschiedliche mathematische Objekte beschreiben (eine Familie von Spaltenvektoren, eine Familie von Zeilenvektoren, eine lineare Abbildung, eine Tabelle von Wechselwirkungen, eine zweistellige Relation etc.), die man stets im Hinterkopf haben sollte, um vor Fehlinterpretationen geschützt zu sein.

Definition 33.7. Es sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}_+$. Unter einer $m \times n$ -Matrix über K versteht man ein Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei $a_{ij} \in K$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ ist.

Zu jedem $i \in I = \{1, \dots, m\}$ heißt a_{ij} , $j \in J$, die i -te Zeile der Matrix, was man zumeist als ein *Zeilentupel* (oder einen *Zeilenvektor*)

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

schreibt. Zu jedem $j \in J = \{1, \dots, n\}$ heißt a_{ij} , $i \in I$, die j -te Spalte der Matrix, was man zumeist als ein *Spaltentupel* (oder einen *Spaltenvektor*)

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

schreibt. Die Elemente a_{ij} heißen die *Einträge* der Matrix. Zu a_{ij} heißt i der *Zeilenindex* und j der *Spaltenindex* des Eintrags. Man findet den Eintrag a_{ij} , indem man die i -te Zeile mit der j -ten Spalte kreuzt. Eine Matrix mit $m = n$ nennt man eine *quadratische Matrix*. Eine $m \times 1$ -Matrix ist einfach ein einziges Spaltentupel der Länge m , und eine $1 \times n$ -Matrix ist einfach ein einziges Zeilentupel der Länge n . Die Menge aller Matrizen mit m Zeilen und n Spalten (und mit Einträgen in K) wird mit $\text{Mat}_{m \times n}(K)$ bezeichnet, bei $m = n$ schreibt man $\text{Mat}_n(K)$.

Zwei Matrizen $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ werden addiert, indem man sie komponentenweise addiert. Ebenso ist die Multiplikation einer Matrix A mit einem Element $r \in K$ (einem *Skalar*) komponentenweise definiert, also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

und

$$r \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \dots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \dots & ra_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Matrizenmultiplikation wird folgendermaßen definiert.

Definition 33.8. Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$ -Matrix und B eine $n \times p$ -Matrix über K . Dann ist das *Matrixprodukt*

$$AB$$

diejenige $m \times p$ -Matrix, deren Einträge durch

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$$

gegeben sind.

Eine solche Matrizenmultiplikation ist also nur möglich, wenn die Spaltenanzahl der linken Matrix mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt. Als Merkregel kann man das Schema

$$(ZEILE) \begin{pmatrix} S \\ P \\ A \\ L \\ T \end{pmatrix} = (ZS + EP + IA + L^2 + ET)$$

verwenden, das Ergebnis ist eine 1×1 -Matrix. Die beiden soeben angeführten Matrizen kann man auch in der anderen Reihenfolge multiplizieren (was nicht immer möglich ist) und man erhält

$$\begin{pmatrix} S \\ P \\ A \\ L \\ T \end{pmatrix} (ZEILE) = \begin{pmatrix} SZ & SE & SI & SL & SE \\ PZ & PE & PI & PL & PE \\ AZ & AE & AI & AL & AE \\ LZ & LE & LI & L^2 & LE \\ TZ & TE & TI & TL & TE \end{pmatrix}.$$

Insbesondere kann man eine $m \times n$ -Matrix A mit einem Spaltenvektor der Länge n (von rechts) multiplizieren, und erhält dabei einen Spaltenvektor der Länge m .

Beispiel 33.9. Es ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -52 & 10 \\ -14 & -7 & 27 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 33.10. Wenn man eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ mit einem Spalten-

vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ multipliziert, so erhält man

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit dem *Störvektor*

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \text{ kurz als}$$

$$Ax = c$$

schreiben. Die erlaubten Gleichungsumformungen (siehe die übernächste Vorlesung) durch Manipulationen an den Gleichungen, die die Lösungsmenge nicht ändern, können dann durch die entsprechenden Zeilenumformungen in der Matrix ersetzt werden. Man muss dann die Variablen nicht mitschleppen.

Definition 33.11. Die $n \times n$ -Matrix

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nennt man die *Einheitsmatrix*.

Die Einheitsmatrix E_n besitzt die Eigenschaft $E_n M = M = M E_n$ für eine beliebige $n \times n$ -Matrix M . Sie ist also das neutrale Element bezüglich der Multiplikation von quadratischen Matrizen.

Definition 33.12. Eine $n \times n$ -Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

nennt man *Diagonalmatrix*.

33. ARBEITSBLATT

33.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 33.1. Drücke in $\mathbb{Q}^2$ den Vektor

$$(2, -7)$$

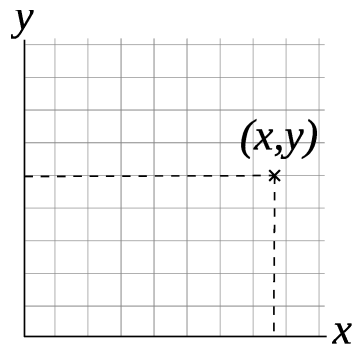
als Linearkombination der Vektoren

$$(5, -3) \text{ und } (-11, 4)$$

aus.

33.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 33.2. Bestimme die (ungefähren) Koordinaten des skizzierten Punktes (eine Kästchenlänge repräsentiere eine Einheit).



Aufgabe 33.3. Markiere die folgenden Punkte in der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$.

$$(3, -7), (-1, -2), (0, 5), (4, 4), (4, 5), (-3, 0), (0, 0).$$

Aufgabe 33.4. Es sei ein Punkt $P = (x, y)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben. Skizziere die Punkte

$$(-x, y), (x, -y), (-x, -y), (3x, 3y), (-2x, -2y).$$

Aufgabe 33.5. Es sei ein Punkt $P = (x, y)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben. Skizziere die Menge aller Punkte

$$(cx, cy), c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 33.6. Markiere zwei Punkte P und Q in der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und addiere sie.

Aufgabe 33.7. Zeige, dass der Zahlenraum K^n zu einem Körper K mit der komponentenweisen Addition und der Skalarmultiplikation die Eigenschaften

- (1) $r(su) = (rs)u$,
- (2) $r(u + v) = ru + rv$,
- (3) $(r + s)u = ru + su$,
- (4) $1u = u$,

erfüllt.

Aufgabe 33.8. Im Rahmen einer Werbeaktion verkauft ein Baumarkt Schraubensets, die jeweils große, mittlere und kleine Schrauben enthalten. Set A enthält 10 große, 10 mittlere und 5 kleine Schrauben, Set B enthält 15 große, 5 mittlere und 20 kleine Schrauben, Set C enthält 8 große, 12 mittlere und 6 kleine Schrauben. Da das Angebot sehr günstig ist, läuft der Verkauf hervorragend. Allerdings gibt es kaum jemand, der genau eines der vorgegebenen Sets brauchen kann, daher entwickelt sich auf dem Parkplatz eine rege Tauschbörse für Schrauben. Lässt sich jeder Schraubenwunsch mit den gegebenen Sets exakt erfüllen?

Aufgabe 33.9. Finde für die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{Q}^2$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Aufgabe 33.10. Finde für die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{Q}^3$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Aufgabe 33.11. Es sei K ein Körper und K^n der n -dimensionale Zahlenraum. Es sei $v_i, i \in I$, eine Familie von Vektoren im K^n und $w \in K^n$ ein weiterer Vektor. Es sei vorausgesetzt, dass die Familie

$$w, v_i, i \in I,$$

ein Erzeugendensystem von K^n ist und dass sich w als Linearkombination der $v_i, i \in I$, darstellen lässt. Zeige, dass dann schon $v_i, i \in I$, ein Erzeugendensystem von K^n ist.

Aufgabe 33.12. Zeige, dass im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 33.13. Bestimme, ob im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 33.14. Es sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass der Matrizenraum $\text{Mat}_{m \times n}(K)$ in natürlicher Weise ein Vektorraum ist.

Aufgabe 33.15.*

Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 8 & 3 & 1 & 0 & -5 \\ 6 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33.16. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} Z & E & I & L & E \\ R & E & I & H & E \\ H & O & R & I & Z \\ O & N & T & A & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & I \\ P & V & K \\ A & E & A \\ L & R & A \\ T & T & L \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33.17.*

Zeige, dass die Matrizenmultiplikation von quadratischen Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

Aufgabe 33.18. Bestimme das Matrizenprodukt

$$e_i \circ e_j,$$

wobei links der i -te Standardvektor (der Länge n) als Zeilenvektor und rechts der j -te Standardvektor (ebenfalls der Länge n) als Spaltenvektor aufgefasst wird.

Aufgabe 33.19. Es sei M eine $m \times n$ -Matrix. Zeige, dass das Matrizenprodukt Me_j mit dem j -ten Standardvektor (als Spaltenvektor aufgefasst) die j -te Spalte von M ergibt. Was ist $e_i M$, wobei e_i der i -te Standardvektor (als Zeilenvektor aufgefasst) ist?

Zu einer quadratischen Matrix M bezeichnet man mit M^n die n -fache Verknüpfung (Matrizenmultiplikation) mit sich selbst. Man spricht dann auch von n -ten *Potenzen* der Matrix.

Aufgabe 33.20. Berechne zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Potenzen

$$M^i, i = 1, \dots, 4.$$

Aufgabe 33.21. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und M eine $n \times n$ -Matrix. Beschreibe DM und MD .

Aufgabe 33.22. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ein n -Tupel über einem Körper K ,

und es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Variablentupel. Welche Besonderheiten erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$Dx = c,$$

und wie löst man es?

33.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 33.23. (2 Punkte)

Drücke in $\mathbb{Q}^2$ den Vektor

$$(5, -8)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(6, -4) \text{ und } (-3, 7)$$

aus.

Aufgabe 33.24. (3 Punkte)

Finde für die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{Q}^3$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Aufgabe 33.25. (4 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über einem Körper K . Zeige, dass die vierte Potenz von M gleich 0 ist, also

$$M^4 = M M M M = 0.$$

Für die folgende Aussage wird sich bald ein einfacher Beweis über die Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen ergeben.

Aufgabe 33.26. (4 Punkte)

Zeige, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist.

Genauer: Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$ -Matrix, B eine $n \times p$ -Matrix und C eine $p \times r$ -Matrix über K . Zeige, dass $(AB)C = A(BC)$ ist.

Aufgabe 33.27. (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Finde und beweise eine Formel für die n -te Potenz der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33.28. (2 Punkte)

Finde neben den beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ weitere Matrizen M mit der Eigenschaft $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

34. VORLESUNG - GERADE, EBENE, RAUM

34.1. Untervektorräume.

Definition 34.1. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $U \subseteq K^n$ heißt *Untervektorraum*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.

- (1) $0 \in U$.
- (2) Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
- (3) Mit $u \in U$ und $s \in K$ ist auch $su \in U$.

Eine Familie von Vektoren $v_1, \dots, v_k \in U$ heißt wieder ein *Erzeugendensystem* von U , wenn man jeden Vektor aus U als eine Linearkombination $u = \sum_{i=1}^k s_i v_i$ schreiben kann, und eine *Basis* von U , wenn darüber hinaus diese Darstellung eindeutig ist. Mit einem Erzeugendensystem kann man einen Untervektorraum U in der Form

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^k s_i v_i \mid s_i \in K \right\}$$

beschreiben. Umgekehrt definiert dabei die rechte Seite stets einen Untervektorraum, der der von den Vektoren $v_1, \dots, v_k$ erzeugte Untervektorraum heißt. Er wird mit $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ bezeichnet.

Lemma 34.2. Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K . Dann ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

Beweis. Siehe Aufgabe 34.9. □

Für einen Untervektorraum $U \subseteq K^n$ gibt es grundsätzlich zwei Beschreibungsmöglichkeiten: Als Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems und als ein von Vektoren erzeugter Untervektorraum. Durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems wird die zuerst genannte Darstellungsmöglichkeit in die zweite Darstellungsmöglichkeit umgewandelt.

Bemerkung 34.3. Man nennt zu einem homogenen linearen Gleichungssystem Lösungen $v_1, \dots, v_k$ *Basislösungen*, wenn man jede Lösung eindeutig als Linearkombination dieser Basislösungen darstellen kann. Wenn ein solches System in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ gegeben ist, und wenn man die freien Variablen $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ identifiziert hat, so erhält man Basislösungen, wenn man diese freien Variablen an einer Stelle mit 1 und sonst mit 0 belegt und die anderen Einträge der abhängigen Variablen jeweils ausrechnet.

Definition 34.4. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Eine Teilmenge $S \subseteq K^n$ heißt (affiner) *Unterraum*, wenn (S leer ist oder) es einen Untervektorraum $U \subseteq K^n$ und einen Punkt $P \in K^n$ mit

$$S = P + U = \{P + v \mid v \in U\}$$

gibt.

Statt von einem Unterraum spricht man auch von einem *affinen Unterraum*. Der Punkt P heißt ein *Aufpunkt* des Raumes und U heißt der zugehörige Untervektorraum. Ein Unterraum ist ein in eine bestimmte Richtung parallel verschobener Untervektorraum, wobei der Aufpunkt den Verschiebungsvektor bezeichnet.

Lemma 34.5. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über K . Dann ist die Menge S aller Lösungen des Gleichungssystems ein (affiner) Unterraum des K^n . Dabei kann man jede Lösung $P \in S$ als Aufpunkt nehmen, und der zugehörige Untervektorraum ist der Lösungsraum zum zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystem.

Beweis. Sei die Lösungsmenge S nicht leer und sei $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in S$ ein belie-

big gewählter Punkt. Es sei U der Lösungsraum zum zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystem, der nach Lemma 34.2 ein Untervektorraum von K^n ist. Wir müssen die Mengengleichheit $S = P + U$ zeigen. Wenn

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in U$ ist, so bedeutet dies

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j = 0$$

für alle $i = 1, \dots, m$. Für $P + v = \begin{pmatrix} p_1 + v_1 \\ \vdots \\ p_n + v_n \end{pmatrix}$ ist dann

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (p_j + v_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = c + 0 = c,$$

also ist dieser Punkt eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems und

somit ist $P + v \in S$. Wenn umgekehrt $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \in S$ eine Lösung ist, so ist

$$Q - P = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$

und diese Differenz erfüllt

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (q_j - p_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j - \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j = c - c = 0.$$

Also ist $Q - P \in U$ und somit $Q = P + (Q - P) \in P + U$. $\square$

Wenn man also die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems beschreiben möchte, so nimmt man eine spezielle Lösung als Aufpunkt und eine Basis des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

Der leere Raum und jeder einzelne Punkt ist für sich ein affiner Unterraum. Richtig interessant wird es mit Geraden.

Definition 34.6. Unter einer *Geraden (in Punktvektorform)* versteht man einen affinen Unterraum $G \subseteq K^n$ der Form

$$G = P + Kv = \{P + sv \mid s \in K\}$$

mit einem von 0 verschiedenen Vektor $v \in K^n$ und einem Aufpunkt $P \in K^n$.

Man spricht auch von der *Punktrichtungsform* oder der Parameterdarstellung der Geraden, wobei das s als Parameter bezeichnet wird. Für eine Gerade gibt es stets die bijektive Abbildung

$$K \longrightarrow G, s \longmapsto P + sv,$$

die auch eine *Parametrisierung* der Geraden heißt.

34.2. Geraden in der Ebene.

Wir besprechen die vorstehenden Begriffe und Aussagen in niedrigen Dimensionen.

Wir betrachten Geraden in der Ebene K^2 . Unter der *Gleichungsform* einer Geraden in der Ebene versteht man eine lineare Gleichung der Form

$$ax + by = c$$

mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Es ist einfach, aus der Gleichungsform eine Punktrichtungsform zu erhalten.

Korollar 34.7. *Es sei K ein Körper und sei*

$$ax + by = c$$

eine lineare Gleichung in zwei Variablen über K mit $(a, b) \neq 0$. Dann ist die Lösungsmenge eine Gerade in K^2 . Als Richtungsvektor kann man den Vektor $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ nehmen.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 34.5, da $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ eine Basislösung der zugehörigen homogenen linearen Gleichung $ax + by = 0$ ist. $\square$



Korollar 34.8. *Es seien im K^2 zwei Geraden G und H in Gleichungsform durch*

$$ax + by = c$$

bzw.

$$rx + sy = d$$

(mit $(a, b) \neq (0, 0)$ und $(r, s) \neq (0, 0)$) gegeben. Dann ist der Durchschnitt $G \cap H$ der beiden Geraden die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems, das aus diesen beiden Gleichungen besteht. Dabei gibt es die drei Möglichkeiten:

- (1) *Es ist $G = H$.*
- (2) *Es ist $G \cap H = \emptyset$.*
- (3) *Der Durchschnitt besteht aus einem einzigen Punkt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 34.19. $\square$

Im zweiten Fall (manchmal auch im ersten Fall) spricht man von *parallelen Geraden*. Der dritte Fall tritt genau dann ein, wenn zwischen (a, b) und (r, s) keine Vielfachheitsbeziehung besteht.

Beispiel 34.9. Wir berechnen zu den durch

$$4x - 7y = 13$$

bzw.

$$5x - 8y = -9$$

gegebenen Geraden den Durchschnitt. Wenn man von der zweiten Gleichung das $\frac{5}{4}$ -fache der ersten Gleichung abzieht, so erhält man

$$\left(-8 + \frac{5}{4} \cdot 7\right)y = -9 - \frac{5}{4} \cdot 13,$$

also

$$\frac{3}{4}y = -\frac{101}{4}$$

und somit

$$y = -\frac{101}{3}$$

und

$$x = -\frac{167}{3}.$$

Der Durchschnitt besteht also aus einem einzigen Schnittpunkt mit den Koordinaten $\left(-\frac{167}{3}, -\frac{101}{3}\right)$.

34.3. Geraden und Ebenen im Raum.

Definition 34.10. Unter einer *Ebene* (in Punktvektorform oder Parameterform) versteht man einen affinen Unterraum $E \subseteq K^n$ der Form

$$E = P + Kv + Kw = \{P + sv + tw \mid s, t \in K\}$$

mit zwei Vektoren $v, w \in K^n$, die kein Vielfaches voneinander⁷ sind, und einem Aufpunkt $P \in K^n$.

Dabei heißen hier die Zahlen s, t die Parameter. Für eine Ebene gibt es stets die bijektive Abbildung

$$K^2 \longrightarrow G, (s, t) \longmapsto P + sv + tw,$$

die auch eine *Parametrisierung* der Ebene heißt. Die Bijektivität beruht dabei darauf, dass keine Vielfachheitsbeziehung zwischen den Richtungsvektoren v und w besteht.

Lemma 34.11. *Es sei K ein Körper und sei*

$$ax + by + cz = d$$

⁷D.h. dass weder v noch w der Nullvektor ist und dass der eine Vektor nicht ein Vielfaches des anderen Vektors ist.

eine lineare Gleichung in drei Variablen über K mit $(a, b, c) \neq 0$. Dann ist die Lösungsmenge eine Ebene im K^3 . Wenn $a \neq 0$ ist, so kann man als Richtungsvektoren die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ nehmen.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 34.5 und daraus, dass die beiden angegebenen Vektoren offenbar Lösungen der zugehörigen homogenen linearen Gleichung sind, die wegen $a \neq 0$ kein Vielfaches voneinander sind. Man kann auch jede Lösung als Linearkombination dieser beiden Lösungen schreiben, es ist nämlich

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{y}{a} \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{z}{a} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}.$$

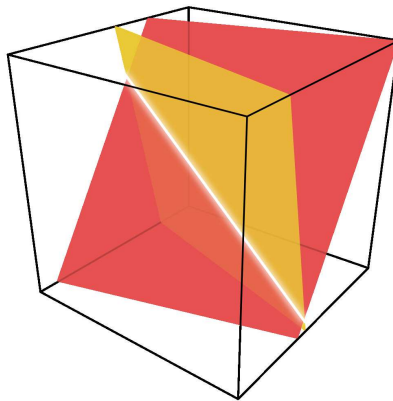
Also handelt es sich um Basislösungen. □

Beispiel 34.12. Wir betrachten die Menge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid 5x - y + 3z = 0 \right\}.$$

Nach Lemma 34.11 hat diese Ebene in Punkttrichtungsform die Beschreibung

$$E = \left\{ r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{Q} \right\}.$$



Zwei Ebenen im Raum, die sich in einer Geraden schneiden.

Beispiel 34.13. Wir betrachten die beiden Mengen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid 5x - y + 3z = 0 \right\}$$

(aus Beispiel 34.12) und

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid 4x + 2y - 7z = 0 \right\}$$

und interessieren uns für den Durchschnitt

$$G := E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid 5x - y + 3z = 0 \text{ und } 4x + 2y - 7z = 0 \right\}.$$

Ein Punkt liegt genau dann im Durchschnitt, wenn er simultan beide Bedingungen, also beide Gleichungen (nennen wir sie I und II), erfüllt, es geht also um die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 5x - y + 3z &= 0 \\ 4x + 2y - 7z &= 0. \end{aligned}$$

Mit dem Eliminationsverfahren erhält man die Gleichung

$$4I - 5II = -14y + 47z = 0.$$

Daher ist

$$y = \frac{47}{14}z$$

und

$$x = \frac{1}{5}y - \frac{3}{5}z = \frac{1}{5} \cdot \frac{47}{14}z - \frac{3}{5}z = \frac{47}{70}z - \frac{42}{70}z = \frac{1}{14}z$$

sein. Somit ist

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{14}z \\ \frac{47}{14}z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir besprechen ein geometrisches Beispiel ähnlich zu Beispiel 34.13, wobei jetzt die Gleichungen nicht homogen sein müssen.

Beispiel 34.14. Im $\mathbb{R}^3$ seien zwei Ebenen

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 2y - 3z = 5\}$$

und

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 5y + 2z = 1\}$$

gegeben. Wie kann man die Schnittgerade $G = E \cap F$ beschreiben? Ein Punkt $P = (x, y, z)$ liegt genau dann auf der Schnittgerade, wenn er die beiden *Ebenengleichungen* erfüllt; es muss also sowohl

$$4x - 2y - 3z = 5 \text{ als auch } 3x - 5y + 2z = 1$$

gelten. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 3 und ziehen davon das 4-fache der zweiten Gleichung ab und erhalten

$$14y - 17z = 11.$$

Wenn man $y = 0$ setzt, so muss $z = -\frac{11}{17}$ und $x = \frac{13}{17}$ sein. D.h. der Punkt $P = (\frac{13}{17}, 0, -\frac{11}{17})$ gehört zu G . Ebenso findet man, indem man $z = 0$ setzt, den Punkt $Q = (\frac{23}{14}, \frac{11}{14}, 0)$. Damit ist die Schnittgerade die Verbindungsgerade dieser Punkte, also

$$G = \left\{ \left(\frac{13}{17}, 0, -\frac{11}{17} \right) + t \left(\frac{209}{238}, \frac{11}{14}, \frac{11}{17} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

34. ARBEITSBLATT

34.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 34.1. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$2x - 5y - 3z = 0.$$

34.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 34.2. Zeige, dass ein Körper K , aufgefasst als Vektorraum, nur zwei Untervektorräume besitzt, nämlich den Nullraum 0 und sich selbst.

Aufgabe 34.3. Bestimme, ob die folgenden Teilmengen $T = \mathbb{Q}^2$ Untervektorräume sind.

- (1) $\{0\}$,
- (2) $\mathbb{Q}_{\geq 0} \times \mathbb{Q}_{\geq 0}$,
- (3) Der Graph der linearen Funktion $y = 7x$,
- (4) Das Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$,
- (5) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- (6) Die Vereinigung aus der x -Achse und der y -Achse (das *Achsenkreuz*),
- (7) $\mathbb{Q} \times 0$,
- (8) Die Lösungsmenge zur linearen Gleichung $4x - 9y = 11$.

Aufgabe 34.4. Beschreibe sämtliche Untervektorräume des $\mathbb{Q}^2$.

Aufgabe 34.5.*

Zu je zwei Punkten in der Produktmenge $\mathbb{Q}^2$ gibt es eine Verbindungsgerade und einen Mittelpunkt, der die Verbindungsstrecke halbiert.

- (1) Man gebe zu zwei Punkten (a_1, a_2) und (b_1, b_2) die Koordinaten des Mittelpunktes an.

- (2) Es seien in der Produktmenge $\mathbb{Z}^2$ fünf Punkte gegeben (jeder Punkt habe also ganzzahlige Koordinaten). Zeige, dass mindestens einer der Mittelpunkte ganzzahlige Koordinaten haben muss.
- (3) Gilt die Eigenschaft aus (2) auch bei vier Punkten?

Aufgabe 34.6. Zeige, dass ein Untervektorraum $U \subseteq K^n$ insbesondere eine Untergruppe des K^n ist.

Aufgabe 34.7. Es seien $v_1, \dots, v_k \in K^n$ Vektoren und sei

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^k s_i v_i \mid s_i \in K \right\}.$$

Zeige, dass U ein Untervektorraum des K^n ist.

Aufgabe 34.8. Wir betrachten im $\mathbb{Q}^3$ die Untervektorräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeige $U = W$.

Aufgabe 34.9.*

Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K . Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe 34.10. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$3x + 4y - 2z + 5w = 0.$$

Aufgabe 34.11. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$-2x + 3y - z + 4w = 0 \text{ und } 3z - 2w = 0.$$

Aufgabe 34.12. Im K^n seien zwei Vektoren u, v gegeben und es sei $U = \langle u, v \rangle \subseteq K^n$ der von den beiden Vektoren erzeugte Untervektorraum. Zeige, dass die Vektoren u, v genau dann eine Basis von U bilden, wenn weder u ein Vielfaches von v noch v ein Vielfaches von u ist.

Aufgabe 34.13. Es seien $U_1, \dots, U_r \subseteq K^n$ Untervektorräume. Zeige, dass der Durchschnitt $U_1 \cap \dots \cap U_r$ ebenfalls ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 34.14. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x - 6y - 5z &= 0 \\ x + 7y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 34.15. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$c = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

- (1) Bestimme eine Basis des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems $Mv = 0$.
- (2) Beschreibe die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Mv = c$ mit einem Aufpunkt und mit der Basis aus dem ersten Teil.

Aufgabe 34.16.*

Bestimme die Punktrichtungsform für die durch die Gleichung

$$4x + 7y = 3$$

im $\mathbb{Q}^2$ gegebene Gerade.

Aufgabe 34.17. Bestimme die Punktrichtungsform für die durch die Gleichung

$$-7x + 5y = -4$$

im $\mathbb{Q}^2$ gegebene Gerade.

Aufgabe 34.18.*

Erstelle eine Geradengleichung für die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(2, 3)$ und $(5, -7)$ verläuft.

Aufgabe 34.19. Es seien im K^2 zwei Geraden G und H in Gleichungsform durch

$$ax + by = c$$

bzw.

$$rx + sy = d$$

gegeben. Zeige, dass der Durchschnitt $G \cap H$ der beiden Geraden die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist, das aus beiden Gleichungen besteht. Zeige ferner, dass es hierbei die drei Möglichkeiten gibt:

- (1) Es ist $G = H$.
- (2) Es ist $G \cap H = \emptyset$.
- (3) Der Durchschnitt besteht aus einem einzigen Punkt.

Aufgabe 34.20. Es sei ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in zwei Variablen über $\mathbb{Q}$ gegeben. Die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen seien Geraden. Skizziere die drei Möglichkeiten, wie die Lösungsmenge des Systems aussehen kann.

Aufgabe 34.21.*

- (1) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in genau drei Punkten schneiden.
- (2) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich in keinem Punkt schneiden.
- (3) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich in einem Punkt schneiden.
- (4) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in sechs Punkten schneiden.

Vorlage:Inputaufga

Aufgabe 34.22.*

Es seien n Geraden in der Ebene gegeben. Formuliere und beweise eine Formel (in Abhängigkeit von n) für die maximale Anzahl von Schnittpunkten der Geraden.

Aufgabe 34.23. Wir betrachten die beiden Mengen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 2y - 6z = 0 \right\}$$

und

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 7x - 5y - 4z = 0 \right\}.$$

Finde eine Beschreibung für den Durchschnitt

$$G := E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 2y - 6z = 0 \text{ und } 7x - 5y - 4z = 0 \right\}$$

wie in Beispiel 34.13.

Aufgabe 34.24.*

Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Untervektorräume

$$U = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$V = \left\{ p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U \cap V$.

Aufgabe 34.25.*

Wir betrachten die drei Ebenen E, F, G , die durch die folgenden Gleichungen im $\mathbb{Q}^3$ beschrieben werden.

(1)

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 5x - 4y + 3z = 2\},$$

(2)

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 7x - 5y + 6z = 3\},$$

(3)

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 2x - y + 4z = 5\}.$$

Bestimme sämtliche Punkte $E \cap F \setminus E \cap F \cap G$.

Aufgabe 34.26. Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1, 0, 0), (0, 1, 2) \text{ und } (2, 3, 4)$$

liegen.

Aufgabe 34.27. Erstelle ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsraum die Gerade $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 34.28. Es sei K ein Körper. Man finde ein lineares Gleichungssystem in drei Variablen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

Aufgabe 34.29. Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

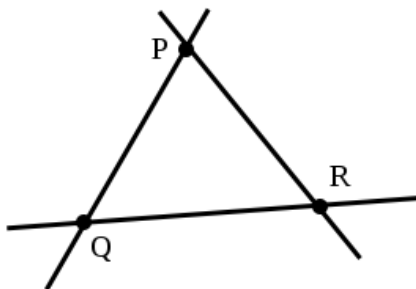
$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y &\geq 0, \\ x + y &\leq 1, \end{aligned}$$

gegeben. Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

Aufgabe 34.30. Es sei

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\geq c_1, \\ a_2x + b_2y &\geq c_2, \\ a_3x + b_3y &\geq c_3, \end{aligned}$$

ein lineares Ungleichungssystem, dessen Lösungsmenge ein Dreieck sei. Wie sieht die Lösungsmenge aus, wenn man in jeder Ungleichung $\geq$ durch $\leq$ ersetzt?



34.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 34.31. (4 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{Q}^4$ die Untervektorräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeige $U = W$.

Aufgabe 34.32. (4 (2+2) Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 8 \\ 5 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

und

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

- (1) Bestimme eine Basis des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems $Mv = 0$.
- (2) Beschreibe die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Mv = c$ mit einem Aufpunkt und mit der Basis aus dem ersten Teil.

Aufgabe 34.33. (2 Punkte)

Bestimme die Punkttrichtungsform für die durch die Gleichung

$$-2x + 9y = 5$$

im $\mathbb{Q}^2$ gegebene Gerade.

Aufgabe 34.34. (3 Punkte)

Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die beiden Ebenen

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 4y + 5z = 2\} \quad \text{und} \\ F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = -1\}.$$

Bestimme die Schnittgerade $E \cap F$.

Aufgabe 34.35. (3 Punkte)

Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1, 0, 2), (4, -3, 2) \quad \text{und} \quad (2, 1, -1)$$

liegen.

Aufgabe 34.36. (4 (2+2) Punkte)

Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

$$x \geq 0,$$

$$y + x \geq 0,$$

$$-1 - y \leq -x,$$

$$5y - 2x \geq 3,$$

gegeben.

- a) Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.
- b) Bestimme die Eckpunkte der Lösungsmenge.

35. VORLESUNG - LINEARE ABBILDUNGEN

Man gibt seine Kinder auf die Schule, daß sie still werden, auf die Hochschule, daß sie laut werden.

Jean Paul (1763-1825)

35.1. Lineare Abbildungen.

Eine lineare Funktion über einem Körper K ist einfach eine Abbildung der Form

$$K \longrightarrow K, x \longmapsto cx,$$

mit einer Konstanten c (einem Proportionalitätsfaktor), die bei einem angeordneten Körper den Anstieg des Graphen beschreibt. Ein einzelnes Element c kann man als eine 1×1 -Matrix auffassen. Wir dehnen das lineare Konzept auf Abbildungen zwischen Standardräumen aus und wir werden sehen, dass diese durch Matrizen beschrieben werden können.

Definition 35.1. Es sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung

$$\varphi: K^n \longrightarrow K^m$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

- (1) $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in K^n$.
- (2) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in K^n$.

Beispiel 35.2. Es stehen n verschiedene Produkte zum Verkauf, wobei das i -te Produkt (pro Einheit) a_i kostet. Ein Einkauf wird durch das n -Tupel

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

repräsentiert, wobei x_i die vom i -ten Produkt gekaufte Menge angibt. Der Preis des Einkaufs wird dann durch $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ beschrieben. Die Preisabbildung

$$\varphi: \mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

ist linear. Dies beruht auf

$$\varphi(x + y) = \sum_{i=1}^n a_i (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_i y_i = \varphi(x) + \varphi(y)$$

und

$$\varphi(sx) = \sum_{i=1}^n a_i s x_i = s \sum_{i=1}^n a_i x_i = s\varphi(x).$$

Inhaltlich bedeutet dies beispielsweise, dass wenn man zuerst den Einkauf $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tätigt und eine Woche später den Einkauf $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, dass dann der Preis der beiden Einkäufe zusammen dem Preis entspricht, den man bezahlt hätte, wenn man auf einen Schlag

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

gekauft hätte.

Beispiel 35.3. Es sei K ein Körper und sei K^n der n -dimensionale Standardraum. Dann ist die i -te *Projektion*, also die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K, (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \longmapsto x_i,$$

eine K -lineare Abbildung. Dies folgt unmittelbar aus der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation auf dem Standardraum. Die i -te Projektion heißt auch die i -te *Koordinatenfunktion*.

Die beiden folgenden Beispiele entstammen der elementaren Geometrie.



Eine *Achsenspiegelung* an einer Achse.

Beispiel 35.4. Die Abbildung

$$K^2 \longrightarrow K^2, (x, y) \longmapsto (-x, y),$$

ist linear und beschreibt die *Achsenspiegelung* an der y -Achse.

Beispiel 35.5. Die Abbildung

$$K^2 \longrightarrow K^2, (x, y) \longmapsto (-x, -y),$$

ist linear und beschreibt die *Punktspiegelung* am Nullpunkt.

Lemma 35.6. *Es sei K ein Körper und sei $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ eine lineare Abbildung. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- (1) *Es ist $\varphi(0) = 0$.*
- (2) *Für jede Linearkombination $\sum_{i=1}^k s_i v_i$ in K^n gilt*

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^k s_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k s_i \varphi(v_i).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 35.7. □

Lemma 35.7. *Es sei K ein Körper und seien $\psi: K^p \rightarrow K^n$ und $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ lineare Abbildungen. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- (1) *Die Hintereinanderschaltung*

$$\varphi \circ \psi: K^p \longrightarrow K^m$$

ist ebenfalls linear.

(2) Wenn φ bijektiv ist, so ist auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}: K^m \longrightarrow K^n$$

linear.

Beweis. Siehe Aufgabe 35.8. □

Nach Lemma 35.6 wird unter einer linearen Abbildung die 0 auf die 0 abgebildet. Die Menge aller Vektoren, die unter einer linearen Abbildung auf 0 abgebildet werden, ist für die Abbildung charakteristisch und bekommt einen eigenen Namen.

Definition 35.8. Zu einer linearen Abbildung $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ heißt

$$\text{kern } \varphi = \{x \in K^n \mid \varphi(x) = 0\}$$

der *Kern* von φ .

Der Kern ist einfach das Urbild des Nullvektors und wird auch mit $\varphi^{-1}(0)$ bezeichnet. Er ist ein Untervektorraum des K^n , siehe Aufgabe 35.29.

Lemma 35.9. Es sei K ein Körper und sei

$$\varphi: K^n \longrightarrow K^m$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn $\text{kern } \varphi = 0$ ist.

Beweis. Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in K^n$ keinen anderen Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = 0$. Sei umgekehrt $\text{kern } \varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \text{kern } \varphi$ und damit $v_1 = v_2$. □

So, wie eine lineare Funktion $\varphi: K \rightarrow K$ durch den Wert an einer einzigen Stelle $\neq 0$ festgelegt ist, was die Grundlage für Dreisatzaufgaben ist, sind lineare Abbildungen $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ durch die Werte auf einer Basis des K^n festgelegt. Der folgende Satz beweist dies für die Standardbasis, siehe Aufgabe 35.20 für den allgemeinen Fall. Für entsprechende „Mehrsatzaufgaben“ siehe u. A. Aufgabe 35.1, Aufgabe 35.3 und Aufgabe 35.28.

Satz 35.10. Es sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Es seien $w_i, i = 1, \dots, n$, Elemente in K^m . Dann gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\varphi: K^n \longrightarrow K^m$$

mit

$$\varphi(e_i) = w_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n,$$

wobei e_i den i -ten Standardvektor bezeichnet.

Beweis. Da $\varphi(e_i) = w_i$ sein soll und eine lineare Abbildung nach Lemma 35.6 (2) für jede Linearkombination die Eigenschaft

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n s_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n s_i \varphi(e_i)$$

erfüllt, und jeder Vektor $v \in K^n$ sich als eine solche Linearkombination schreiben lässt, kann es maximal nur eine solche lineare Abbildung geben. Wir definieren nun umgekehrt eine Abbildung

$$\varphi: K^n \longrightarrow K^m,$$

indem wir jeden Vektor $v \in K^n$ mit der gegebenen Standardbasis als

$$v = \sum_{i=1}^n s_i e_i$$

schreiben und

$$\varphi(v) := \sum_{i=1}^n s_i w_i$$

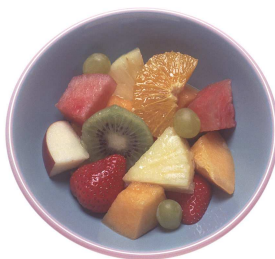
ansetzen. Da die Darstellung von v als eine solche Linearkombination eindeutig ist, ist diese Abbildung wohldefiniert. Zur Linearität. Für zwei Vektoren $u = \sum_{i=1}^n s_i e_i$ und $v = \sum_{i=1}^n t_i e_i$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(u+v) &= \varphi\left(\left(\sum_{i=1}^n s_i e_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n t_i e_i\right)\right) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n (s_i + t_i) e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (s_i + t_i) \varphi(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n s_i \varphi(e_i) + \sum_{i=1}^n t_i \varphi(e_i) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n s_i e_i\right) + \varphi\left(\sum_{i=1}^n t_i e_i\right) \\ &= \varphi(u) + \varphi(v). \end{aligned}$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation ergibt sich ähnlich, siehe Aufgabe 35.19. $\square$

35.2. Lineare Abbildungen und Matrizen.

Beispiel 35.11. Ein gesundes Frühstück beginnt mit einem Obstsalat. Die folgende Tabelle zeigt, wie viel Vitamin C, Calcium und Magnesium (jeweils in Milligramm) unterschiedliche Früchte (pro 100 Gramm) besitzen.



Frucht	Vitamin C	Calcium	Magnesium
Apfel	12	7	6
Orange	53	40	10
Traube	4	12	8
Banane	9	5	27

Dies führt zu einer Abbildung, die einem 4-Tupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, das die verarbeiteten (oder verzehrten) Früchte beschreibt, den Gesamtgehalt des Obstsalats an Vitamin C, Calcium und Magnesium in Form eines 3-Tupels $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ zuordnet.

Diese Abbildung kann mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 12 & 53 & 4 & 9 \\ 7 & 40 & 12 & 5 \\ 6 & 10 & 8 & 27 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Matrixmultiplikation als Zuordnung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 12 & 53 & 4 & 9 \\ 7 & 40 & 12 & 5 \\ 6 & 10 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1 + 53x_2 + 4x_3 + 9x_4 \\ 7x_1 + 40x_2 + 12x_3 + 5x_4 \\ 6x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 27x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

Beispiel 35.12. Zu jedem Geburtstag von Mustafa Müller backt seine Oma eine gewisse Anzahl (abhängig von den Wünschen der Gäste) an Himbeerkuchen, Käsekuchen und Apfelkuchen. Ein Himbeerkuchen benötigt 500 Gramm Mehl, 200 Gramm Zucker, 100 Gramm Butter, 250 Gramm Milch und 300 Gramm Himbeeren. Ein Käsekuchen benötigt 300 Gramm Mehl, 230 Gramm Zucker, 100 Gramm Butter, 100 Gramm Milch und 450 Gramm Quark. Ein Apfelkuchen benötigt 400 Gramm Mehl, 250 Gramm Zucker, 150 Gramm Butter, 200 Gramm Milch, 500 Gramm Äpfel und 100

Gramm Haselnüsse. Die Oma möchte aus der Anzahl der zu backenden Kuchen, repräsentiert durch ein Dreiertupel (x, y, z) , die insgesamt benötigten Zutaten schematisch berechnen. Für das benötigte Mehl (in Kilogramm) gilt beispielsweise die Formel

$$0,5x + 0,3y + 0,4z.$$

Insgesamt wird der benötigte Einkauf durch die folgende lineare Abbildung (bzw. die Matrix) beschrieben (wobei die Angaben in Kilogramm und die Zutatenreihenfolge Mehl, Zucker, Butter, Milch, Himbeeren, Quark, Äpfel und Haselnüsse sind).

$$\mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^8, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,23 & 0,25 \\ 0,1 & 0,1 & 0,15 \\ 0,25 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,45 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Definition 35.13. Es sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi: K^n \longrightarrow K^m$$

heißt die $m \times n$ -Matrix

$$M = (a_{ij})_{ij},$$

wobei a_{ij} die i -te Koordinate von $\varphi(e_j)$ bezüglich der Standardbasis e_i des K^m ist, die *beschreibende Matrix* zu φ (bezüglich der Standardbasen).

Zu einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ heißt die durch

$$e_j \longmapsto \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i$$

gemäß Satz 35.10 definierte lineare Abbildung die *durch M festgelegte lineare Abbildung*.

Die zu einer $m \times n$ -Matrix M gehörende lineare Abbildung ist unmittelbar durch das Matrizenprodukt der Matrix mit den n -Spaltentupeln gegeben, also gleich

$$K^n \longrightarrow K^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Die i -te Komponente des Ergebnisses ist ja einfach gleich $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$.

Satz 35.14. Es sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann sind die in Definition 35.13 festgelegten Abbildungen zwischen linearen Abbildungen und Matrizen invers zueinander.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. $\square$

Die folgende Aussage erklärt, warum das Matrizenprodukt so wichtig ist.

Satz 35.15. *Es sei B eine $n \times p$ -Matrix und A eine $m \times n$ -Matrix und es seien*

$$K^p \xrightarrow{B} K^n \xrightarrow{A} K^m$$

die zugehörigen linearen Abbildungen. Dann beschreibt das Matrixprodukt $A \circ B$ die Hintereinanderschaltung der beiden linearen Abbildungen.

Beweis. Die Gleichheit von linearen Abbildungen kann man auf der Standardbasis $e_1, \dots, e_p$ des K^p nachweisen. Es ist

$$\begin{aligned} (A \circ B)(e_k) &= A(B(e_k)) \\ &= A\left(\sum_{j=1}^n b_{jk} e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n b_{jk} \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}\right) e_i \\ &= \sum_{i=1}^m c_{ik} e_i. \end{aligned}$$

Dabei sind die Koeffizienten

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

gerade die Einträge in der Produktmatrix $A \circ B$. $\square$

Für die Beziehung zwischen linearen Abbildungen, Matrizen und linearen Gleichungssystemen siehe Aufgabe 35.16 und Aufgabe 35.17.

35. ARBEITSBLATT

35.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 35.1. Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

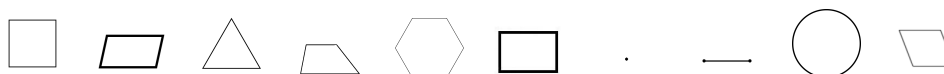
$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

35.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 35.2. Welche der folgenden Figuren können als Bild eines Quadrates unter einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ auftreten?



Aufgabe 35.3.*

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 35.4. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass zu $v \in K^n$ die Abbildung

$$K \longrightarrow K^n, \lambda \longmapsto \lambda v,$$

linear ist.

Aufgabe 35.5. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass zu $a \in K$ die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K^n, v \longmapsto av,$$

linear ist.

Aufgabe 35.6. Es sei K ein Körper und seien $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ und $\psi: K^n \rightarrow K^\ell$ lineare Abbildungen. Zeige, dass auch die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K^m \times K^\ell, v \longmapsto (\varphi(v), \psi(v)),$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 35.7.*

Es sei K ein Körper und sei $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ eine lineare Abbildung. Zeige die folgenden Eigenschaften.

- (1) Es ist $\varphi(0) = 0$.
- (2) Für jede Linearkombination $\sum_{i=1}^k s_i v_i$ in K^n gilt

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^k s_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k s_i \varphi(v_i).$$

Aufgabe 35.8. Es sei K ein Körper und seien $\psi: K^p \rightarrow K^n$ und $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ lineare Abbildungen. Zeige die folgenden Eigenschaften.

- (1) Die Hintereinanderschaltung

$$\varphi \circ \psi: K^p \longrightarrow K^m$$

ist ebenfalls linear.

- (2) Wenn φ bijektiv ist, so ist auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}: K^m \longrightarrow K^n$$

linear.

Aufgabe 35.9. Lucy Sonnenschein arbeitet als Fahrradkurier und bekommt einen Stundenlohn von 12 €. Am Obststand kosten Himbeeren 3 €, Erdbeeren kosten 2 € und Äpfel 0,4 € (jeweils pro Hundert Gramm). Beschreibe die Abbildung, die einem Einkauf die Zeit zuordnet, die Lucy für den Einkauf arbeiten muss, als eine Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen.

Aufgabe 35.10. In Beispiel 35.12 wurde beschrieben, welche Zutaten für Himbeerkuchen, Käsekuchen und Apfelkuchen benötigt werden. Die folgende Tabelle zeigt die Preise der einzelnen Zutaten (pro Kilogramm).

Produkt	Mehl	Zucker	Butter	Milch	Himbeeren	Quark	Äpfel	Haselnüsse
Preis	0,7	0,9	7	0,8	12	3	2	11

Beschreibe die Abbildung, die einem Kuchentupel den Preis zuordnet, als Hintereinanderschaltung der Zutatenabbildung und der Preisabbildung.

Aufgabe 35.11. Im Laden kostet Schokolade 1 €, Kartoffeln 4 € und Spinat 2 € pro Tafel bzw. Sack bzw. Packung. Oma Müller kauft zwei Tafeln Schokolade, drei Säcke Kartoffeln und drei Packungen Spinat und zahlt dafür 20 €. Mustafa ist vom Einkauf etwas enttäuscht und sagt: „wenn du zwei Säcke Kartoffeln und eine Packung Spinat weniger und dafür zehn Tafeln mehr gekauft hättest, so hätte das genau gleich viel gekostet“. Gabi Hochster ist zu

Besuch und sagt: „oder wenigstens einen Sack Kartoffeln weniger und dafür vier Tafeln mehr, das hätte den Preis auch nicht geändert“.

- (1) Finde weitere Möglichkeiten, den Einkauf abzuändern, ohne den Gesamtpreis zu ändern.
- (2) Bestimme den Kern $K \subseteq \mathbb{Q}^3$ der Preisabbildung.
- (3) Welche Elemente des Kerns lassen sich im eingangs beschriebenen Kontext sinnvoll interpretieren (wenn nur ganzzahlige Einkäufe möglich sind)?

Aufgabe 35.12.*

Bestimme den Kern der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 35.13.*

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 35.14. Es sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die durch die lineare Gleichung $5x+7y-4z=0$ gegebene Ebene. Bestimme eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

derart, dass das Bild von φ gleich E ist.

Aufgabe 35.15. Zeige, dass das Bild einer Geraden $G \subseteq K^n$ unter einer linearen Abbildung $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ entweder eine Gerade oder ein Punkt im K^m ist.

Aufgabe 35.16. Es sei M eine $m \times n$ -Matrix über dem Körper K , $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ die zugehörige lineare Abbildung und $Mx = 0$ das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem. Zeige, dass die Lösungsmenge des Systems gleich dem Kern von φ ist.

Aufgabe 35.17. Es sei M eine $m \times n$ -Matrix über dem Körper K , $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ die zugehörige lineare Abbildung und $Mx = c$ das (vom Störvektor $c \in K^m$ abhängige) zugehörige lineare Gleichungssystem. Zeige, dass die Lösungsmenge des Systems gleich dem Urbild von c unter der linearen Abbildung φ ist.

Aufgabe 35.18. Es sei $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass das Urbild eines Punktes $Q \in K^m$ ein affiner Unterraum des K^n ist.

Aufgabe 35.19.*

Ergänze den Beweis zu Satz 35.10 um die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation.

Aufgabe 35.20. Es sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Es sei $v_i, i = 1, \dots, n$, eine Basis des K^n und seien $w_i, i = 1, \dots, n$, Elemente in K^m . Zeige, dass es genau eine lineare Abbildung

$$\varphi: K^n \longrightarrow K^m$$

mit

$$\varphi(v_i) = w_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

gibt.

Aufgabe 35.21. Zeige, dass die Addition

$$+: \mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

eine lineare Abbildung ist. Wie sieht die Matrix dieser Abbildung bezüglich der Standardbasis aus?

Aufgabe 35.22. Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Bestimme die Anzahl der linearen Abbildungen

$$\varphi: K^n \longrightarrow K^m.$$

Aufgabe 35.23. Es sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und $\varphi: K^m \rightarrow K^n$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass der Graph der Abbildung ein Untervektorraum von $K^m \times K^n$ ist.

Aufgabe 35.24. Mustafa Müller hat seinen neunten Geburtstag. Für die Feier backt seine Oma drei Himbeerkuchen, zwei Käsekuchen und vier Apfelkuchen. Berechne die insgesamt benötigten Zutaten mit Hilfe von Beispiel 35.12.

Aufgabe 35.25. Beschreibe die Situation aus Beispiel 31.4 mit Hilfe einer linearen Abbildung.

Aufgabe 35.26. In einer Kekspackung befinden sich Schokokekse, Waffelröllchen, Mandelsterne und Nougatringe. Die Kalorien, der Vitamin C-Gehalt und der Anteil an linksdrehenden Fettsäuren werden durch folgende Tabelle (in geeigneten Maßeinheiten) wiedergegeben:

Sorte	Kalorien	Vitamin C	Fett
Schokokeks	10	5	3
Waffelröllchen	8	7	6
Mandelstern	7	3	1
Nougatring	12	0	5

- Beschreibe mit einer Matrix die Abbildung, die zu einem Verzehr tupel (x, y, z, w) das Aufnahmetupel (K, V, F) berechnet.
- Heinz isst 100 Schokokekse. Berechne seine Vitaminaufnahme.
- Ludmilla isst 10 Nougatringe und 11 Waffelröllchen. Berechne ihre Gesamtaufnahme an Nährstoffen.
- Peter isst 5 Mandelsterne mehr und 7 Schokokekse weniger als Fritz. Bestimme die Differenz ihrer Kalorienaufnahme.

Aufgabe 35.27.*

Aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden verschiedene Produkte P_1, P_2, P_3, P_4 hergestellt. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel von den Rohstoffen jeweils nötig ist, um die verschiedenen Produkte herzustellen (jeweils in geeigneten Einheiten).

	R_1	R_2	R_3
P_1	6	2	3
P_2	4	1	2
P_3	0	5	2
P_4	2	1	5

- Erstelle eine Matrix, die aus einem Vierertupel von Produkten die benötigten Rohstoffe berechnet.
- Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Produkt in einem Monat produziert werden soll.

	P_1	P_2	P_3	P_4
	6	4	7	5

Welche Rohstoffmengen werden dafür benötigt?

c) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Rohstoff an einem Tag angeliefert wird.

	R_1	R_2	R_3
	12	9	13

Welche Produkttupel kann man daraus ohne Abfall produzieren?

Aufgabe 35.28.*

Die Zeitungen A , B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

- (1) Die Abonnenten von A bleiben zu 80% bei A , 10% wechseln zu B , 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
- (2) Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B , 10% wechseln zu A , 20% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.
- (3) Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C , niemand wechselt zu A , 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
- (4) Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A , B oder C , die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Aufgabe 35.29. Die Telefonanbieter A , B und C kämpfen um einen Markt, wobei die Marktaufteilung im Jahr j durch das Kundentupel $K_j = (a_j, b_j, c_j)$ ausgedrückt wird (dabei steht a_j für die Anzahl der Kunden von A im Jahr j u.s.w.). Es sind regelmäßig folgende Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres zu beobachten.

- (1) Die Kunden von A bleiben zu 80% bei A und wechseln zu je 10% zu B bzw. zu C .
- (2) Die Kunden von B bleiben zu 70% bei B und wechseln zu 10% zu A und zu 20% zu C .

- (3) Die Kunden von C bleiben zu 50% bei C und wechseln zu 20% zu A und zu 30% zu B .

- a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die das Kundentupel K_{j+1} aus K_j berechnet.
- b) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(12000, 10000, 8000)$ innerhalb eines Jahres?
- c) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(10000, 0, 0)$ in vier Jahren?

35.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 35.30. (3 Punkte)

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 35.31. (2 Punkte)

Es sei $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass der Kern von φ ein Untervektorraum des K^n ist.

Aufgabe 35.32. (4 Punkte)

Auf dem reellen Vektorraum $G = \mathbb{R}^4$ der Glühweine betrachten wir die beiden linearen Abbildungen

$$\pi: G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 8z + 9n + 5r + s,$$

und

$$\kappa: G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 2z + n + 4r + 8s.$$

Wir stellen uns π als Preisfunktion und κ als Kalorienfunktion vor. Man bestimme Basen für kern π , für kern κ und für kern $(\pi \times \kappa)$.

Aufgabe 35.33. (4 (2+2) Punkte)

Es sei K ein Körper und sei $v_1, \dots, v_m$ eine Familie von Vektoren im K^n . Zeige, dass für die lineare Abbildung

$$\varphi: K^m \longrightarrow K^n, (s_1, \dots, s_m) \longmapsto \sum_{i=1}^m s_i v_i,$$

die folgenden Beziehungen gelten.

- (1) φ ist surjektiv genau dann, wenn $v_1, \dots, v_m$ ein Erzeugendensystem von K^n ist.
- (2) φ ist bijektiv genau dann, wenn $v_1, \dots, v_m$ eine Basis von K^n ist.

Aufgabe 35.34. (6 (3+1+2) Punkte)

Eine Tierpopulation besteht aus Traglingen (erstes Lebensjahr), Frischlingen (zweites Lebensjahr), Halbstarke (drittes Lebensjahr), Reife (viertes Lebensjahr) und alten Hasen (fünftes Lebensjahr), älter können diese Tiere nicht werden. Der Gesamtbestand dieser Tiere in einem bestimmten Jahr j wird daher durch ein 5-Tupel $B_j = (b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}, b_{4,j}, b_{5,j})$ angegeben.

Von den Traglingen erreichen 7/8-tel das Frischlingsalter, von den Frischlingen erreichen 9/10-tel das Halbstarkealter, von den Halbstarke erreichen 5/6-tel das reife Alter und von den Reife erreichen 2/3-tel das fünfte Jahr.

Traglinge und Frischlinge können sich noch nicht vermehren, dann setzt die Geschlechtsreife ein und 10 Halbstarke zeugen 5 Nachkommen und 10 Reife zeugen 8 Nachkommen, wobei die Nachkommen ein Jahr später geboren werden.

- a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die den Gesamtbestand B_{j+1} aus dem Bestand B_j berechnet.
- b) Was wird aus dem Bestand (200, 150, 100, 100, 50) im Folgejahr?
- c) Was wird aus dem Bestand (0, 0, 100, 0, 0) in fünf Jahren?

36. VORLESUNG - INVERTIERBARKEIT

In dieser Vorlesung möchten wir verstehen, wie man an der beschreibenden Matrix zu einer linearen Abbildung erkennen kann, ob diese bijektiv ist, und wann ein lineares Gleichungssystem $Mx = y$ die Eigenschaft besitzt, dass es für jedes y eine eindeutige Lösung x gibt, und wie man diese findet.

36.1. Invertierbare Matrizen.

Definition 36.1. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$ -Matrix über K . Dann heißt M *invertierbar*, wenn es eine weitere Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A$$

gibt.

Definition 36.2. Es sei K ein Körper. Zu einer invertierbaren Matrix $M \in \text{Mat}_n(K)$ heißt die Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A$$

die *inverse Matrix* von M . Man schreibt dafür

$$M^{-1}.$$

Beispiel 36.3. Eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn sämtliche Diagonaleinträge von 0 verschieden sind. Die inverse Matrix dazu ist

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{d_{n-1\,n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{d_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Das Produkt von invertierbaren Matrizen ist wieder invertierbar, die invertierbaren Matrizen bilden eine Gruppe. Aus der einzigen Gleichung

$$A \circ M = E_n$$

folgt sogar die umgekehrte Gleichung

$$M \circ A = E_n,$$

also die Invertierbarkeit von M . Dies ist aber rein matrizentheoretisch schwierig zu beweisen, für den Fall von 2×2 -Matrizen siehe Aufgabe 36.9. Mit Hilfe der Korrespondenz zwischen Matrizen und linearen Abbildungen kann man es beweisen, indem man verwendet, dass für eine lineare Abbildung $\varphi: K^n \rightarrow K^n$ die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv äquivalent sind (das haben wir nicht bewiesen). Invertierbare Matrizen und bijektive lineare Abbildungen hängen unmittelbar zusammen.

Satz 36.4. *Es sei K ein Körper und sei $\varphi: K^n \rightarrow K^n$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix M . Dann ist φ genau dann bijektiv, wenn M invertierbar ist.*

Beweis. Wenn φ bijektiv ist, so gibt es eine lineare Abbildung

$$\psi: K^n \longrightarrow K^n$$

mit

$$\varphi \circ \psi = \text{Id}_{K^n} = \psi \circ \varphi.$$

Es sei M die Matrix zu φ und N die Matrix zu ψ . Nach Satz 35.15 ist dann

$$M \circ N = E_n = N \circ M$$

und dies bedeutet die Invertierbarkeit von M . Die Rückrichtung geht genauso. $\square$

36.2. Elementarmatrizen.

Wir möchten zu einer Matrix M bestimmen, ob sie invertierbar ist oder nicht und wie gegebenenfalls die inverse Matrix aussieht. Dazu sind Elementarmatrizen hilfreich, da man mit ihnen die Manipulationen, die im Eliminationsverfahren auftreten, als Matrizenmultiplikationen beschreiben kann.

Definition 36.5. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$ -Matrix über K . Dann nennt man die folgenden Manipulationen an M *elementare Zeilenumformungen*.

- (1) Vertauschung von zwei Zeilen.
- (2) Multiplikation einer Zeile mit $s \neq 0$.
- (3) Addition des a -fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Elementare Zeilenumformungen ändern nicht den Lösungsraum von homogenen linearen Gleichungssystemen, wie in Lemma 32.3 gezeigt wurde.

Definition 36.6. Es sei K ein Körper. Mit B_{ij} bezeichnen wir diejenige $n \times n$ -Matrix, die an der Stelle (i, j) den Wert 1 und sonst überall den Wert 0 hat. Dann nennt man die folgenden Matrizen *Elementarmatrizen*.

- (1) $V_{ij} := E_n - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$.
- (2) $S_k(s) := E_n + (s - 1)B_{kk}$ für $s \neq 0$.
- (3) $A_{ij}(a) := E_n + aB_{ij}$ für $i \neq j$ und $a \in K$.

Ausgeschrieben sehen diese Elementarmatrizen folgendermaßen aus.

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S_k(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_{ij}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrizen sind invertierbar, siehe Aufgabe 36.1, und ihre Inversen sind ebenfalls Elementarmatrizen.

Lemma 36.7. *Es sei K ein Körper und M eine $m \times n$ -Matrix mit Einträgen in K . Dann hat die Multiplikation mit den $m \times m$ -Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung.*

- (1) $V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i -ten und der j -ten Zeile von M .
- (2) $(S_k(s)) \circ M =$ Multiplikation der k -ten Zeile von M mit s .
- (3) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a -fachen der j -ten Zeile von M zur i -ten Zeile ($i \neq j$).

Beweis. Siehe Aufgabe 36.11. □

Satz 36.8. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$ -Matrix über K . Dann gibt es elementare Zeilenumformungen und eine (Neu-)Nummerierung der Spalten*

$$j_1, j_2, \dots, j_n$$

und ein $r \leq n$ derart, dass in der entstandenen Matrix die Spalten die Gestalt

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{k,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } b_{k,j_k} \neq 0 \text{ f\"ur } k \leq r$$

und

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{r,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{f\"ur } k > r$$

besitzen. Durch elementare Zeilenumformungen und zusätzliche Spaltenvertauschungen kann man also eine Matrix auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} d_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_{22} & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{rr} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

mit $d_{ii} \neq 0$ bringen.

Beweis. Dies beruht auf den entsprechenden Manipulationen fur Gleichungen wie beim Eliminationsverfahren, siehe die zweite Vorlesung. $\square$

Beispiel 36.9. Wir betrachten die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Wir wollen diese Matrix

durch elementare Zeilenumformungen auf Diagonalgestalt bringen und diese Manipulationen durch Multiplikationen mit Elementarmatrizen realisieren. Die erste Umformung ist, die zweite Zeile durch $II - \frac{3}{4}I$ zu ersetzen. Die geschieht durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{17}{4} \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Die dritte Zeile soll durch $III - 2I$ ersetzt werden, dies wird realisiert durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{17}{4} \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{17}{4} \\ 0 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}.$$

Die neue dritte Zeile kann man zu einer Nullzeile machen, indem man sie durch $III - \frac{2}{13}II$ ersetzt. Dies wird realisiert durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{26}{17} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{17}{4} \\ 0 & \frac{13}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 36.10. Wir betrachten die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Wir wollen diese Matrix durch elementare Zeilenumformungen auf Diagonalgestalt bringen und diese Manipulationen durch Multiplikationen mit Elementarmatrizen realisieren. Die einzige Umformung ist, die zweite Zeile durch $II - \frac{5}{4}I$ zu ersetzen. Dies wird durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix}$$

realisiert.

Beispiel 36.11. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht in der in Satz 36.7 zuletzt beschriebenen Form, und kann auch nicht durch Zeilenumformungen dahin gebracht werden. Durch Spaltenvertauschungen ist das möglich.

Korollar 36.12. *Es sei K ein Körper und sei M eine invertierbare $n \times n$ -Matrix über K . Dann gibt es elementare Zeilenumformungen derart, dass nach diesen Umformungen eine Matrix der Gestalt*

$$\begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

mit $d_i \neq 0$ entsteht. Durch weitere elementare Zeilenumformungen kann die Einheitsmatrix erreicht werden.

Beweis. Dies beruht auf den Manipulationen des Eliminationsverfahrens und darauf, dass elementare Zeilenumformungen nach Lemma 36.7 durch Multiplikationen mit Elementarmatrizen von links ausgedrückt werden können. Dabei können in einer Spalte bzw. in einer Zeile nicht nur Nullen entstehen, da die Elementarmatrizen invertierbar sind und so in jedem Schritt die Invertierbarkeit erhalten bleibt. Eine Matrix mit einer Nullspalte oder einer Nullzeile ist aber nicht invertierbar. Wenn eine obere Dreiecksmatrix

vorliegt, so sind die Diagonaleinträge nicht 0 und man kann mit skalarer Multiplikation die Diagonaleinträge zu 1 machen und damit die in jeder Spalte darüberliegenden Einträge zu 0. $\square$

Insbesondere gibt es zu einer invertierbaren Matrix M Elementarmatrizen $E_1, \dots, E_k$ derart, dass

$$E_k \circ \dots \circ E_1 \circ M$$

die Einheitsmatrix ist.

36.3. Auffinden der inversen Matrix.

Verfahren 36.13. Es sei M eine quadratische Matrix. Wie kann man entscheiden, ob die Matrix invertierbar ist, und wie kann man die inverse Matrix M^{-1} finden?

Dazu legt man eine Tabelle an, wo in der linken Seite zunächst die Matrix M steht und in der rechten Seite die Einheitsmatrix. Jetzt wendet man auf beide Matrizen schrittweise die gleichen elementaren Zeilenumformungen an. Dabei soll in der linken Seite die Ausgangsmatrix in die Einheitsmatrix umgewandelt werden. Dies ist genau dann möglich, wenn diese Matrix invertierbar ist. Wir behaupten, dass bei dieser Vorgehensweise in der rechten Seite die Matrix M^{-1} als Endmatrix entsteht. Dies beruht auf folgendem *Invarianzprinzip*. Jede elementare Zeilenumformung kann als eine Matrizenmultiplikation mit einer Elementarmatrix E von links realisiert werden. Wenn in der Tabelle

$$(M_1, M_2)$$

steht, so steht im nächsten Schritt

$$(EM_1, EM_2).$$

Wenn man das Inverse (das man noch nicht kennt, das es aber gibt unter der Voraussetzung, dass die Matrix invertierbar ist.) der linken Seite mit der rechten Seite multipliziert, so ergibt sich

$$(EM_1)^{-1}EM_2 = M_1^{-1}E^{-1}EM_2 = M_1^{-1}M_2.$$

D.h., dass sich dieser Ausdruck bei den Einzelschritten nicht ändert. Zu Beginn ist dieser Ausdruck gleich $M^{-1}E_n$, daher muss zum Schluss für (E_n, N) gelten

$$N = E_n^{-1}N = M^{-1}E_n = M^{-1}.$$

Beispiel 36.14. Wir wollen zur Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ gemäß dem in Verfahren 36.12 beschriebenen Verfahren die inverse Matrix M^{-1} bestimmen.

$\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & \frac{62}{5} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & \frac{5}{5} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{321}{62} & \frac{5}{62} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{7}{62} & -\frac{9}{62} \\ \frac{3}{62} & \frac{5}{62} \end{pmatrix}$

Für eine invertierbare 2×2 -Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kann man die inverse Matrix einfacher direkt angeben, es ist nämlich

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(und die „Determinante“ $ad - bc$ ist genau dann ungleich 0, wenn die Matrix invertierbar ist).

Beispiel 36.15. Wir wollen zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gemäß dem in Verfahren 36.12 beschriebenen Verfahren die inverse Matrix M^{-1} bestimmen.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 11 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$

36. ARBEITSBLATT

36.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 36.1. Zeige, dass die Elementarmatrizen invertierbar sind. Wie sehen die inversen Matrizen zu den Elementarmatrizen aus?

36.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 36.2. Beschreibe die Umkehrabbildungen zu den elementargeometrischen Abbildungen Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehung, Streckung, Verschiebung.

Aufgabe 36.3. Bestimme die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{5}{3} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 17 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.4. Bestimme die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.5. Zeige, dass eine invertierbare Matrix M weder eine Nullzeile noch eine Nullspalte besitzt.

Aufgabe 36.6. Es sei M eine $n \times n$ -Matrix derart, dass es $n \times n$ -Matrizen A, B mit $M \circ A = E_n$ und mit $B \circ M = E_n$ gibt. Zeige $A = B$ und dass M invertierbar ist.

Aufgabe 36.7. Es seien M und N invertierbare $n \times n$ -Matrizen. Zeige, dass auch $M \circ N$ invertierbar ist, und dass

$$(M \circ N)^{-1} = N^{-1} \circ M^{-1}$$

gilt.

Aufgabe 36.8. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge $\text{GL}_n(K)$ der invertierbaren Matrizen eine Gruppe ist. Zeige ferner, dass diese Gruppe bei $n \geq 2$ nicht kommutativ ist.

Aufgabe 36.9.*

Es seien $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ Matrizen über einem Körper K mit

$$A \circ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass dann auch

$$M \circ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 36.10. Es sei M eine $m \times n$ -Matrix und $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ die zugehörige lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn es eine $n \times m$ -Matrix A mit $M \circ A = E_m$ gibt.

Aufgabe 36.11. Es sei K ein Körper und M eine $m \times n$ -Matrix mit Einträgen in K . Zeige, dass die Multiplikation mit $m \times m$ -Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung haben.

- (1) $V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i -ten und der j -ten Zeile von M .
- (2) $(S_k(s)) \circ M =$ Multiplikation der k -ten Zeile von M mit s .
- (3) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a -fachen der j -ten Zeile von M zur i -ten Zeile ($i \neq j$).

Aufgabe 36.12. Beschreibe die Wirkungsweise, wenn man eine Matrix mit einer Elementarmatrix von rechts multipliziert.

Aufgabe 36.13. Zeige, dass man eine Scherungsmatrix

$$A_{ij}(a) = E_n + aB_{ij}$$

als Matrizenprodukt $M \circ N \circ L$ schreiben kann, wobei M und L Diagonalmatrizen sind und N eine Scherungsmatrix der Form $A_{ij}(1)$ ist.

Aufgabe 36.14. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \dots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \dots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 36.15. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \dots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \dots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 36.16. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.17.*

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.18. Führe für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & -4 \\ 9 & 17 & -2 \end{pmatrix}$$

das Invertierungsverfahren durch bis sich herausstellt, dass die Matrix nicht invertierbar ist.

Aufgabe 36.19.*

(1) Überführe die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in ein lineares Gleichungssystem.

(2) Löse dieses lineare Gleichungssystem.

Aufgabe 36.20. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.21. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.22.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige

$$M^2 = E_2.$$

b) Bestimme die inverse Matrix zu M .

c) Löse die Gleichung

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.23. Löse die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

simultan.

36.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 36.24. (3 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 & k \\ -k & k+1 & 0 & 0 \\ k+1 & -(k+2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für jedes $k \in K$ zu sich selbst invers ist.

Aufgabe 36.25. (4 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \dots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \dots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 36.26. (4 (1+3) Punkte)

(1) Überführe die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in ein lineares Gleichungssystem.

(2) Löse dieses lineare Gleichungssystem.

Aufgabe 36.27. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.28. (4 Punkte)

Löse die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

simultan durch Invertieren der Matrix.

Aufgabe 36.29. (3 Punkte)

Führe das Invertierungsverfahren für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ durch.

37. VORLESUNG - RELATIONEN

37.1. Relationen.

Sei P eine Menge von Personen und E eine Menge von Eigenschaften, die eine Person haben kann oder auch nicht, und zwar sollen hier nur solche Eigenschaften betrachtet werden, wo es nur die beiden Möglichkeiten des Zukommens oder des Nichtzukommens gibt. Die Gesamtinformation, welche der beteiligten Personen welche Eigenschaft besitzt, kann man dann auf verschiedene Arten ausdrücken. Man kann beispielsweise eine Liste von allen zutreffenden Person-Eigenschafts-Paaren erstellen, also

(Anna, klug), (Hans, schön), (Berta, schön), (Hans, lustig), (Anna, lustig)

oder man kann zu jeder Person die ihr zukommenden Eigenschaften auflisten, also

Anna: klug, lustig

Berta: schön

Hans: schön, lustig

oder umgekehrt zu einer Eigenschaft die Personen auflisten, die diese Eigenschaft erfüllen, also

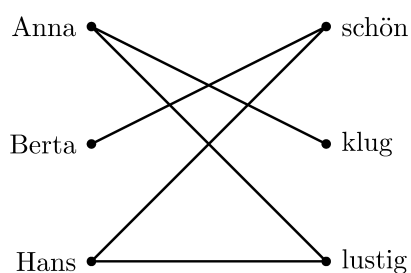
Schön: Berta, Hans

Klug: Anna

Lustig: Anna, Hans

Man kann auch das ganze in eine Tabelle schreiben, wo die eine Leiste die Personen und die andere Leiste die Eigenschaften repräsentiert, und dann diejenigen Kreuzungspunkte, die eine zutreffende Beziehung repräsentieren, ankreuzen, also

	Anna	Berta	Hans
Schön		x	x
Klug	x		
Lustig	x		x



Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Information durch ein Verbindungsdiagramm auszudrücken, bei dem Person und Eigenschaft genau dann durch eine Strecke oder eine Kurve verbunden werden, wenn die Eigenschaft zutrifft.

Der mathematische Begriff, um Beziehungen zwischen den Elementen von zwei Mengen zu beschreiben, heißt Relation.

Definition 37.1. Es seien M und N Mengen. Eine *Relation* R zwischen den Mengen M und N ist eine Teilmenge der Produktmenge $M \times N$, also $R \subseteq M \times N$.

Statt $(x, y) \in R$ schreibt man häufig auch $R(x, y)$ oder xRy und sagt, dass „ x in Relation R zu y steht“. Typische mathematische Relationen sind: ist gleich, ist größer als, ist Element von, ist Teilmenge von, ist disjunkt zu, usw.

Wenn $R \subseteq M \times N$ eine Relation ist, so heißt für jedes $m \in M$ die Menge

$$N_m = \{y \in N \mid R(m, y)\}$$

die *Faser* durch m und für jedes $n \in M$ heißt die Menge

$$M_n = \{x \in M \mid R(x, n)\}$$

die Faser durch n .

Beispiel 37.2. Wir betrachten auf einer Auswahl von Speisen und Getränken die Relation, die angibt, ob ein Gericht zu einem Getränk passt. Sei

$$E = \{\text{Hecht, Nudeln, Kartoffelgratin, Zupfkuchen}\}$$

und

$$G = \{\text{Rotwein, heiße Schokolade, Wasser, Kamillentee, Kaffee}\}.$$

Wasser passt zu allen Gerichten, Kamillentee zu keinem der Gerichte. Rotwein passt zu Nudeln und Kartoffelgratin, aber nicht zu Hecht oder zu Zupfkuchen. Heiße Schokolade und Kaffee passt zu Zupfkuchen, nicht zu den anderen Gerichten.

Beispiel 37.3. Es sei S die Menge der Städte und A die Menge der Autobahnen. Dann ist die Beziehung „liegt an“ eine Relation L zwischen S und A . Zwischen einer Stadt $s \in S$ und einer Autobahn $a \in A$ bedeutet

$$sLa \text{ oder } L(s, a)$$

einfach, dass die konkrete Stadt s an der Autobahn a liegt. Zu s ist dann die Menge

$$A_s = \{a \in A \mid L(s, a)\}$$

die Menge der Autobahnen, an denen s liegt, und zu $a \in A$ ist

$$S_a = \{s \in S \mid L(s, a)\}$$

die Teilmenge der Städte, an denen die Autobahn a vorbeifährt. Für $s = \text{Osnabrück}$ ergibt sich also

$$A_{\text{Osnabrück}} = \{A1, A30, A33\}$$

und für die $A1$ ergibt sich

$$S_{A1} = \{\dots, \text{Hamburg, Bremen, Osnabrück}, \dots\}.$$

Diese Relation wird vollständig beschrieben, wenn man zu jeder Stadt die daran vorbeiführenden Autobahnen oder aber wenn man zu jeder Autobahn

die daran liegenden Städte aufführt. Genauso gut kann man die Relation durch eine Tabelle ausdrücken mit einer Leitzeile für die Autobahnen und einer Leitspalte für die Städte, und wo im Kreuzungspunkt (s, a) ein Kreuz gemacht wird genau dann, wenn $L(s, a)$ gilt. Die Aussage

$$\forall s(\exists a L(s, a))$$

bedeutet, dass jede Stadt an einer Autobahn liegt (wohl falsch) und die Aussage

$$\forall a(\exists s L(s, a))$$

bedeutet, dass jede Autobahn an mindestens einer Stadt vorbeiführt (wohl wahr).

Beispiel 37.4. Es sei $E = \mathbb{R}^2$ die reelle Ebene und G die Menge aller Geraden in der Ebene. Die Produktmenge

$$E \times G$$

besteht aus allen Paaren (P, g) , wobei P ein Punkt der Ebene und g eine Gerade ist. Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Gerade zu beschreiben, und damit auch mehrere Möglichkeiten, ein solches Paar zu beschreiben. Beispielsweise ist

$$((2, -5), \{(u, v) \mid 4u - 3v = 6\})$$

ein Paar, wobei der Punkt vorne durch die beiden Koordinaten und die Gerade hinten durch eine Geradengleichung angegeben wird. Bei einem solchen Paar besteht keine Bedingung zwischen dem Punkt und der Geraden.

Die *Inzidenzrelation* zwischen Punkten und Geraden wird ausgedrückt durch

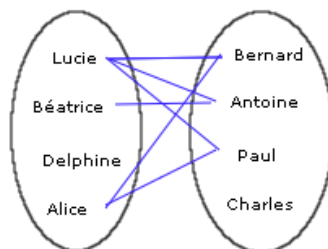
$$I = \{(P, g) \in E \times G \mid P \text{ liegt auf } g\}.$$

Statt „liegt auf“ kann man auch einfach $P \in g$ schreiben.

Beispiel 37.5. Es sei M eine Menge und P die Potenzmenge von M . Dann wird auf $M \times P$ die *Inzidenzrelation* I erklärt durch

$$I(x, T) \text{ genau dann, wenn } x \in T.$$

Die Inzidenzrelation drückt also aus, ob ein Element x zu einer bestimmten Teilmenge T gehört oder nicht. Die Faser zu einem Element besteht aus sämtlichen Teilmengen, die dieses Element enthalten, und die Faser zu einer Teilmenge besteht aus allen Elementen dieser Teilmenge.



37.2. Relationen und Abbildungen.

Abbildungen kann man als spezielle Relationen auffassen.

Definition 37.6. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F: L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$\Gamma_F = \{(x, F(x)) \mid x \in L\} \subseteq L \times M$$

den *Graphen* der Abbildung F .

Abbildungen und ihre Graphen sind im wesentlichen äquivalente Objekte. Um Abbildungen innerhalb der Relationen herauszustellen, sind die folgenden Begriffsbildungen sinnvoll.

Definition 37.7. Eine Relation $R \subseteq M \times N$ heißt *linkseindeutig*, wenn es zu jedem $y \in N$ maximal ein $x \in M$ mit $(x, y) \in R$ gibt.

Definition 37.8. Eine Relation $R \subseteq M \times N$ heißt *rechtseindeutig*, wenn es zu jedem $x \in M$ maximal ein $y \in N$ mit $(x, y) \in R$ gibt.

Definition 37.9. Eine Relation $R \subseteq M \times N$ heißt *linksvollständig*, wenn es zu jedem $x \in M$ ein $y \in N$ mit $(x, y) \in R$ gibt.

Definition 37.10. Eine Relation $R \subseteq M \times N$ heißt *rechtsvollständig*, wenn es zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ mit $(x, y) \in R$ gibt.

Wenn ein Paar $(x, y) \in R$ gegeben ist, so meint rechtseindeutig, dass (bei gegebenem) x die rechte Seite, also das y , eindeutig bestimmt ist. Wenn man sich aber die Relation auf $M \times N$ dadurch gegeben denkt, dass zwischen den Elementen der linken Menge M und den Elementen der rechten Menge N genau dann eine verbindende Strecke (kein Pfeil) vorliegt, wenn das entsprechende Paar zu R gehört, so hat rechtseindeutig die Auswirkung, dass

von jedem Punkt der linken Seite (!) aus maximal eine Verbindungsstrecke abgeht.

Lemma 37.11. *Eine Relation $R \subseteq M \times N$ ist genau dann eine (der Graph einer) Abbildung, wenn sie linksvollständig und rechtseindeutig ist.*

Beweis. Eine Abbildung

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

ordnet jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zu, das ist nach Definition die Linksvollständigkeit und die Rechtseindeutigkeit. $\square$

Eine rechtseindeutige Relation, die nicht unbedingt linksvollständig ist, nennt man auch manchmal eine „partielle Abbildung“, eine (insbesondere linksvollständige) Relation nennt man manchmal auch eine „mehrdeutige Abbildung“.

Bemerkung 37.12. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist genau dann surjektiv, wenn der Graph der Abbildung (als Relation aufgefasst) rechtsvollständig ist, und genau dann injektiv, wenn der Graph linkseindeutig ist.

37.3. Relationen auf einer Menge.

Im eingangs erwähnten Beispiel gab es einerseits Personen und andererseits Eigenschaften, die diese Personen haben konnten oder nicht. Die beiden beteiligten Mengen hatten also eine unterschiedliche Funktion. Wenn man aber z.B. zwischenmenschliche Beziehungen ausdrücken möchte, so stimmen die beiden Mengen häufig überein, und es ergeben sich neuartige strukturelle Möglichkeiten, da ein Element sowohl vorne als auch hinten stehen kann. Betrachten wir in der studentischen Dreier-WG die Relation „kann gut leiden“. Die zugehörige Relationstabelle sieht vielleicht so aus.

	Anna	Berta	Hans
Anna		x	x
Berta	x	x	
Hans	x	x	x

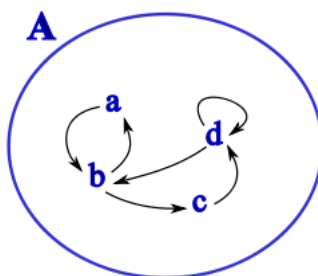
Hier ist zunächst wichtig, die Bedeutung der Spalte und der Zeile festzulegen; sagen wir, dass die Tabelle so zu verstehen ist, dass in der Leitspalte das grammatische Subjekt und in der Leitzeile das grammatische Objekt steht. Damit besagt die Tabelle, dass Hans alle Personen der WG gut leiden kann, dass Berta sich und Anna gut leiden kann, aber nicht Hans, und dass Anna ihre beiden Mitbewohner gut leiden kann, aber nicht sich selbst. Die Relation ist also weder „reflexiv“, da sich Anna nicht gut leiden kann, noch „symmetrisch“, da Hans zwar Berta gut leiden kann, aber nicht umgekehrt.

Definition 37.13. Eine Relation R auf einer Menge M ist eine Teilmenge der Produktmenge $M \times M$, also $R \subseteq M \times M$.

Wenn ein Paar (x, y) zu R gehört, so sagt man auch, dass x und y in der Relation R stehen. Statt $(x, y) \in R$ verwendet man häufig suggestivere Schreibweisen wie xRy , $x \sim y$ oder $x \leq y$. Dabei werden manche Symbole nur verwendet, wenn die Relation gewisse zusätzliche Eigenschaften erfüllt. Die wichtigsten Eigenschaften fasst die folgende Definition zusammen (die bei zwei verschiedenen Mengen keinen Sinn ergeben).

Definition 37.14. Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf M . Man nennt R

- *reflexiv*, wenn $(x, x) \in R$ gilt für alle $x \in M$.
- *transitiv*, wenn für beliebige $x, y, z \in M$ aus $(x, y) \in R$ und aus $(y, z) \in R$ stets $(x, z) \in R$ folgt.
- *symmetrisch*, wenn für beliebige $x, y \in M$ aus $(x, y) \in R$ auch $(y, x) \in R$ folgt.
- *antisymmetrisch*, wenn für beliebige $x, y \in M$ aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ die Gleichheit $x = y$ folgt.

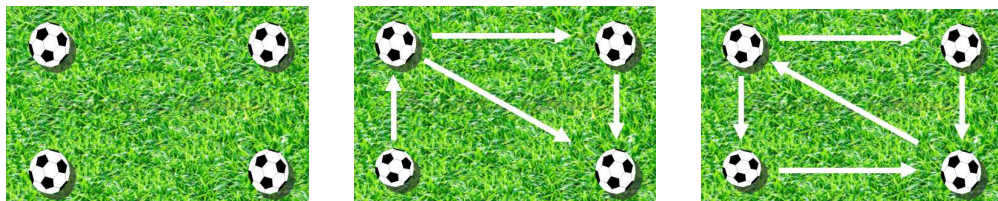


Ein Pfeildiagramm ist eine Möglichkeit, eine Relation darzustellen.

Eine wichtige Darstellungsmöglichkeit für eine Relation auf einer Menge ist durch ein Pfeildiagramm gegeben, man spricht auch von einem *gerichteten Graphen*. Dabei werden die Elemente der Grundmenge M als Punkte (Knoten) gezeichnet, und es wird genau dann ein Pfeil von Punkt x zu Punkt y gezeichnet, wenn xRy gilt. Die Richtung des Pfeiles ist dabei wichtig. Wenn allerdings die Relation symmetrisch ist, so gibt es zu jedem Pfeil den entsprechenden Rückpfeil. Daher drückt man symmetrische Relationen direkt durch ungerichtete Pfeile (Kanten, Verbindungsstrecken) aus und spricht von *ungerichteten Graphen*.

Beispiel 37.15. Eine (Fußball-)Spielgruppe bei einer Europa- oder Weltmeisterschaft besteht aus vier Mannschaften, und jede spielt gegen jede. Ein Spiel kann unentschieden oder mit einem Sieg für eine der beiden Mannschaften enden. Wir interessieren uns für die Gewinnrelation in einer Spielgruppe,

die man durch einen gerichteten Graphen beschreiben kann, wobei man einen Sieg von A über B durch einen Pfeil von A nach B (und ein Unentschieden durch keine Verbindung) ausdrücken kann.



Wir besprechen nun verschiedene mathematische Relationen, die mit diesen Eigenschaften definiert werden können.

37.4. Ordnungsrelationen.

Eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation nennt man eine *Ordnung*, wofür man häufig ein Symbol wie $\geq$, $\leq$, $\preceq$, $\subseteq$ verwendet. Diese haben wir schon im Kontext von angeordneten Ringen besprochen.

Definition 37.16. Eine Relation $\preceq$ auf einer Menge I heißt *Ordnungsrelation* oder *Ordnung*, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Es ist $i \preceq i$ für alle $i \in I$.
- (2) Aus $i \preceq j$ und $j \preceq k$ folgt stets $i \preceq k$.
- (3) Aus $i \preceq j$ und $j \preceq i$ folgt $i = j$.

Eine Menge mit einer fixierten Ordnung darauf heißt *geordnete Menge*. Wenn zusätzlich gilt, dass für je zwei Elemente $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt, so spricht man von einer *total geordneten Menge*.

Beispiel 37.17. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (ebenso die rationalen Zahlen und die ganzen Zahlen) sind total geordnet durch die *Größergleichrelation* $\geq$. Dies gehört zum Begriff des angeordneten Körpers, der nicht nur verlangt, dass eine totale Ordnung erklärt ist, sondern auch, dass diese mit den algebraischen Operationen verträglich ist. Die strikte *Größerrelation* $>$ ist keine Ordnungsrelation, da sie nicht reflexiv ist. Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet (und lässt sich auch nicht anordnen).

Beispiel 37.18. Wir betrachten die positiven ganzen Zahlen $\mathbb{N}_+$ zusammen mit der Teilbarkeitsbeziehung. Man sagt, dass eine Zahl k die Zahl n teilt, geschrieben

$$k|n,$$

wenn es eine weitere natürliche Zahl m mit $n = km$ gibt. Die Bezeichnung ist nicht sonderlich glücklich gewählt, da ein symmetrisches Symbol für eine nichtsymmetrische Relation verwendet wird. Die Teilbarkeitsrelation ist in der Tat reflexiv, da stets $n|n$ ist, wie $m = 1$ zeigt. Die Transitivität sieht

man so: sei $k|n$ und $n|m$ mit $n = ak$ und $m = bn$. Dann ist $m = bn = bak$ und daher $k|m$. Die Antisymmetrie folgt so: Aus $n = ak$ und $k = bn$ folgt $n = (ab)n$. Da wir uns auf positive natürliche Zahlen beschränken, folgt $ab = 1$ und daraus $a = b = 1$. Also ist $k = n$. Einfache Beispiele wie 2 und 3 zeigen, dass hier keine totale Ordnung vorliegt, da weder 2 von 3 noch umgekehrt geteilt wird.

Beispiel 37.19. Sei M eine beliebige Menge und

$$R = \mathfrak{P}(M)$$

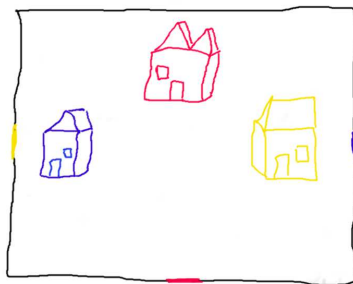
die Potenzmenge davon. Dann sind die Elemente aus $R = \mathfrak{P}(M)$ - also die Teilmengen von M - durch die Inklusionsbeziehung $\subseteq$ geordnet. Die Reflexivität bedeutet einfach, dass eine jede Menge in sich selbst enthalten ist und die Transitivität bedeutet, dass aus $T_1 \subseteq T_2$ und $T_2 \subseteq T_3$ die Inklusion $T_1 \subseteq T_3$ folgt. Die Antisymmetrie ist dabei ein wichtiges Beweisprinzip für die Gleichheit von Mengen: Zwei Mengen T_1, T_2 sind genau dann gleich, wenn $T_1 \subseteq T_2$ und umgekehrt $T_2 \subseteq T_1$ gilt.

Beispiel 37.20. Sei X eine Menge (beispielsweise ein Intervall, oder ein topologischer Raum), so ist die Menge der (stetigen) Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ geordnet, indem man $f \geq g$ dadurch definiert, dass $f(x) \geq g(x)$ für jeden Punkt $x \in X$ sein muss. Dies ist offensichtlich keine totale Ordnung.

37. ARBEITSBLATT

37.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 37.1. Lege in der Skizze für die drei Häuser überschneidungsfrei Wege zu den zugehörigen gleichfarbigen Gartentoren an.



37.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 37.2. Finden Sie in Ihrem Alltagsleben möglichst viele Relationen. (Suchen Sie auch in Ihrem (Zweit-)Studienfach.)

Aufgabe 37.3. Beim Speeddating treffen sich n Frauen und n Männer und jede Frau plaudert mit jedem Mann fünf Minuten lang. Danach schreibt jede Frau auf einen Zettel, welche Männer sie wiedersehen möchte, und ebenso schreibt jeder Mann auf einen Zettel, welche Frauen er wiedersehen möchte. Die Moderatorin sammelt die Zettel ein und erstellt daraus eine Liste von Paaren, bei denen sich beide wiedersehen wollen. Beschreibe diese Situation mit Relationen.

Aufgabe 37.4. Wir betrachten zu der Flussmenge

$$F = \{\text{Rhein, Weser, Donau, Tiber, Themse, Nil}\}$$

und zu der Ländermenge

$$L = \{\text{Deutschland, Niederlande, Schweiz, Frankreich, Italien, Österreich, Ungarn, Uganda}\}$$

die Relation „fließt durch dieses Land“.

- (1) Beschreibe diese Relation durch eine Tabelle.
- (2) Beschreibe diese Relation durch ein Verbindungsdiagramm.
- (3) Beschreibe diese Relation durch Auflistung der zugehörigen Paare.
- (4) Bestimme die Faser zum Rhein bezüglich dieser Relation.
- (5) Bestimme die Faser zur Donau bezüglich dieser Relation.
- (6) Bestimme die Faser zu Deutschland bezüglich dieser Relation.
- (7) Untersuche die Begriffe Links- und Rechtseindeutigkeit, Links- und Rechtsvollständigkeit für diese Relation.

Aufgabe 37.5. Bestimme, ob die durch die Relationstabelle

	A	B	C
A		x	x
B	x	x	
C	x	x	x

beschriebene Relation auf der Menge $\{A, B, C\}$ reflexiv, sym-

metrisch, transitiv, antisymmetrisch ist.

Aufgabe 37.6.*

Anna-Lena, Marie-Simone, Hans-Peter und Fritz-Franz gehen zur Farbberatung. Es ergibt sich folgende Empfehlung. Anna-Lena stehen die Farben grün, gelb und pink, Marie-Simone steht gelb und feuerrot, Hans-Peter steht grün, grau und graublau, Fritz-Franz stehen alle bisher genannten Farben außer graublau, dafür zusätzlich noch violett. Es sei P die Menge der vier Personen und F die Menge der erwähnten Farben zuzüglich blau.

- (1) Erstelle eine Tabelle und ein Verbindungsdiagramm, die die Relation aus Personen und Farben wiedergibt.

- (2) Bestimme die Fasern zu blau, zu grün und zu Marie-Simone.

Aufgabe 37.7. Es sei S die Menge der Städte und A die Menge der Autobahnen und $L \subseteq S \times A$ die in Beispiel 37.3 beschriebene Relation.

Beschreibe formal die Menge T derjenigen Städte, die an mindestens einer Autobahn liegen.

Beschreibe formal die Menge U derjenigen Städte, die an mindestens zwei Autobahnen liegen.

Interpretiere die Aussage

$$\forall s_1 \forall s_2 \exists a (s_1 L a \wedge s_2 L a),$$

wobei s_1 und s_2 aus T seien. Ist die Aussage wahr?

Formuliere formal die Aussage, dass zwei Städte stets durch maximal zwei Autobahnen miteinander verbunden sind (man darf annehmen, dass jedes Autobahnkreuz an mindestens einer Stadt liegt).

Aufgabe 37.8. Skizziere den Graphen der Addition

$$+: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \longmapsto x + y.$$

Aufgabe 37.9. Skizziere den Graphen der Multiplikation

$$\cdot: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

Aufgabe 37.10. Wir betrachten in $\mathbb{Q}^2$ die Punkte $P = (0, 0)$, $Q = (0, 1)$, $R = (2, 3)$ und $S = (6, 7)$ und die Geraden $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, die x -Achse, die y -Achse und die durch die Gleichung $-4x + 3y = 1$ gegebene Gerade H . Beschreibe die zugehörige Inzidenzrelation.

Aufgabe 37.11. Erstelle eine Tabelle für die Inzidenzrelation zu einer 0, 1, 2 und 3-elementigen Menge.

Aufgabe 37.12. Es sei M eine n -elementige Menge. Bestimme die Anzahl der Elemente in der Inzidenzrelation zu M .

Aufgabe 37.13. Es sei M die Menge aller Geraden in der Ebene. Wir sagen, dass die Geraden G und H in Relation stehen, wenn sie (mindestens) einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Welche Relationseigenschaften treffen für diese Relation zu, welche nicht?

Aufgabe 37.14. Beschreibe, wie sich die Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch einer Relation R auf einer Menge M in der Relationstabelle zu R widerspiegeln.

Aufgabe 37.15. Wir betrachten die Ländermenge

$$L = \{\text{Deutschland, Niederlande, Belgien, Schweiz, Frankreich, Italien, Österreich, Spanien, Portugal, Polen, Ungarn}\}$$

und die Relation „besitzt eine gemeinsame Grenze mit“.

- (1) Untersuche diese Relation in Hinblick auf die Begriffe reflexiv, (anti-)symmetrisch, transitiv.
- (2) Bestimme die Faser zu Deutschland in dieser Relation.
- (3) Bestimme die Faser zu Frankreich in dieser Relation.
- (4) Stelle die Relation durch ein Verbindungsdiagramm dar.

Aufgabe 37.16. Wir studieren die Relation „kann gut leiden“ in verschiedenen Dreier-WGs, die wir durch Relationstabellen ausdrücken, wobei in der Leitspalte das grammatische Subjekt steht. Untersuche die einzelnen Relationen hinsichtlich der Eigenschaften reflexiv, transitiv (anti-)symmetrisch.

	Andrea	Bernd	Heinz
Andrea	x		
Bernd		x	
Heinz			x

	Anja	Ben	Horst
Anja	x	x	x
Ben	x	x	x
Horst	x	x	x

	Hinz	Kunz	Schlönz
Hinz	x	x	x
Kunz		x	
Schlönz	x	x	x

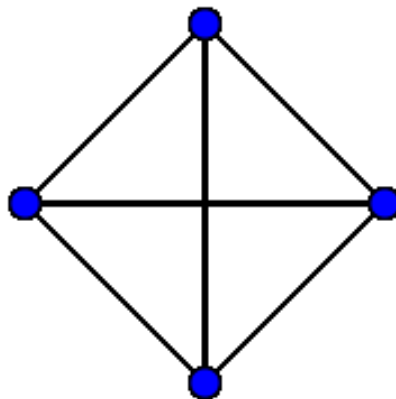
	Hänsel	Gretel	Hexe
Hänsel	x	x	
Gretel	x	x	
Hexe			x

	Oma	Wolf	Rotkäppchen
Oma	x		x
Wolf		x	
Rotkäppchen	x		x

	Jan	Jens	Jennifer
Jan			
Jens			
Jennifer			

	Hase	Fuchs	Igel
Hase		x	
Fuchs			x
Igel	x		

Aufgabe 37.17.*



Bei einem vollständigen ungerichteten Graphen mit 4 Ecken ist jede Ecke mit jeder (anderen) Ecke verbunden. Zeichne einen solchen Graphen in der Ebene ohne Überschneidungen.

Aufgabe 37.18.*

Wir betrachten das Spiel Schnick Schnack Schnuck mit den Objekten Schere, Stein, Papier und Brunnen als eine Gewinnrelation.

- (1) Skizziere diese Gewinnrelation durch einen gerichteten Graphen (Pfeildiagramm).
- (2) Ist die Gewinnrelation transitiv?

- (3) Gibt es eine dreielementige Teilmenge der Objekte derart, dass die Relation transitiv wird?

Aufgabe 37.19. Eine (Fußball-)Spielgruppe bei einer Europa- oder Weltmeisterschaft besteht aus vier Mannschaften, und jede spielt gegen jede. Ein Spiel kann unentschieden oder mit einem Sieg für eine der beiden Mannschaften enden. Wir interessieren uns für die diskrete Struktur einer Spielgruppe, die man durch einen gerichteten Graphen beschreiben kann, wobei man einen Sieg von A über B durch einen Pfeil von A nach B (und ein Unentschieden durch keine Verbindung) ausdrücken kann.

Definiere einen Isomorphiebegriff⁸ für Spielgruppen und klassifiziere die Spielgruppen entlang geeigneter numerischer Invarianten. Wie viele Spielgruppen gibt es? Aus welchen Isomorphietypen lässt sich die Tabellenordnung ableiten, aus welchen nicht?

Aufgabe 37.20. Es seien M und N Mengen. Zeige, dass man jede Relation zwischen M und N als eine Relation auf der Menge $M \uplus N$ auffassen kann. Welche Relationen auf $M \uplus N$ treten in dieser Weise auf?

Aufgabe 37.21. Zeigen Sie, dass für Relationen die Konzepte Reflexivität, Symmetrie und Transitivität voneinander unabhängig sind (das heißt, dass zwei der Eigenschaften gelten können, ohne dass die dritte gelten muss).

Aufgabe 37.22.*

Es sei M eine Menge mit n Elementen. Bestimme die Anzahl der Relationen auf M , die

- (1) reflexiv
- (2) symmetrisch
- (3) reflexiv und symmetrisch

sind.

Aufgabe 37.23.*

Es sei $M = \{a, b\}$ eine zweielementige Menge. Beschreibe vollständig (durch Auflistung aller zugehörigen Paare) die Relation auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$, die durch die Teilmengenbeziehung gegeben ist.

⁸Mit *Isomorphie* meint man in der Mathematik, dass die mathematische Struktur übereinstimmt. In diesem Beispiel sollten also die Pfeildiagramme der beiden Spielgruppen übereinstimmen, und das heißt, dass man sie zur Übereinstimmung bringen kann, indem man passende Mannschaften aufeinander bezieht.

Aufgabe 37.24.*

Es sei M eine Menge und P die Potenzmenge von M . Betrachte die Relation T auf P , die durch

$$T(A, B) \text{ genau dann, wenn } A \subseteq B$$

gegeben ist (dabei sind also A und B Teilmengen von M). Bestimme die Anzahl der Elemente dieser Relation, wenn M n Elemente besitzt.

Aufgabe 37.25. Es sei M eine Menge und P die Potenzmenge von M . Betrachte die Relation D auf P , die durch

$$D(A, B) \text{ genau dann, wenn } A \cap B = \emptyset$$

gegeben ist (dabei sind also A und B Teilmengen von M). Bestimme die Anzahl der Elemente dieser Relation, wenn M n Elemente besitzt.

Aufgabe 37.26. Jedes Paket hat einen eindeutig bestimmten Absender und Empfänger. Modelliere diesen Sachverhalt mit Abbildungen bzw. Relationen. Welche Pfeildiagramme sind sinnvoll, um die Situation zu beschreiben?

Aufgabe 37.27. Es sei $R \subseteq M \times N$ eine Relation zwischen M und N . Zeige, dass man eine Relation S zwischen N und M erhält, indem man

$$S = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

setzt. Sie heißt die *Umkehrrelation* zu R . Zeige ferner, dass bei $M = N$ die Relation R genau dann symmetrisch ist, wenn $R = S$ ist.

Aufgabe 37.28. Beim neutralgeschlechtlichen Speeddating treffen sich n Personen, und jede Person plaudert mit jeder von ihr verschiedenen Person fünf Minuten lang. Danach schreibt jede Person auf einen Zettel, welche Personen sie wiedersehen möchte. Die Moderatorin sammelt die Zettel ein und erstellt daraus eine Liste von Paaren, bei denen sich beide wiedersehen wollen.

- (1) Beschreibe diese Situation mit einer Relation und einer Umkehrrelation.
- (2) Es sei $n = 6$. Zeichne ein Diagramm mit sechs Punkten und verschiedenfarbigen Verbindungsstrecken zwischen den Punkten, das beschreibt, in welcher Reihenfolge die Personen miteinander plaudern (die erste Farbe soll die Gesprächspartner der ersten Runde angeben u.s.w.)

Aufgabe 37.29. Es sei M eine Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge davon. Zeige, dass durch

$S \preceq T$, wenn es eine injektive Abbildung $S \rightarrow T$ gibt,

eine reflexive und transitive Relation auf $\mathfrak{P}(M)$ definiert wird, die in aller Regel weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist.

Aufgabe 37.30. In einer Wohngemeinschaft wohnen Albert, Beowulf, Clara, Dora, Emil und Gundula. Dabei können Albert und Beowulf kochen, die anderen vier nicht. Emil findet Beowulf doof, Dora findet Albert und Clara doof, Clara und Gundula finden beide ebenfalls den Albert doof. Charakterisiere jede Person durch einen sprachlichen Ausdruck, in dem nur auf die Kochfähigkeit und das Dooffinden Bezug genommen wird (insbesondere dürfen in den Charakterisierungen keine Namen vorkommen).

37.3. Aufgaben zum Abgeben.

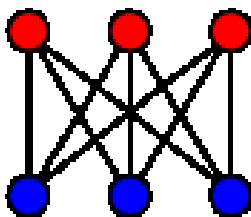
Aufgabe 37.31. (2 Punkte)

Bestimme, ob die durch die Relationstabelle

	A	B	C	D
A	×		×	
B	×	×		
C			×	
D		×		×

beschriebene Relation auf der Menge $\{A, B, C, D\}$ reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch ist.

Aufgabe 37.32. (2 Punkte)



Es sollen drei Häuser jeweils mit Leitungen an Wasser, Gas und Elektrizität angeschlossen werden. Beschreibe eine Möglichkeit, bei der es nur eine Überschneidung gibt.

Aufgabe 37.33. (4 Punkte)

Beim Speeddating nehmen Anna, Berta, Clara, Dora und Elfriede und Richard, Stefan, Thomas, Uwe und Volkmar teil. Auf den Wiedersehwunschlisten schreibt Anna die Namen Richard und Thomas auf, Berta schreibt Richard und Volkmar auf, Clara schreibt alle Namen außer Uwe auf, Dora schreibt Stefan auf und Elfriede schreibt Stefan, Uwe und Volkmar auf. Richard und Thomas schreiben alle Namen auf, Stefan schreibt Dora auf, Uwe schreibt Anna, Berta und Clara auf und Volkmar gibt einen leeren Zettel ab.

- (1) Stelle die Frauenwunschrelation⁹ durch eine Tabelle dar.
- (2) Stelle die Männerwunschrelation durch ein Verbindungsdiagramm dar.
- (3) Was ist die Faser zu Stefan unter der Frauenwunschrelation?
- (4) Was ist die Faser zu Volkmar unter der Männerwunschrelation?
- (5) Was ist die Faser zu Berta unter der Männerwunschrelation?
- (6) Diskutiere die Begriffe Links- und Rechtseindeutigkeit, Links- und Rechtsvollständigkeit für die beiden Wunschrelationen.
- (7) Beschreibe die resultierende Wiedersehensrelation.

Aufgabe 37.34. (6 (1+1+2+1+1) Punkte)

Wir betrachten die Einheitskreisscheibe

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

als Relation auf $\mathbb{R}$.

- (1) Gehört $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$ zur Relation?
- (2) Bestimme die Faser zu 0 in der ersten Komponente.
- (3) Ist die Relation reflexiv, symmetrisch transitiv?
- (4) Wenn (x, y) zur Relation gehört, gehört dann auch $(-y, -x)$ zur Relation?
- (5) Es sei $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Wenn (x, y) zur Relation gehört, gehört dann auch $\varphi(x, y)$ zur Relation?

Aufgabe 37.35. (4 Punkte)

Es sei $M = \{a, b, c\}$ eine dreielementige Menge. Beschreibe vollständig (durch Auflistung aller zugehörigen Paare) die Relation auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$, die durch die Teilmengenbeziehung gegeben ist.

⁹Das ist diejenige Relation, die durch die Wünsche der Frauen festgelegt ist.

Aufgabe 37.36. (8 Punkte)

Klassifiziere (bis auf Isomorphie) die möglichen Gewinnstrukturen bei einer Vierergruppe (wie bei einer Fußballweltmeisterschaft).

(Bemerkung: Es wird also eine vollständige Liste aller möglichen Isomorphietypen verlangt. Die Liste muss systematisch sein und die Vollständigkeit begründet werden.)

38. VORLESUNG - ÄQUIVALENZRELATIONEN

38.1. Äquivalenzrelationen.

In der Mathematik sind Formulierungen, dass mathematische Objekte „äquivalent“ sind, allgegenwärtig. Zumeist geht es um Situationen, wo Objekte zwar nicht gleich, aber doch in gewisser Hinsicht, unter einem bestimmten Gesichtspunkt, als gleichwertig zu betrachten sind. In solchen Kontexten darf man Objekte durch gleichwertige Objekte ersetzen, um eine Situation zu vereinfachen. Es gibt keine allgemeine Definition von „äquivalent“, da es im Allgemeinen eine Vielzahl von konkurrierenden Gesichtspunkten gibt, unter denen man Objekte als äquivalent ansehen möchte oder nicht. Man kann aber strukturelle Bedingungen herausarbeiten, die zueinander äquivalente Objekte stets erfüllen. Insofern ist Äquivalenz eine spezielle Art einer Relation auf einer Menge.

Definition 38.1. Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge M ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, die die folgenden drei Eigenschaften besitzt (für beliebige $x, y, z \in M$).

- (1) Es ist $x \sim x$ (*reflexiv*).
- (2) Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (*symmetrisch*).
- (3) Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (*transitiv*).

Dabei bedeutet $x \sim y$, dass das Paar (x, y) zu R gehört.

Beispiel 38.2. Das Urbeispiel für eine Äquivalenzrelation ist die Gleichheit auf einer beliebigen Menge M . Unter der Gleichheit ist jedes Element nur mit sich selbst äquivalent.

Beispiel 38.3. Auf jeder Menge M gibt es die Äquivalenzrelation, unter der alle Elemente zueinander in Relation stehen.

Beispiel 38.4. Häufig interessiert man sich gar nicht so genau für einzelne Objekte, sondern nur für bestimmte Eigenschaften davon. Objekte, die sich bezüglich einer bestimmten, genau definierten Eigenschaft gleich verhalten, kann man dann (bezüglich dieser Eigenschaft) als äquivalent betrachten. Offenbar handelt es sich dabei um eine Äquivalenzrelation. Wenn man sich beispielsweise nur für die Farbe von Objekten interessiert, so sind alle Objekte, die (exakt) gleichfarbig sind, zueinander äquivalent. Wenn man sich bei Tieren nicht für irgendwelche individuellen Eigenschaften interessiert, sondern

nur für ihre Art, so sind gleichartige Tiere äquivalent, d.h. zwei Tiere sind genau dann äquivalent, wenn sie zur gleichen Art gehören. Studierende kann man als äquivalent ansehen, wenn sie die gleiche Fächerkombination studieren. Vektoren kann man als äquivalent ansehen, wenn sie zum Nullpunkt den gleichen Abstand besitzen, etc. Eine Äquivalenzrelation ist typischerweise ein bestimmter Blick auf bestimmte Objekte, der unter Bezug auf eine gewisse Eigenschaft gewisse Objekte als gleich ansieht.



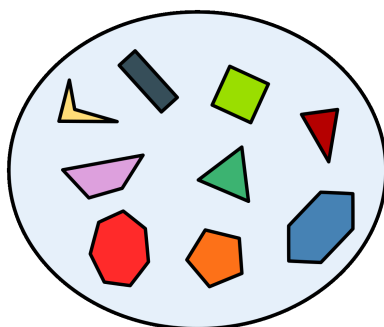
Gnus bilden eine Äquivalenzklasse (eine vollständige Menge aus zueinander äquivalenten Elemente, siehe die nächste Vorlesung für die Definition) bezüglich der Äquivalenzrelation der Gleichartigkeit, ebenso Zebras.

Bei den zuletzt genannten „alltäglichen“ Beispielen muss man etwas vorsichtig sein, da im Allgemeinen die Eigenschaften nicht so genau definiert werden. Im Alltag spielt Ähnlichkeit eine wichtigere Rolle als Gleichheit hinsichtlich einer bestimmten Eigenschaft. Die Ähnlichkeit ist aber keine Äquivalenzrelation, da sie zwar reflexiv und symmetrisch ist, aber nicht transitiv. Wenn A und B zueinander (knapp) ähnlich sind und B und C ebenso, so kann A und C schon knapp unähnlich sein (ebenso: lebt in der Nachbarschaft von, ist verwandt mit, etc.).

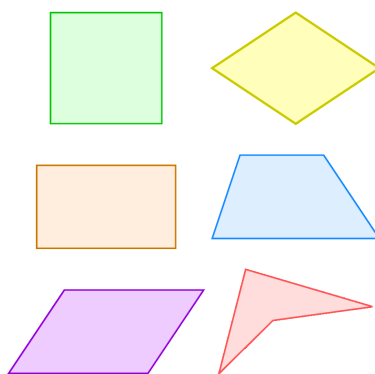
Beispiel 38.5. In der Wohnung liegt eine große Menge von Wäsche herum, die gewaschen werden soll. Natürlich kann nicht alles in den gleichen Waschgang, sondern nur Sachen, die sowohl gleichfarbig sind als auch die gleiche Waschtemperatur vertragen. Dies definiert insgesamt die Äquivalenzrelation der *Waschgangverträglichkeit*. Man kann jetzt die Wäsche dadurch sortieren, dass man waschgangverträgliche Sachen jeweils zu einem Haufen zusammenfasst. So entstehen verschiedene Haufen, die jeweils aus untereinander waschgangverträglichen Sachen bestehen, und zwei Sachen landen genau dann auf dem gleichen Haufen, wenn sie waschgangverträglich sind. Eine wichtige Beobachtung dabei ist, dass die Haufen nicht anhand einer vorgegebenen Liste von möglichen Waschkombinationen entstehen, sondern allein durch die Verträglichkeitsüberprüfung der Objekte untereinander.

Beispiel 38.6. Es sei eine Menge von geometrischen Objekten, beispielsweise eine Menge von n -Ecken, gegeben, die sortiert werden sollen. Die Sortierung soll vollständig sein und jedem Objekt genau einen Typ zuweisen.

Objekte, die den gleichen Typ repräsentieren, heißen äquivalent (im Sinne der Sortierung). Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten, die mehr oder weniger natürlich sind. Eine naheliegende Möglichkeit bei den n -Ecken ist es, sie nach der Anzahl der Ecken zu sortieren. Zwei Objekte sind genau dann äquivalent, wenn sie die gleiche Anzahl an Ecken besitzen. Man kann sie aber auch nach der Farbe oder gemäß der Person, die die Figur gemalt hat, oder nach dem Flächeninhalt sortieren.



Oder man kann eine Menge von gegebenen Vierecken gemäß gewisser (geometrisch relevanter) Eigenschaften sortieren. Wenn man sich nur auf eine Eigenschaft konzentriert, beispielsweise, ob ein Viereck ein Rechteck ist oder nicht, so gibt es nur zwei Typen bzw. Klassen. Man kann natürlich auch eine feinere Einteilung vornehmen. Man beachte dabei allerdings, dass die mathematischen Begriffe inklusiv sind (ein Quadrat ist insbesondere ein Rechteck), eine vollständige Aufteilung ergibt sich also nur dann, wenn man Konzepte wie Quadrat, Rechteck, aber kein Quadrat, Parallelogramm, aber kein Rechteck, etc. verwendet. Es gibt keine natürliche optimale Aufteilung der Menge aller Vierecke. Ein typisches Phänomen bei solchen Klassifikationen ist, dass es einen großen Rest von Objekten gibt, der außerhalb jedes Regularitätskonzeptes liegt.



Beispiel 38.7. Es sei M eine Menge von Aussagen. Dann ist die Äquivalenz, also die logische Gleichwertigkeit, von Aussagen eine Äquivalenzrelation auf dieser Menge. Beispielsweise ist die Aussage $\alpha \rightarrow \beta$ aufgrund des Kontrapositionsprinzips äquivalent zu $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$, oder die Aussage „5 ist ein Teiler von x “ ist äquivalent zu „ x ist ein Vielfaches von 5“ oder zu „ $x \in \mathbb{Z}5$ “.

Beispiel 38.8. Es sei M eine Menge von Termen. Zwei Terme sind nur dann gleich, wenn sie Zeichen für Zeichen gleich sind. Wenn man allerdings einen mathematischen Kontext zugrunde legt, wie, dass sich alle Terme auf einen kommutativen Halbring beziehen sollen, so ergibt sich auf der Menge der Terme eine Äquivalenzrelation dadurch, dass man Terme als äquivalent (gleichwertig) ansieht, wenn sie bei jeder (oder einer bestimmten) Interpretation in einem kommutativen Halbring das gleiche Element liefern. In diesem Sinne sind $a + b$ und $b + a$ oder $(a + b)^2$ und $a^2 + 2ab + b^2$ gleichwertige Terme. Ebenso sind die Bruchterme $\frac{5}{7}$ und $\frac{10}{14}$ als Terme verschieden, ihr Zahlwert in $\mathbb{Q}$ ist aber gleich.

Beispiel 38.9. Es sei ein Körper K und eine Variablenmenge $X_1, \dots, X_n$ fixiert. Wir betrachten die Menge der (endlichen) linearen Gleichungssysteme in diesen Variablen über diesem Körper. Die Äquivalenz von linearen Gleichungssystemen, also die Übereinstimmung der Lösungsmengen (als Teilmengen im K^n), ist dann offenbar eine Äquivalenzrelation auf dieser Menge.

Die Gleichheit bezüglich einer Eigenschaft wird durch folgende mathematische Konstruktion präzisiert.

Lemma 38.10. *Seien M und N Mengen und sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung. Dann wird durch die Festlegung*

$$x \sim y,$$

wenn

$$f(x) = f(y),$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

Beweis. Siehe Aufgabe 38.9. □

Prinzipiell kann man jede Äquivalenzrelation mit Hilfe einer Abbildung beschreiben, siehe die nächste Vorlesung. Wenn die Abbildung f injektiv ist, so ist die durch f auf M definierte Äquivalenzrelation die Gleichheit. Wenn die Abbildung konstant ist, so sind unter der zugehörigen Äquivalenzrelation alle Elemente aus M untereinander äquivalent.

Beispiel 38.11. Es sei K ein Körper. Wir sagen, dass zwei Zahlen $x, y \in K$ „bis (eventuell) auf das Vorzeichen“ übereinstimmen, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist. Dafür schreiben wir kurz

$$x = \pm y.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation. Dabei ist die Reflexivität unmittelbar klar, die Symmetrie erhält man, indem man die Gleichung $x = -y$ mit -1 multipliziert und $(-1)(-1) = 1$ ausnutzt. Ähnlich wird auch die Transitivität begründet. Diese Äquivalenzrelation lässt sich auch einfach im Sinne von Lemma 38.10 beschreiben. Es ist nämlich $x = \pm y$ genau dann, wenn $x^2 = y^2$ gilt. Dabei ist die Hinrichtung klar. Für die Rückrichtung sei also $x^2 = y^2$. Bei $x = 0$ ist auch $y = 0$ und die Aussage gilt, seien also die Zahlen von 0 verschieden. Durch Division durch y^2 erhält man

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1.$$

Wegen $u^2 - 1 = (u - 1)(u + 1)$ und Lemma 23.12 sind aber 1 und -1 die einzigen Lösungen der Gleichung

$$u^2 = 1$$

in einem Körper, und somit ist $\frac{x}{y} = \pm 1$ und $x = \pm y$. In einem angeordneten Körper gilt darüber hinaus auch $x = \pm y$ genau dann, wenn $|x| = |y|$ gilt. Es gibt also im Allgemeinen mehrere Funktionen, mit denen man eine Äquivalenzrelation erfassen kann.

Beispiel 38.12. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Wir betrachten die Gaußklammer auf K , also die Abbildung

$$\lfloor \cdot \rfloor: K \longrightarrow \mathbb{Z}, t \longmapsto \lfloor t \rfloor.$$

Eine Zahl t wird also auf die größte ganze Zahl abgebildet, die kleiner oder gleich t ist (die „Vorkommazahl“, falls die Zahl positiv ist¹⁰). Dabei wird das gesamte ganzzahlige einseitig offene Intervall

$$[n, n + 1) = \{x \in K \mid n \leq x < n + 1\}$$

auf $n \in \mathbb{Z}$ abgebildet. Bezüglich dieser Abbildung sind also zwei Zahlen genau dann äquivalent, wenn sie im gleichen ganzzahligen Intervall liegen.

Statt dem ganzzahligen Anteil kann man auch den (nichtnegativen) Bruchanteil (bei positiven Zahlen die „Nachkommazahl“) betrachten. Das ist die Abbildung

$$K \longrightarrow [0, 1), t \longmapsto t - \lfloor t \rfloor.$$

Unter der durch diese Abbildung definierten Äquivalenzrelation sind zwei Zahlen genau dann gleich, wenn sie den gleichen Bruchanteil besitzen, und das ist genau dann der Fall, wenn ihre Differenz eine ganze Zahl ist.

Wenn man rationale Zahlen als gemischte Brüche schreibt, so geht es um die Frage, ob der ganzzahlige Anteil oder ob der Bruchanteil übereinstimmt.

¹⁰Mit dieser Formulierung muss man bei negativen Zahlen vorsichtig sein. Die Zahl $-0,7 = -1 + 0,3$ besitzt die Gaußklammer -1 und den Bruchanteil $0,3$.



Unter der Äquivalenzrelation „erreichbar auf dem Landweg“ sind Inseln und Kontinente die Äquivalenzklassen.

Beispiel 38.13. Es sei eine Situation gegeben, wo gewisse Orte (oder Objekte) von gewissen anderen Orten aus erreichbar sind oder nicht. Die Erreichbarkeit kann dabei durch die Wahl eines Verkehrsmittels oder durch eine abstraktere (Bewegungs)-Vorschrift festgelegt sein. Solche Erreichbarkeitsrelationen liefern häufig eine Äquivalenzrelation. Dass ein Ort von sich selbst aus erreichbar ist, sichert die Reflexivität. Die Symmetrie der Erreichbarkeit besagt, dass wenn man von A nach B kommen kann, dass man dann auch von B nach A kommen kann. Das ist nicht für jede Erreichbarkeit selbstverständlich, für die meisten aber schon. Die Transitivität gilt immer dann, wenn man die Bewegungsvorgänge hintereinander ausführen kann, also zuerst von A nach B und dann von B nach C . Wenn erreichbar beispielsweise dadurch gegeben ist, dass man auf dem Landweg von einem Ort zu einem anderen kommen kann, so sind zwei Ortspunkte genau dann äquivalent, wenn sie auf der gleichen Insel (oder dem gleichen Kontinent) liegen.

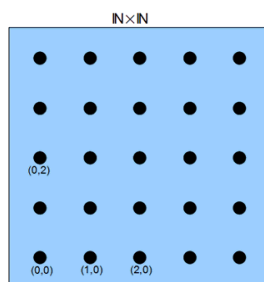
Beispiel 38.14. Es sei $d \in \mathbb{N}$ fixiert. Wir betrachten auf $\mathbb{Z}$ die Äquivalenzrelation $\sim$, bei der zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ als äquivalent betrachtet werden, wenn ihre Differenz $a - b$ ein Vielfaches von d ist. Zwei Zahlen sind also zueinander äquivalent, wenn man von der einen Zahl zu der anderen durch Sprünge der Sprungweite d gelangen kann. Unter Verwendung der Division mit Rest bedeutet dies, dass zwei Zahlen zueinander äquivalent sind, wenn sie bei Division durch d den gleichen Rest ergeben.

Mit Hilfe der Abbildung $f: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1, \dots, d-1\}$, die jeder ganzen Zahl den Rest bei Division durch d zuordnet, kann man das vorstehende Beispiel auch direkt mit Lemma 38.10 erfassen.

Beispiel 38.15. Wir betrachten die Produktmenge $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die wir uns als ein Punktgitter vorstellen. Wir fixieren die Sprünge (man denke an Springmäuse, die alle diese Sprünge ausführen können)

$$\pm(2, 0) \text{ und } \pm(3, 3),$$

und sagen, dass zwei Punkte $P = (a, b), Q = (c, d) \in M$ äquivalent sind, wenn man ausgehend von P den Punkt Q mit einer Folge von solchen Sprüngen erreichen kann. Dies ist eine Äquivalenzrelation (dafür ist entscheidend, dass bei den Sprüngen auch der entgegengesetzte Sprung dazu gehört). Typische Fragestellungen sind: Wie kann man äquivalente Felder charakterisieren, wie entscheiden, ob zwei Felder äquivalent sind oder nicht?



Visualisierung des Beispiels

Beispiel 38.16. Es sei M die Menge aller *Dreiecke* (in der reellen Ebene). Zwei Dreiecke D_1 und D_2 heißen *kongruent*, wenn es eine (eventuell uneigentliche) *Bewegung* gibt, die das eine Dreieck in das andere Dreieck überführt. Eine Bewegung soll dabei die Längen und die Winkel erhalten. Eine solche Bewegung setzt sich zusammen aus einer Verschiebung, einer Achsenspiegelung und einer Drehung¹¹ (in beliebiger Reihenfolge, beliebig oft angewendet). Die Kongruenz von Dreiecken ist eine Äquivalenzrelation. Ein Dreieck ist zu sich selbst kongruent, da es durch die identische Bewegung in sich überführt wird. Wenn D_1 durch eine bestimmte Bewegung β in D_2 überführt wird, so wird durch die entgegengesetzte Bewegung, also β^{-1} , das zweite Dreieck D_2 in D_1 überführt. Die Kongruenz ist also symmetrisch. Wenn drei Dreiecke D_1, D_2, D_3 gegeben sind, wobei D_1 zu D_2 und D_2 zu D_3 kongruent sind, so gibt es eine Bewegung β , die D_1 in D_2 überführt, und eine Bewegung γ , die D_2 in D_3 überführt. Dann hat die Gesamtbewegung $\gamma \circ \beta$ die Eigenschaft, dass sie insgesamt D_1 in D_3 überführt. Ebenso ist die *eigentliche Kongruenz*, bei der nur eigentliche Bewegungen (also keine Spiegelungen) erlaubt sind, eine Äquivalenzrelation.

38. ARBEITSBLATT

38.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 38.1. Wir betrachten die Relation auf der Menge der quadratischen $n \times n$ -Matrizen, bei der Matrizen M und N als äquivalent angesehen werden, wenn es Elementarmatrizen $E_1, \dots, E_k$ mit $M = E_k \circ \dots \circ E_1 \circ N$ gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

38.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 38.2. Es sei M die Menge der Leute im Kurs. Bestimme für die folgenden, durch eine Eigenschaft festgelegten Äquivalenzrelationen auf M , wer zu wem äquivalent ist.

¹¹Diese Abbildungen sind aus der Schule bekannt.

- (1) Hat im gleichen Monat Geburtstag.
- (2) Hat das gleiche Zweitfach (neben Mathematik).
- (3) Wohnt in der gleichen Stadt.

Aufgabe 38.3. Wir betrachten die folgende Menge, deren Elemente gewisse Zahlenmengen sind.

$$M = \{\{2, 5, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 5, 7, 8\}, \{2, 7\}, \{4, 10, 14\}, \{3\}, \{8, 9\}, \{12, 15, 23\}\}.$$

Zeige, dass für Elemente $S, T \in M$ durch $S \sim T$, falls S und T die gleiche Anzahl an Elementen haben, eine Äquivalenzrelation auf M gegeben ist. Welche Elemente sind zueinander äquivalent, welche nicht?

Aufgabe 38.4. Wir betrachten auf der Menge der Tiere die Äquivalenzrelation, bei der zwei Tiere als äquivalent angesehen werden, wenn sie die gleiche Anzahl an Gliedmaßen besitzen. Welche der folgenden Tiere sind zueinander in diesem Sinne äquivalent?

Ein Elefant, eine Schlange, eine Forelle, ein Delphin, eine Blindschleiche, ein Schimpanse, ein Tausendfüßer, ein Wenigfüßer, ein Eichhörnchen, ein Erdferkel, eine Ameise, ein Raptor, ein Tetrapode, ein Mensch, ein Pinguin.



Aufgabe 38.5. In der Biologie werden die Lebewesen mittels verschiedener (mehr oder weniger feiner) Einteilungen klassifiziert. Wie nennt man die Rangstufen, zu denen der Mensch gehört? Man gebe für jede Rangstufe ein Lebewesen an, das sich bezüglich dieser Rangstufe vom Menschen unterscheidet, aber bezüglich der darüberliegenden Rangstufe mit dem Menschen übereinstimmt.

Aufgabe 38.6. Wir sagen, dass Tage zueinander äquivalent sind, wenn sie auf den gleichen Wochentag fallen. Welche der folgenden Tage sind zueinander äquivalent, welche nicht?

- (1) Der 11.11.1877,
- (2) Der 7.11.1877,
- (3) Der 14.11.1877,
- (4) Der 13.11.1877,
- (5) Der 30.10.1877,
- (6) Der 2.12.1877,
- (7) Der 6.1.1878,
- (8) Der 20.11.1877,
- (9) Der 23.10.1877,
- (10) Der 6.12.1877.

Aufgabe 38.7. Betrachte die zweielementige Menge $M = \{a, b\}$.

- (1) Bestimme alle Relationen auf M .
- (2) Welche dieser Relationen sind symmetrisch, reflexiv, transitiv?
- (3) Bei welchen Relationen handelt es sich um Äquivalenzrelationen?

Aufgabe 38.8. Es seien p und q zwei nichtäquivalente Aussagen. Welche der folgenden zusammengesetzten Aussagen sind zueinander äquivalent, welche nicht?

$$p, q, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg p \vee q, p \vee \neg p.$$

Aufgabe 38.9.*

Seien M und N Mengen und sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung. Zeige, dass durch die Festlegung

$$x \sim y,$$

wenn

$$f(x) = f(y),$$

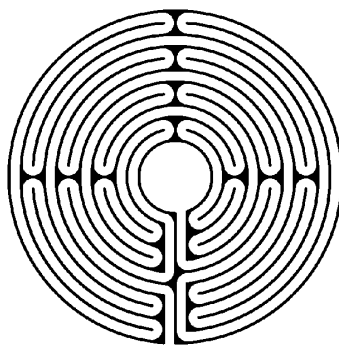
eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird.

Aufgabe 38.10. Zeige, dass die folgende Relation eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist:

$$x \sim y, \text{ falls } 5 \text{ teilt } x - y.$$

Welche Zahlen sind bei dieser Relation äquivalent zueinander?

Aufgabe 38.11. Wir betrachten auf dem weißen Teil des angegebenen Labyrinths die Äquivalenzrelation, die dadurch festgelegt ist, dass zwei Punkte als äquivalent gelten, wenn man durch eine stetige Bewegung (also ohne Sprünge) von einem Punkt zum anderen Punkt gelangen kann. Zeige, dass ein Punkt außerhalb des äußeren Kreises und ein Punkt des inneren Kreises zueinander äquivalent sind.



Aufgabe 38.12. Wir betrachten die Produktmenge $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Wir fixieren wie in Beispiel 38.15 die Sprünge

$$\pm(2, 0) \text{ und } \pm(3, 3),$$

und sagen, dass zwei Punkte $P = (a, b)$, $Q = (c, d) \in M$ äquivalent sind, wenn man ausgehend von P den Punkt Q mit einer Folge von diesen Sprüngen aus erreichen kann.

- (1) Zeige, dass die Punkte $P = (4, -3)$ und $P = (3, 6)$ zueinander äquivalent sind.
- (2) Zeige, dass die Punkte $P = (4, -3)$ und $P = (3, 7)$ nicht zueinander äquivalent sind.

Aufgabe 38.13. Die Äquatorflöhe leben auf den vollen Metern eines 40000 Kilometer langen kreisrunden Bandes. Sie verfügen nur über einen Sprung, der sie sieben Meter nach vorne oder nach hinten bringt (und der beliebig oft wiederholt werden kann). Können sich alle Flöhe begegnen?

Aufgabe 38.14. Wir betrachten die rationalen Zahlen

$$\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 3, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, 4, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{5}.$$

- (1) Welche dieser Zahlen sind unter der Gaußklammeräquivalenzrelation („Vorkommaäquivalenzrelation“, siehe Beispiel 38.12) zueinander äquivalent?
- (2) Welche dieser Zahlen sind unter der Bruchanteiläquivalenzrelation („Nachkommaäquivalenzrelation“) zueinander äquivalent?

Aufgabe 38.15.*

Es sei K ein Körper und $U \subseteq K^n$ ein Untervektorraum. Wir betrachten die Relation auf dem K^n , die durch

$$v_1 \sim v_2 \text{ genau dann, wenn } v_1 - v_2 \in U$$

definiert ist. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 38.16. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die folgende Relation auf $\text{Mat}_n(K)$.

$$M \sim N, \text{ falls es eine invertierbare Matrix } B \text{ gibt mit } M = BNB^{-1}.$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 38.17.*

Sei G eine Gruppe. Betrachte die Relation $\sim$ auf G , die durch

$$x \sim y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x = y^{-1}$$

erklärt ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 38.18. Es sei M eine Menge und $(R_i)_{i \in I}$ eine Familie von Äquivalenzrelationen auf M . Zeige, dass durch den Durchschnitt $R := \bigcap_{i \in I} R_i$ wieder eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist. Gilt dies auch für $\bigcup_{i \in I} R_i$?

38.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 38.19. (3 Punkte)

Zeige, dass die folgenden Äquivalenzrelationen auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ übereinstimmen.

- (1) Die Einerziffer in der Zifferndarstellung zur Basis 7 von a und b ist gleich.
- (2) Die Differenz $a - b$ ist ein Vielfaches der 7.

(3) a und b haben bei der Division durch 7 den gleichen Rest.

Aufgabe 38.20. (2 Punkte)

Wir betrachten für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ die symmetrische Differenz

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Wir setzen $A \sim B$, falls $A \triangle B$ endlich ist. Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ definiert wird.

Aufgabe 38.21. (4 Punkte)

Alle Springmäuse leben in $\mathbb{Z}^2$ und verfügen über zwei Sprünge, nämlich den Sprung $\pm(3, 4)$ und den Sprung $\pm(5, 2)$. Wie viele Springmaus-Populationen gibt es? Die Springmäuse Albert, Beate, Erich, Heinz, Sabine und Frida sitzen in den Positionen

$$(14, 11), (13, 15), (17, 12), (15, 19), (16, 16) \text{ und } (12, 20).$$

Welche Springmäuse können sich begegnen?

Aufgabe 38.22. (3 Punkte)

Es seien M_1 und M_2 Mengen und $\sim_1$ sei eine Äquivalenzrelation auf M_1 und $\sim_2$ sei eine Äquivalenzrelation auf M_2 . Betrachte die Relation $\sim$ auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$, die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ und } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt,}$$

definiert ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Zeige ferner, dass auf $M_1 \times M_2$ die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ oder } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt,}$$

definierte Relation keine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 38.23. (3 Punkte)

Seien M und N Mengen und sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung. Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf N . Zeige, dass durch $x \equiv x'$, falls $f(x) \sim f(x')$ gilt, eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird.

39. VORLESUNG - QUOTIENTENMENGEN

39.1. Äquivalenzklassen und Repräsentantensysteme.

Eine Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M kann auch als Zerlegung der Menge M aufgefasst werden. Hierzu ist der Begriff der *Äquivalenzklasse* nützlich.

Definition 39.1. Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation und $x \in M$. Dann ist

$$[x] := \{y \in M \mid (x, y) \in R\}$$

die *Äquivalenzklasse* von x bezüglich R .

In Worten: $[x]$ ist die Teilmenge aller Elemente von M , die zu x äquivalent sind, also einfach die Faser zu x . Jede Teilmenge $S \subseteq M$, die die Gestalt $S = [x]$ für ein $x \in M$ besitzt, heißt Äquivalenzklasse. Jedes Element $y \in [x]$ heißt ein *Repräsentant* für die Äquivalenzklasse $[x]$. Insbesondere ist x selbst ein Repräsentant für die Klasse $[x]$, doch ist dies keineswegs der einzige oder der „beste“ Repräsentant.

Definition 39.2. Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M . Eine Teilmenge $T \subseteq M$ heißt ein *Repräsentantensystem* für die Äquivalenzrelation, wenn es für jede Äquivalenzklasse genau ein Element aus T aus dieser Klasse gibt.

Beispiel 39.3. Wir knüpfen an Beispiel 38.5 an. Die gesamte Wäsche haben wir gemäß der Waschverträglichkeit sortiert und es haben sich dabei verschiedene Haufen ergeben, wobei zwei Kleidungsstücke genau dann auf dem gleichen Haufen gelandet sind, wenn sie zueinander waschverträglich sind. Die Haufen sind also die Äquivalenzklassen. Die Äquivalenzklasse zu einem bestimmten Kleidungsstück x besteht aus allen zu x waschverträglichen Kleidungsstücken, also aus allen Kleidungsstücken, die zusammen mit x auf dem gleichen Haufen liegen. Wenn wir aus jedem Haufen ein bestimmtes Kleidungsstück auswählen, so haben wir ein Repräsentantensystem für die Waschverträglichkeit.

Bemerkung 39.4. Wir betrachten in einigen Beispielen von Äquivalenzrelationen die Äquivalenzklassen. Wenn die Äquivalenzrelation die Gleichheit ist, so sind alle Äquivalenzklassen einelementig und die Äquivalenzklasse zu x ist einfach die einelementige Menge $[x] = \{x\}$. Im anderen Extremfall, wenn alle Elemente zueinander äquivalent sind, so gibt es nur eine einzige Äquivalenzklasse, nämlich die Gesamtmenge M .

Bei der Äquivalenzrelation auf der Menge der Bruchterme, die durch die Wertgleichheit in $\mathbb{Q}$ gegeben ist, besteht die Äquivalenzklasse zu $\frac{a}{b}$ aus allen anderen Bruchdarstellungen dieser Zahl, also beispielsweise aus $\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \dots$. Ein Repräsentantensystem liegt in der Menge aller gekürzten Brüche vor.

Wenn eine Äquivalenzrelation auf M durch eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ im Sinne von Lemma 38.10 festgelegt ist, so sind die Äquivalenzklassen die nichtleeren Fasern der Abbildung. Die Äquivalenzklasse zu $x \in M$ besteht aus dem Urbild von $f(x)$, ist also gleich

$$f^{-1}(f(x)) = \{y \in M \mid f(y) = f(x)\}.$$

Um ein Repräsentantensystem zu erhalten, muss man aus jeder Faser ein Element auswählen. Im Allgemeinen gibt es hier kein besonders einfaches Repräsentantensystem.

In Beispiel 38.11 besteht die Äquivalenzklasse zu $x \in K$ aus $\{x, -x\}$ (wobei diese beiden Zahlen nicht unbedingt, wie etwa bei $x = 0$, verschieden sein müssen). Wenn K angeordnet ist, so kann man die nichtnegativen Elemente $K_{\geq 0}$ als ein übersichtliches Repräsentantensystem heranziehen.

In Beispiel 38.12 bei der durch die Gaußklammer gegebenen Äquivalenzrelation besteht die Äquivalenzklasse zu x aus dem halboffenen Intervall

$$[x], [x] + 1[= \{y \in K \mid y \geq x \text{ und } y < x + 1\}.$$

Ein besonders einfaches Repräsentantensystem ist durch die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ gegeben.

Bei der durch das Betrachten des Bruchanteils (der Nachkommazahl) gegebenen Äquivalenzrelation auf K besteht die Äquivalenzklasse zu x aus der Menge $x + \mathbb{Z}$, also aus allen Zahlen, die man von x aus mit einem ganzzahligen Schritt erreichen kann. Die Menge der Zahlen zwischen 0 und 1 einschließlich der 0 und ausschließlich der 1, also der Zahlen aus dem halboffenen Intervall $[0, 1[$, ist ein Repräsentantensystem.

In Beispiel 38.13, der Erreichbarkeitsrelation auf dem Landweg, besteht die Äquivalenzklasse zu x aus der Insel bzw. dem Kontinent, auf der bzw. dem der Punkt x liegt.

Beispiel 39.5. Es sei $d \in \mathbb{N}$ fixiert. Wir bestimmen auf $\mathbb{Z}$ die Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation $\sim$, bei der zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ als äquivalent betrachtet werden, wenn ihre Differenz $a - b$ ein Vielfaches von d ist. Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ kann man einfach die zugehörige Äquivalenzklasse finden, sie besteht aus allen Zahlen der Form

$$a + \mathbb{Z}d = \{a + nd \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

In jeder Äquivalenzklasse gibt es ein Element (einen Vertreter, einen Repräsentanten) zwischen 0 und $d - 1$, da ja insbesondere a zu seinem Rest bei der Division durch d äquivalent ist. Andererseits sind bei

$$0 \leq r < s \leq d - 1$$

die Äquivalenzklassen zu r und zu s verschieden. Es ist nämlich

$$(r + \mathbb{Z}d) \cap (s + \mathbb{Z}d) = \emptyset,$$

da aus

$$r + nd = s + md$$

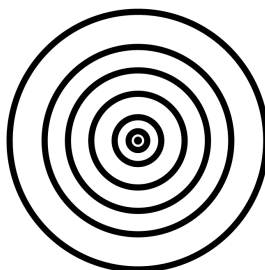
sofort

$$s - r = (n - m)d$$

folgt, was wegen

$$0 < s - r < d$$

nicht sein kann.



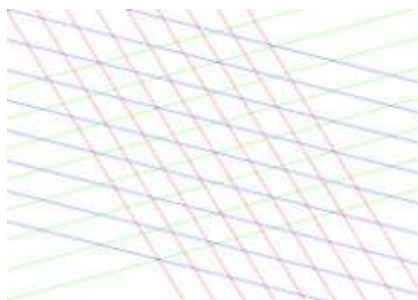
Beispiel 39.6. In der Ebene E sei ein bestimmter Punkt M markiert. Wir betrachten die Äquivalenzrelation, bei der zwei Punkte P und Q als äquivalent gelten, wenn sie zu M den gleichen Abstand besitzen. Dies wird durch

$$d(P, M) = d(Q, M)$$

ausgedrückt. Dies ist eine Äquivalenzrelation, wie man direkt überprüfen kann und was auch aus Lemma 38.10 folgt, da man ja die Situation mittels der Abbildung

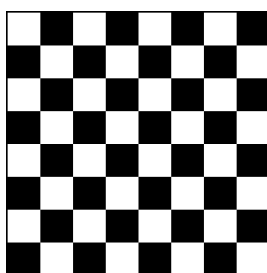
$$E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, P \longmapsto d(P, M),$$

interpretieren kann. Die Äquivalenzklasse zu einem Punkt P besteht aus allen Punkten der Ebene, die in ihrem Abstand zu M mit $d(P, M)$ übereinstimmen. Dies ist genau der Kreis mit Mittelpunkt M durch den Punkt P . Die Äquivalenzklassen sind also die konzentrischen Kreise um den Mittelpunkt M , wobei man hier den Punkt $\{M\}$ als Kreis mit Radius 0 mitzählen muss (man kann sich darüber streiten, ob das ein Kreis ist, jedenfalls ist diese einpunktige Menge hier eine Äquivalenzklasse).



Drei Äquivalenzklassen für die durch die Parallelität gegebene Äquivalenzrelation.

Beispiel 39.7. Auf der Menge aller Geraden in der Ebene kann man die Parallelität als Äquivalenzrelation auffassen. Eine Gerade ist zu sich selbst parallel, die Relation ist offenbar symmetrisch und wenn G_1 zu G_2 parallel und G_2 zu G_3 parallel ist, so ist auch G_1 zu G_3 parallel. Die Äquivalenzklasse zu einer Geraden G besteht aus allen zu G parallelen Geraden, diese bilden eine parallele Geradenschar. Wir fixieren einen Punkt M in der Ebene. Dann gibt es zu jeder Geraden G eine dazu parallele Gerade G' , die durch den Punkt M verläuft. Man kann also jede Äquivalenzklasse durch eine Gerade durch den Punkt M repräsentieren, und zwar eindeutig, da parallele Geraden, die durch einen Punkt verlaufen, übereinstimmen müssen. Die Menge der Geraden durch M bildet also ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzrelation der Parallelität.



Beispiel 39.8. Beim Schach darf ein Läufer diagonal in jede Richtung beliebig weit ziehen. Zwei Felder heißen läuferäquivalent, wenn man von dem einen Feld mit endlich vielen Läuferzügen zu dem anderen Feld gelangen kann. Das ist eine Äquivalenzrelation. Da sich bei einem Diagonalzug die Farbe des Feldes nicht ändert, bleibt ein Läufer, der auf einem weißen Feld steht, stets auf einem weißen Feld. Zugleich kann ein Läufer, der auf einem weißen Feld steht, jedes weiße Feld (grundsätzlich, ohne Beachtung von anderen Figuren in einer Stellung) erreichen. Deshalb gibt es zwei Äquivalenzklassen: die weißen Felder und die schwarzen Felder, und entsprechend spricht man von weißfeldrigen Läufern und schwarzfeldrigen Läufern (das ist nicht die Farbe der Figur).

39.2. Quotientenmenge und kanonische Abbildung.

Beispiel 39.9. Wir knüpfen an Beispiel 38.5 und Beispiel 39.3 an. Die Wäsche liegt in verschiedenen waschgangverträglichen Haufen vor. Für den weiteren Ablauf (beispielsweise in welcher Reihenfolge gewaschen wird) kommt es auf die Einzelsachen nicht mehr an, sondern nur noch auf die einzelnen Haufen. Es ist daher sinnvoll, die entstandene Situation dadurch zu

erfassen, dass man die Menge der Haufen bildet. Jeder Haufen wird zu genau einem Element in dieser Haufenmenge. Das Sortieren kann man dann auffassen als eine Abbildung von der Wäschemenge in die Haufenmenge, wobei jedem Wäschestück der zugehörige Haufen zugeordnet wird. Bei diesem Übergang werden waschgangverträgliche Sachen miteinander identifiziert. Dies ist die Grundidee der Quotientenmenge und der kanonischen Abbildung.

Definition 39.10. Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation. Dann heißt

$$M/R := \{[x] \mid x \in M\}$$

die *Quotientenmenge* von R .

Die Quotientenmenge ist also einfach die Menge der Äquivalenzklassen. Wenn man die Äquivalenzrelation mit $\sim$ bezeichnet, so schreibt man $M/\sim$ für die Quotientenmenge. Das Konzept Quotientenmenge ist nicht einfach, allein schon deshalb, da es nach Definition eine Menge von Mengen, nämlich der Äquivalenzklassen ist. Von der Handhabung und der Vorstellung her betrachtet man aber diese Äquivalenzklassen eher als neue „Punkte“ in einer neuen Menge, die eben erst durch die Konstruktion entsteht. Auch die Beziehung zu einem Repräsentantensystem ist nicht ganz einfach. Wenn man ein Repräsentantensystem $T \subseteq M$ für eine Äquivalenzrelation hat, so ergibt sich eine bijektive Abbildung $T \rightarrow Q$ zwischen dem Repräsentantensystem und der Quotientenmenge. Diese kann zu Verwechslungen führen. Wichtig ist, dass ein Repräsentantensystem von einer Wahl abhängt und nur selten kanonisch ist, während die Quotientenmenge nicht von Wahlen abhängt. Wenn es allerdings ein besonders einfaches Repräsentantensystem gibt, so übernimmt man die Bezeichnungen für die Elemente wiederum auch als Bezeichnungen für die Elemente der Quotientenmenge.

Man muss aber auch sagen, dass die Abstraktion, die in der Quotientenmenge zum Ausdruck kommt, in vielen Kontexten anzutreffen ist. Beispielsweise gibt es die Menge der Tiere und die Menge der Tierarten. Hinter Tierart steckt doch eine andere Idee als die Menge der zu unter diese Tierart fallenden Einzeltiere oder die Idee, aus jeder Tierart einen Vertreter auszuwählen. Die Menge aller geraden und die Menge aller ungeraden Zahlen wird durch das Eigenschaftspaar gerade oder ungerade deutlicher gemacht. Entsprechend führt die Parallelität zur Idee der „Richtung“ einer Geraden, u.s.w.

Im oben angeführten Beispiel 39.5 besteht die Quotientenmenge aus den Restklassen $[0], [1], \dots, [d-1]$, wobei die Bezeichnungen des einfachsten Repräsentantensystems übernommen werden. Die konzentrischen Kreise um den Punkt M aus Beispiel 39.6 kann man mit ihrem Radius identifizieren, d.h. die Quotientenmenge steht in einer natürlichen Korrespondenz zu $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Auch dies ist eine wichtige Beobachtung, dass die Quotientenmenge häufig eine neue Struktur besitzt oder in einer natürlichen Beziehung zu einem anderen mathematischen Gebilde steht, was von der Ausgangsmenge her nicht unmittelbar ersichtlich ist. So kann man auch die Menge der Geraden durch

einen Punkt M , die ein Repräsentantensystem für die Parallelität ist, in einem weiteren Schritt mit den Punkten auf einem halboffenen Halbkreis um M identifizieren, um eine geometrische gehaltvolle Interpretation der Quotientenmenge zu erhalten. Die Quotientenmenge zur Äquivalenzrelation des Läufers besteht nur aus den Feldfarben weiß und schwarz.

Definition 39.11. Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation und M/R die Quotientenmenge. Die Abbildung

$$q_R: M \longrightarrow M/R, x \longmapsto [x],$$

heißt *kanonische Projektion* von R .

Man spricht auch von der *Identifizierungsabbildung*, da unter dieser Abbildung äquivalente Elemente auf das gleiche Element, ihre Klasse, abgebildet werden.

Lemma 39.12. Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M mit den Äquivalenzklassen $[x]$ und der Quotientenmenge $M/\sim$. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Es ist $x \sim y$ genau dann, wenn $[x] = [y]$ ist, und dies gilt genau dann, wenn $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.
- (2) $M = \bigcup_{[x] \in M/\sim} [x]$ ist eine disjunkte Vereinigung.
- (3) Die kanonische Projektion

$$q: M \longrightarrow M/\sim, x \longmapsto [x],$$

ist surjektiv.

- (4) Es ist $q^{-1}([x]) = [x]$.
- (5) Sei $\varphi: M \rightarrow W$ eine Abbildung mit $\varphi(x) = \varphi(y)$ für alle $x, y \in M$ mit $x \sim y$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{\varphi}: M/\sim \rightarrow W$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ q$.

Beweis. (1) Seien x und y äquivalent und $u \in [x]$. Dann ist $x \sim u$ und nach der Transitivität auch $y \sim u$, also $u \in [y]$. Damit stimmen die Äquivalenzklassen überein. Die Implikation von der Mitte nach rechts ist klar, da wegen $x \sim x$ Äquivalenzklassen nicht leer sind. Sei nun $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, und sei z ein Element im Durchschnitt. Dann ist $x \sim z$ und $y \sim z$ und wegen der Transitivität ist $x \sim y$.

- (2) Wegen der Reflexivität ist $x \in [x]$ und daher ist $M = \bigcup_{[x] \in M/\sim} [x]$. Wegen Teil (1) ist die Vereinigung disjunkt.
- (3) Die Surjektivität ist klar aufgrund der Definition der Quotientenmenge, und da x auf die Klasse $[x]$ geschickt wird.
- (4) Es ist

$$\begin{aligned} q^{-1}([x]) &= \{y \in M \mid q(y) = [x]\} \\ &= \{y \in M \mid [y] = [x]\} \\ &= \{y \in M \mid y \sim x\} \\ &= [x]. \end{aligned}$$

- (5) Sei $[x] \in M/\sim$ gegeben. Die einzige Möglichkeit für $\bar{\varphi}$ ist $\bar{\varphi}([x]) := \varphi(x)$ zu setzen. Es muss aber gezeigt werden, dass diese Abbildung überhaupt wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten ist. Sei hierzu $[x] = [y]$, also $x \sim y$. Dann ist nach der Voraussetzung an φ aber $\varphi(x) = \varphi(y)$.

□

Bei der Eigenschaft (2) sagt man auch, dass die Äquivalenzrelation eine *Partition* der Menge bewirkt. Die Eigenschaft (4) bedeutet insbesondere, dass man zu jeder Äquivalenzrelation eine Abbildung, nämlich die kanonische Abbildung in die Quotientenmenge, angeben kann, derart, dass Elemente genau dann äquivalent sind, wenn sie unter der Abbildung den gleichen Wert besitzen. Damit ist gezeigt, dass man jede Äquivalenzrelation als eine Äquivalenzrelation zu einer Abbildung im Sinne von Lemma 38.10 erhalten kann.

Bemerkung 39.13. Zu einer Abbildung $f: M \rightarrow N$ und der zugehörigen Äquivalenzrelation $\sim$ im Sinne von Lemma 38.10 gibt es nach Lemma 39.12 eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\psi: M/\sim \longrightarrow N$$

mit

$$f = \psi \circ p.$$

Diese ist sogar injektiv.

Beispiel 39.14. Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Wir setzen $M = K^{n+1} \setminus \{0\}$. Der K^{n+1} ist ein Vektorraum, wobei die Skalarmultiplikation von $\lambda \in K$ und $x \in K^{n+1}$ mit $\lambda \cdot x$ bezeichnet wird. Sei weiter

$$R = \{(x, y) \in M \times M \mid \text{es gibt ein } \lambda \in K \setminus \{0\} \text{ mit } \lambda \cdot x = y\}.$$

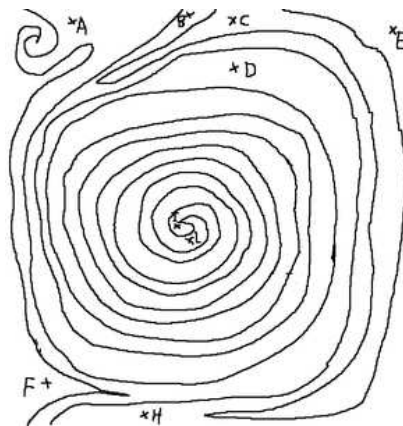
Zwei Punkte werden also als äquivalent erklärt, wenn sie durch Skalarmultiplikation mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ ineinander überführt werden können. Ebenso könnte man sagen, dass zwei Punkte als äquivalent gelten, wenn sie dieselbe Gerade durch den Nullpunkt definieren.

Dass wirklich eine Äquivalenzrelation vorliegt, sieht man so. Die Reflexivität folgt aus $x = 1x$ für jedes $x \in M$. Zur Symmetrie sei xRy , d.h. es gibt ein $\lambda \neq 0$ mit $\lambda x = y$. Dann gilt aber auch $y = \lambda^{-1}x$, da ja λ ein Inverses besitzt. Zum Nachweis der Transitivität sei xRy und yRz angenommen, d.h. es gibt $\lambda, \delta \neq 0$ mit $\lambda x = y$ und $\delta y = z$. Dann ist insgesamt $z = \delta y = (\delta \lambda)x$ mit $\delta \lambda \neq 0$. Die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation sind die einzelnen Geraden durch den Nullpunkt (aber ohne den Nullpunkt). Die Quotientenmenge heißt *projektiver Raum* über K (der Dimension n) und wird mit $\mathbb{P}_K^n$ bezeichnet.

39. ARBEITSBLATT

39.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 39.1. Wir betrachten auf dem weißen Teil des angegebenen Labyrinths die Äquivalenzrelation, die dadurch festgelegt ist, dass zwei Punkte als äquivalent gelten, wenn man durch eine stetige Bewegung (also ohne Sprünge) von einem Punkt zum anderen Punkt gelangen kann. Bestimme, welche der markierten Punkte zueinander äquivalent sind. Skizziere die Äquivalenzklassen des Labyrinths durch verschiedene Farben.



39.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 39.2. Es sei M die Menge der Menschen und R die Verwandtschaftsrelation darauf, die wir großzügig als transitiv interpretieren. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

Aufgabe 39.3. In der Klasse 7c herrscht ein rigides Cliquensystem, jeder Schüler und jede Schülerin gehört genau einer Clique an. Es gibt die „Borussen-Bande“ (Heinz Ngolo, Mustafa Müller, Veronika Zaitsev, Bernd Buxtehude, Paola Rodrigues und Peter Dembele), die „Eisfreunde Sonne“ (Lucy Sonnenschein, Fred Feuerstein, Natascha Schleckmaul, Frodo Gletscherzunge) die „Nutty Nerds“ (Gabi Hochster, Primo von Hinten), das „Anarcho-Syndikat“ (Anna-Lena Müller, Annegret Maier, Ann-Kathrin Schmitt, Anabelle Belami, Antoine de la Playa, Arndt MacDermott), die „Lucky Losers“ (Yogi Nanging, Manfred Trutzenburg, Roberta Falstaff, Dörte Waterkant), die „Cauchy-Zwillinge“ (Carmen Cauchy, Conchita Cauchy), sowie fünf weitere Einzelpersonen, die für sich jeweils eine Clique bilden. Die Zugehörigkeit zur gleichen Clique definiert eine Äquivalenzrelation in der Klasse 7c.

- (1) Bestimme $[Natascha\ Schleckmaul]$.
- (2) Bestimme $[Ann-Kathrin\ Schmitt] \cap [Roberta\ Falstaff]$.
- (3) Bestimme $\{Ann-Kathrin\ Schmitt\} \cap \{Anabelle\ Belami\}$.
- (4) Bestimme $[Ann-Kathrin\ Schmitt] \cap [Anabelle\ Belami]$.
- (5) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es in der Klasse?
- (6) Wie viele Elemente besitzt die Quotientenmenge zu dieser Äquivalenzrelation?
- (7) Um das Klima in der Klasse zu verbessern, ruft Frau Maier-Sengupta ein Treffen zusammen, zu dem jede Clique einen Repräsentanten schickt. Wie viele Möglichkeiten für ein solches Treffen gibt es? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die fünf Einzelpersonen zusammen eine neue Clique bilden und Antoine de la Playa das Anarcho-Syndikat verlässt und sich der Eisfreunde Sonne anschließt?

Aufgabe 39.4. Es finden ein Gipfeltreffen von n Staaten statt, wobei jeder Staat entweder den Präsidenten(-in) oder den Vizepräsidenten hinschickt. Das Gastgeberland ist jedenfalls mit dem Präsidenten vertreten. Wie viele Möglichkeiten für das Gipfeltreffen (also Kombinationsmöglichkeiten an Repräsentanten) gibt es?

Aufgabe 39.5. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Zeige, dass die Relation auf V , die durch

$$v \sim w, \text{ falls es ein } \lambda \in K, \lambda \neq 0, \text{ mit } v = \lambda w \text{ gibt}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Was sind die Äquivalenzklassen?

Aufgabe 39.6. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$.

- (1) Wir betrachten auf dem K^n die Relation R , die durch vRw gegeben ist, falls es eine lineare Abbildung $\varphi: K^n \rightarrow K^n$ mit $\varphi(v) = w$ gibt. Welche Eigenschaften einer Äquivalenzrelation sind erfüllt, welche nicht?
- (2) Wir betrachten auf dem K^n die Relation S , die durch vSw gegeben ist, falls es eine bijektive lineare Abbildung $\varphi: K^n \rightarrow K^n$ mit $\varphi(v) = w$ gibt. Welche Eigenschaften einer Äquivalenzrelation sind erfüllt, welche nicht?

Aufgabe 39.7. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Wir betrachten auf dem K^n die Äquivalenzrelation $\sim$, die durch $v \sim w$ gegeben ist, falls es eine bijektive lineare Abbildung $\varphi: K^n \rightarrow K^n$ mit $\varphi(v) = w$ gibt. Bestimme die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation.

Aufgabe 39.8. Es sei $V = K^n$ ein Vektorraum und $m \in \mathbb{N}$. Betrachte auf der Produktmenge V^m die folgende Relation.

$$(v_1, \dots, v_m) \sim (w_1, \dots, w_m), \text{ falls } \langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle w_1, \dots, w_m \rangle.$$

Die beiden Vektorentupel stehen also in Relation zueinander, wenn sie den gleichen Untervektorraum erzeugen. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Man gebe eine Bijektion zwischen der zugehörigen Quotientenmenge und der Menge der Untervektorräume von V , die durch m Vektoren erzeugt werden können.

Aufgabe 39.9. Es sei $V \subseteq K^n$ ein Untervektorraum und $\sim$ die zugehörige Äquivalenzrelation im Sinne von Aufgabe 38.15.

- (1) Zeige, dass die affinen Unterräume der Form $P + V$ die Äquivalenzklassen sind.
- (2) Es sei $W \subseteq K^n$ ein weiterer Untervektorraum mit

$$V \cap W = \{0\}$$

und derart, dass man jeden Vektor $u \in K^n$ in der Form $u = v + w$ mit $v \in V$ und $w \in W$ schreiben kann. Zeige, dass W ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 39.10. Sei F ein Faden. Man versuche, sich die folgenden Äquivalenzrelationen auf F und die zugehörige Identifizierungsabbildungen vorzustellen (möglichst geometrisch).

- (1) Die beiden Endpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (2) Es seien zwei Punkte $P, Q \in F$ fixiert. Diese beiden Punkte seien zueinander äquivalent, ansonsten seien die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (3) Es seien n Punkte $P_1, P_2, \dots, P_n \in F$ fixiert. Diese Punkte seien untereinander äquivalent, ansonsten seien die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (4) Auf dem Faden seien abwechselnd 3 rote Punkte und 3 blaue Punkte markiert. Die roten Punkte sollen untereinander äquivalent sein und die blauen Punkte sollen untereinander äquivalent sein, ansonsten seien die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (5) Es sei M der Mittelpunkt des Fadens. Zwei Punkte seien zueinander äquivalent, wenn sie zu M den gleichen (gestreckter) Abstand haben.
- (6) Der Faden wird in 2 (oder 3, 4, 5, ...) gleichlange Teile unterteilt, die Länge eines Teiles sei s . Zwei Punkte sind zueinander äquivalent, wenn ihr Abstand ein Vielfaches von s ist.

Aufgabe 39.11. Sei B ein Blatt Papier (oder ein Taschentuch). Man versuche, sich die folgenden Äquivalenzrelationen auf B und die zugehörige Identifizierungsabbildungen vorzustellen (möglichst geometrisch).

- (1) Die vier Eckpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (2) Alle Randpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (3) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (4) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand und jeder Punkt des oberen Randes ist äquivalent zu seinem vertikal gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (5) Jeder Punkt des Randes ist äquivalent zu seinem punktsymmetrisch (bezüglich des Mittelpunktes des Blattes) gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (6) Sei K ein Kreis (d.h. eine Kreislinie) auf dem Blatt. Alle Kreispunkte seien untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (7) Es gebe zwei Punkte $P \neq Q$, die untereinander äquivalent seien, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (8) Sei H die horizontale Halbierungsgerade des Blattes. Zwei Punkte sind genau dann äquivalent, wenn sie achsensymmetrisch zu H sind.

Aufgabe 39.12. Es sei K ein angeordneter Körper und

$$K \longrightarrow K_{\geq 0}, x \longmapsto |x|,$$

die Betragsabbildung. Zeige, dass man diese Abbildung als Quotientenabbildung zur Äquivalenzrelation $\sim$ auf K auffassen kann, für die $x \sim y$ bei $x = \pm y$ gilt.

Aufgabe 39.13. Es sei

$$f: M \longrightarrow N$$

eine surjektive Abbildung mit der zugehörigen Äquivalenzrelation $\sim$ auf M im Sinne von Lemma 38.10. Es sei Q die Quotientenmenge zu $\sim$ mit der kanonischen Projektion $p: M \rightarrow Q$. Zeige, dass es eine bijektive Abbildung

$$\psi: Q \longrightarrow N$$

mit

$$f = \psi \circ p$$

gibt.

Aufgabe 39.14. Es sei

$$\varphi: K^n \longrightarrow K^m$$

eine surjektive lineare Abbildung mit dem Kern $U \subseteq K^n$. Es sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf K^n zu diesem Untervektorraum im Sinne von Aufgabe 38.15 und sei

$$p: K^n \longrightarrow K^n / \sim$$

die zugehörige Quotientenabbildung. Zeige, dass es nach Lemma 39.12 (5) eine Abbildung

$$\psi: K^n / \sim \longrightarrow K^m$$

mit

$$\varphi = \psi \circ p$$

gibt. Zeige, dass ψ bijektiv ist.

Aufgabe 39.15. Beschreibe typische Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, die durch die Additionsabbildung

$$+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

im Sinne von Lemma 38.10 gegeben ist.

Aufgabe 39.16. Beschreibe typische Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die durch die Multiplikationsabbildung

$$\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

im Sinne von Lemma 38.10 gegeben ist. Wie sieht die Äquivalenzklasse zu $(6, 20)$ aus? Markiere in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit unterschiedlichen Farben unterschiedliche Äquivalenzklassen. Gibt es Äquivalenzklassen, die nur aus einem Element bestehen? Gibt es Äquivalenzklassen, die aus unendlich vielen Elementen bestehen? Welche Äquivalenzklassen bestehen aus zwei Elementen?

Aufgabe 39.17. Die Schüler und Schülerinnen der Klasse 3b werden für den Schwimmunterricht in die vier Leistungsklassen A, B, C, D eingeteilt. Wenn der Schwimmunterricht im Freibad stattfindet, so schwimmen die Leistungsklassen A und B im großen Becken und die Leistungsklassen C und D im kleinen Becken. Wenn der Schwimmunterricht im Hallenbad stattfindet, so schwimmt die Leistungsklasse A auf den Bahnen 1 und 2, die Leistungsklassen B und C auf den Bahnen 3 bis 6 und die Leistungsklasse D macht Trockenübungen. Erläutere diese Situation mit Hilfe von Lemma 39.12 (5).

Aufgabe 39.18.*

Wir betrachten auf $\mathbb{N}_+$ die Relation $\sim$, die durch

$$m \sim n$$

festgelegt ist, falls m eine Potenz von n und n eine Potenz von m teilt.

- (1) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
- (2) Bestimme, welche der folgenden Elemente zueinander äquivalent sind, welche nicht.

$$100, 1000, 9, 125, 500, 27, 10, 210.$$

- (3) Es sei Q die Quotientenmenge zu dieser Äquivalenzrelation und es sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen mit der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{P})$. Zeige, dass es eine natürliche Abbildung

$$\varphi: \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{P})$$

gibt, die zu einer injektiven Abbildung

$$\tilde{\varphi}: Q \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{P})$$

führt. Ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv?

- (4) Wie sieht ein besonders einfaches Repräsentantensystem für die Äquivalenzrelation aus?

Es seien $\sim_1$ und $\sim_2$ Äquivalenzrelationen auf der Menge M . Man sagt, dass $\sim_1$ eine Verfeinerung von $\sim_2$ ist, wenn aus $x \sim_1 y$ stets $x \sim_2 y$ folgt.

Aufgabe 39.19. Wir betrachten auf der Menge aller höheren Säugetiere die Äquivalenzrelationen, die durch „gehören zur gleichen Gattung“, „gehören zur gleichen Familie“, „gehören zur gleichen Art“, „gehören zur gleichen Klasse“, „gehören zur gleichen Ordnung“ gegeben sind. Welche Äquivalenzrelation ist eine Verfeinerung von welcher Äquivalenzrelation? Man gebe für je zwei dieser Äquivalenzrelationen Tiere an, die bezüglich der einen Relation äquivalent sind, aber nicht bezüglich der anderen. Wie viele Äquivalenzklassen besitzt die Äquivalenzrelation zur Ordnung?

Aufgabe 39.20. Es sei M eine Menge und seien $\sim_1$ und $\sim_2$ Äquivalenzrelationen auf M mit den zugehörigen kanonischen Abbildungen

$$p_1: M \longrightarrow Q_1$$

und

$$p_2: M \longrightarrow Q_2.$$

Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1) $\sim_1$ ist eine Verfeinerung von $\sim_2$.
- (2) Für die Äquivalenzklassen zu jedem Element $x \in M$ gilt $[x]_1 \subseteq [x]_2$.

(3) Es ist (als Teilmengen von $M \times M$)

$$\sim_1 \subseteq \sim_2 .$$

(4) Es gibt eine Abbildung

$$\psi: Q_1 \longrightarrow Q_2$$

$$\text{mit } \psi \circ p_1 = p_2.$$

Aufgabe 39.21. Es sei $M \times N$ eine Produktmenge. Zeige, dass die Gleichheit in der ersten Komponente eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $M \times N$ ist. Zeige, dass man jede Äquivalenzklasse mit N und die Quotientenmenge $M \times N / \sim$ mit M identifizieren kann.

Aufgabe 39.22. Es seien D und W Mengen. Wir betrachten auf der Abbildungsmenge $\text{Abb}(D, W)$ diejenige Relation, bei der die Abbildungen

$$f, g: D \longrightarrow W$$

in Relation stehen, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\pi: D \longrightarrow D$$

mit

$$f = g \circ \pi$$

gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 39.23. Es seien D und W Mengen, wobei D endlich sei. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi: \text{Abb}(D, W) \longrightarrow \text{Abb}(W, \mathbb{N}), f \longmapsto (w \mapsto \#(f^{-1}(w))).$$

Einer Abbildung $f: D \rightarrow W$ wird also die Abbildung zugeordnet, die jedem Wert $w \in W$ die Anzahl seiner Urbilder zuordnet. Finde möglichst viele Interpretationen für diese Situation.

Aufgabe 39.24. Es sei D eine Schulklasse und $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ die Menge der Schulnoten. Das Ergebnis einer Klausur ist eine Abbildung $f: D \rightarrow W$, wobei jedem Schüler $x \in D$ seine in der Klausur erzielte Note $f(x)$ zugeordnet wird. Die zugehörige Notenverteilung ist die Abbildung, die jeder Note $w \in W$ zuordnet, wie oft diese Note in der Klausur vergeben wurde. Die in Aufgabe 10.23 besprochene Abbildung

$$\Psi: \text{Abb}(D, W) \longrightarrow \text{Abb}(W, \mathbb{N}), f \longmapsto (w \mapsto \#(f^{-1}(w))),$$

ordnet also dem Klausurergebnis die Notenverteilung zu. Es sei nun

$$\varphi: \text{Abb}(D, W) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

die Abbildung, die jedem Klausurergebnis die Durchschnittsnote zuordnet.

- (1) Erstelle eine Formel für die Durchschnittsnote zu einem Klausurergebnis f .
- (2) Erstelle eine Formel für die Durchschnittsnote zu einer Notenverteilung $h: W \rightarrow \mathbb{N}$.
- (3) Zeige, dass man die Durchschnittsnote zum Klausurergebnis f allein aus der zugehörigen Notenverteilung $\Psi(f)$ berechnen kann.
- (4) Zeige, dass es eine Abbildung

$$\tilde{\varphi}: \text{Abb}(W, \mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

mit

$$\varphi = \tilde{\varphi} \circ \Psi$$

gibt.

- (5) Aus welchen Notenverteilungen ist das Klausurergebnis rekonstruierbar?
- (6) Was ist eine sinnvolle Antwort auf die Frage „Wie ist die Klausur ausgefallen“?

Aufgabe 39.25. Es seien D und W Mengen, wobei D endlich sei. Es sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\text{Abb}(D, W)$ aus Aufgabe 40.22 und sei

$$\Psi: \text{Abb}(D, W) \longrightarrow \text{Abb}(W, \mathbb{N}), f \longmapsto (w \mapsto \#(f^{-1}(w))),$$

die in Aufgabe 10.23 besprochene Abbildung.

- (1) Es sei $\pi: D \rightarrow D$ eine bijektive Abbildung und $f: D \rightarrow W$ eine Abbildung. Zeige

$$\Psi(f) = \Psi(f \circ \pi).$$

- (2) Es seien $f, g: D \rightarrow W$. Zeige $f \sim g$ genau dann, wenn $\Psi(f) = \Psi(g)$ ist.
- (3) Zeige, dass es eine injektive Abbildung

$$\tilde{\Psi}: \text{Abb}(D, W) / \sim \longrightarrow \text{Abb}(W, \mathbb{N})$$

mit $\Psi = \tilde{\Psi} \circ p$ gibt, wobei p die kanonische Projektion in die Quotientenmenge bezeichnet.

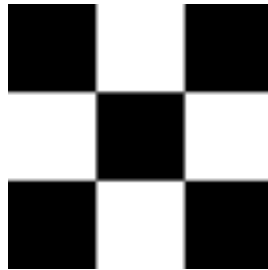
39.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 39.26. (2 Punkte)

Es sei R eine Relation zwischen den Mengen M und N . Wir definieren auf M die Relation S durch aSb , wenn für alle $x \in N$ die Beziehung aRx genau dann gilt, wenn bRx gilt. Zeige, dass S eine Äquivalenzrelation auf M ist.

Aufgabe 39.27. (3 Punkte)

Betrachte die Schachfiguren Turm, Läufer, Pferd und Esel zusammen mit ihren erlaubten Zügen auf einem 8×8 -Schachbrett. Ein Esel darf dabei pro Zug einen Doppelschritt nach vorne, nach hinten, nach rechts oder nach links machen. Jede dieser Figuren definiert eine Äquivalenzrelation auf den 64 Feldern, indem zwei Felder als äquivalent angesehen werden, wenn das eine Feld von dem anderen Feld aus mit dieser Figur in endlich vielen Zügen erreichbar ist. Beschreibe für jede dieser Schachfiguren die zugehörige Äquivalenzrelation und ihre Äquivalenzklassen. Wie sieht es auf einem 3×3 -Schachbrett aus?

**Aufgabe 39.28.** (1 Punkt)

Im Portemonnaie befinden sich vier 2-Euro-Münzen, sechs 1-Euro-Münzen, drei 50-Cent-Münzen, zwei 20-Cent-Münzen, eine 10-Cent-Münze, keine 5-Cent-Münze, fünf 2-Cent-Münzen und acht 1-Cent-Münzen. Wir betrachten auf dieser Münzmenge diejenige Äquivalenzrelation, bei der zwei Münzen als äquivalent gelten, wenn sie den gleichen Münzwert haben. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es? Wie viele Elemente besitzen die einzigen Äquivalenzklassen? Wie viele Elemente besitzt die Quotientenmenge?

Aufgabe 39.29. (3 Punkte)

Es seien $\sim_1$ und $\sim_2$ Äquivalenzrelationen auf der Menge M mit den zugehörigen kanonischen Abbildungen

$$p_1: M \longrightarrow Q_1$$

und

$$p_2: M \longrightarrow Q_2.$$

Es sei $\sim$ der Durchschnitt der beiden Äquivalenzrelationen mit der zugehörigen kanonischen Projektion

$$p: M \longrightarrow Q.$$

Zeige, dass es eine injektive Abbildung

$$\psi: Q \longrightarrow Q_1 \times Q_2$$

mit $\psi \circ p = p_1 \times p_2$ gibt.

Aufgabe 39.30. (4 Punkte)

Wir betrachten auf der Menge der Geraden in der Ebene $\mathbb{Q}^2$ die Äquivalenzrelation, die durch die Parallelität von Geraden gegeben ist. Zeige, dass die folgende Menge ein Repräsentantensystem ist: die x -Achse und diejenigen Geraden, die durch den Nullpunkt und einen Punkt der Form $(x, 1)$ mit $x \in \mathbb{Q}$ verlaufen.

40. VORLESUNG - ZAHLBEREICHSERWEITERUNGEN

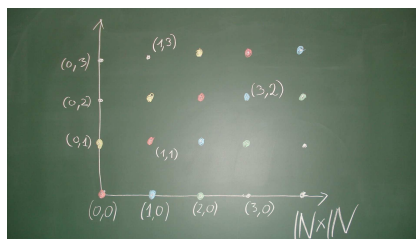
Man muß nur Ein Wesen
recht von Grund aus lieben,
da kommen einem die übrigen
alle lebenswürdig vor!

Johann Wolfgang von Goethe

Wir besprechen nun mit Hilfe von Äquivalenzrelationen, Äquivalenzklassen und Quotientenmengen erneut, wie man aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und wie man aus den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruieren kann. Dieser Zugang ist zwar abstrakter, aber konzeptionell klarer, allgemeiner und systematischer. In einigen Wochen werden wir die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen ebenfalls mittels Äquivalenzrelationen definieren.

40.1. Die Konstruktion der ganzen Zahlen.

Die ganzen Zahlen haben wir in der 18. Vorlesung einfach als die disjunkte Vereinigung von natürlichen und negativen Zahlen eingeführt und dann nach und nach die Verknüpfungen und die Ordnungsrelation festgelegt und die wichtigsten Eigenschaften bewiesen. Dabei hatten wir es häufig, beispielsweise beim Nachweis der Assoziativität für die Multiplikation, mit einer Vielzahl von Fallunterscheidungen zu tun, die wir im Einzelnen gar nicht alle ausgeführt haben.



Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Produktmenge mit der komponentenweisen Addition. Wir erklären auf M eine Relation durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } a + d = b + c.$$

Es wird hier also über Kreuz addiert, um diese Relation zu erhalten. Diese Relation ist bei $a \leq c$ genau dann erfüllt, wenn es ein $e \in \mathbb{N}$ (nämlich die natürliche Zahl $e = c - a$) mit

$$(c, d) = (a, b) + (e, e)$$

gibt und bei $a \geq c$ genau dann erfüllt, wenn es ein $e \in \mathbb{N}$ (nämlich $e = a - c$) mit

$$(c, d) + (e, e) = (a, b)$$

gibt. So oder so kann man sagen, dass die Paare (a, b) und (c, d) zueinander äquivalent sind, wenn sie sich um ein Diagonalelement, also um ein Paar, wo beide Komponenten übereinstimmen, unterscheiden. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M . Das ist von der soeben etablierten Interpretation als „gleichdiagonalig“ her klar, kann aber auch direkt gezeigt werden:

- (1) Wegen $a + b = b + a$ ist $(a, b) \sim (a, b)$, die Relation ist also reflexiv.
- (2) Die Symmetrie folgt daraus, dass aus $a + d = b + c$ sofort $c + b = d + a$ folgt.
- (3) Zum Nachweis der Transitivität sei $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$, also $a + d = b + c$ und $c + f = d + e$. Dann ist

$$a + f + c = a + d + e = b + e + c.$$

Aufgrund der Abziehregel ist dann

$$a + f = b + e,$$

und dies bedeutet $(a, b) \sim (e, f)$.

Passende Interpretationen für die Paare mit dieser Äquivalenzrelation sind beispielsweise:

- Das Paar (a, b) repräsentiert das Ergebnis eines Fußballspieles, wobei a die Toranzahl der Heimmannschaft und b die Toranzahl der Gastmannschaft repräsentiert. Zwei Spiele gelten dann als äquivalent, wenn die „gerichtete Differenz“ gleich ist. Ein $5 : 1$ wird als äquivalent zu einem $6 : 2$ betrachtet, wenn beide Mannschaften ein weiteres Tor schießen, ändert sich zwar

das Paar, aber nicht die Äquivalenzklasse. Die Äquivalenzklassen kann man charakterisieren als Unentschieden, mit einem Tor Vorsprung gewonnen, mit zwei Toren Vorsprung gewonnen, mit drei Toren Vorsprung gewonnen, ... , mit einem Tor Unterschied verloren, mit zwei Toren Unterschied verloren, mit drei Toren Unterschied verloren,

- Das Paar (a, b) repräsentiert das Alter eines menschlichen Paares, wobei a für das Alter der Frau und b für das Alter des Mannes steht. Die Äquivalenzklasse ist durch den gerichteten Altersunterschied (also den Altersunterschied mit der zusätzlichen Information, wer älter ist) festgelegt. Diese Beziehung ändert sich im Laufe des Lebens nicht, da beide gleichermaßen älter werden.
- Das Paar (a, b) kann die Einnahmen und Ausgaben eines Haushaltes in einem Monat beschreiben, wobei die erste Stelle die Einnahmen und die zweite Stelle die Ausgaben repräsentieren möge. Zwei Haushalte (oder Monate) sind dann äquivalent, wenn sie den gleichen Überschuss oder das gleiche Defizit erwirtschaftet haben. Wenn Einnahmen und Ausgaben gleichermaßen steigen oder fallen, ändert sich an dieser Gesamtbewertung nichts.
- Man kann das Paar als eine Schrittfolge aus a Schritten nach rechts und b Schritten nach links ansehen. Im Paar selbst wird die Anzahl der Schritte in die beiden Richtungen notiert, für die Äquivalenzrelation schaut man nur das Endergebnis des Bewegungsvorganges an.

Wenn man $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als ein quadratisches Gitter anordnet (das ist ein „diskretes Koordinatensystem“), so sind die Äquivalenzklassen durch die Punkte auf einer zur Diagonalen parallelen „diskreten Geraden“ gegeben. Die Punkte (a, b) mit $a \geq b$ sind äquivalent zu $(a - b, 0)$, sie haben also einen Repräsentanten, bei dem die zweite Komponente 0 ist. Die Punkte (a, b) mit $a \leq b$ sind äquivalent zu $(0, b - a)$, sie haben also einen Repräsentanten, bei dem die erste Komponente 0 ist. Die Punkte (a, a) sind zu $(0, 0)$ äquivalent. Den Repräsentanten einer Äquivalenzklasse, bei dem mindestens eine Komponente 0 ist, nennen wir den *Standardvertreter* dieser Äquivalenzklasse. Die Standardvertreter sind die diskreten Punkte des begrenzenden Viertelkreuzes; zu einem Punkt ergibt sich der Standardvertreter, indem man parallel zur Diagonalen in Richtung der Halbachsen wandert, bis man auf einer der Halbachsen landet. Zwei Punkte sind genau dann äquivalent, wenn sie den gleichen Standardvertreter besitzen.

Wir bezeichnen nun die Quotientenmenge, also die Menge der Äquivalenzklassen unter dieser Äquivalenzrelation, als *Menge der ganzen Zahlen* und bezeichnen sie mit $\mathbb{Z}$. Wir sprechen vom *Äquivalenzklassenmodell* oder *Paarmodell* für die ganzen Zahlen. Diese Quotientenmenge ist die Menge der zur Diagonalen parallelen diskreten Geraden, bei der kanonischen Projektion wird jedes Paar (a, b) auf die Gerade abgebildet, auf der es liegt. Jede ganze Zahl hat genau einen Standardvertreter der Form $n := (n, 0)$ mit $n \in \mathbb{N}_+$, der Form $0 := (0, 0)$ oder der Form $-n := (0, n)$ mit $n \in \mathbb{N}_+$. Eine

natürliche Zahl n fassen wir in diesem Modell als die ganze Zahl $(n, 0)$ auf, und negative Zahlen werden als spezielle Äquivalenzklassen eingeführt.

Wir wollen nun zwei ganze Zahlen, also zwei solche Äquivalenzklassen $[(a, b)]$ und $[(c, d)]$, miteinander „addieren“, also eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{Z}$ einführen. Ein Ansatz, der sich durch den Zugang über Äquivalenzklassen eröffnet, ist es, auf der Menge der Paare die Addition zu nehmen und zu versuchen, diese Addition auf die Äquivalenzklassen zu übertragen. Die komponentenweise Addition auf $\mathbb{N}^2$, also die Verknüpfung

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d),$$

ist recht einfach und insbesondere ist diese Verknüpfung kommutativ, assoziativ und $(0, 0)$ ist das neutrale Element. Diese Addition hat in den oben angegebenen Beispielen eine sinnvolle Interpretation, wie wenn man die Ergebnisse von zwei Fußballspielen miteinander addiert (Hin- und Rückspiel, allerdings muss man die Reihenfolge beibehalten) oder das Haushaltsgeschehen von mehreren Monaten addiert.

Lemma 40.1. *Durch die Festlegung*

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)]$$

erhält man auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) $\mathbb{Z}$ eine Verknüpfung, die kommutativ und assoziativ ist und die $[(0, 0)]$ als neutrales Element besitzt. Darüber hinaus besitzt jedes Element ein inverses Element, und zwar sind $[(a, b)]$ und $[(b, a)]$ invers zueinander.

Beweis. Wir müssen zuerst die Wohldefiniertheit überprüfen, da die Verknüpfung unter Bezug auf Repräsentanten erklärt wird und daher nicht von vornherein klar ist, dass unterschiedliche Repräsentanten zum gleichen Ergebnis (zur gleichen Äquivalenzklasse) führen. Zu $(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$ muss man überprüfen, dass

$$(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$$

und damit $[(a + c, b + d)] = [(a' + c', b' + d')]$ gilt. Die beiden Voraussetzungen bedeuten ausgeschrieben $a + b' = a' + b$ und $c + d' = c' + d$. Damit ist durch Addition der beiden Gleichungen

$$a + b' + c + d' = a' + b + c' + d,$$

was die Äquivalenz bedeutet. Die kanonische Abbildung

$$q: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \longmapsto [(a, b)],$$

verträgt sich nach Konstruktion mit der Addition auf der Produktmenge und der soeben etablierten Addition auf $\mathbb{Z}$, es ist also

$$q(x + y) = q(x) + q(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}^2$. In einer solchen Situation übertragen sich wegen der Surjektivität der kanonischen Abbildung Rechengesetze von $\mathbb{N}^2$ direkt auf die Quotientenmenge. Für das Assoziativgesetz beispielsweise betrachten wir

Elemente $r, s, t \in \mathbb{Z}$. Es gibt $x, y, z \in \mathbb{N}^2$ mit $q(x) = r$, $q(y) = s$, $q(z) = t$. Somit ist

$$\begin{aligned} r + (s + t) &= q(x) + (q(y) + q(z)) \\ &= q(x) + q(y + z) \\ &= q(x + (y + z)) \\ &= q((x + y) + z) \\ &= q(x + y) + q(z) \\ &= (q(x) + q(y)) + q(z) \\ &= (r + s) + t. \end{aligned}$$

Der Nachweis der Kommutativität und dass $[(0, 0)]$ das neutrale Element der Verknüpfung ist, verläuft ähnlich einfach. Wegen

$$[(a, b)] + [(b, a)] = [(a + b, a + b)] = [(0, 0)] = 0$$

ist in der Tat $[(b, a)]$ das inverse Element zu $[(a, b)]$. □

Lemma 40.2. *Durch die Festlegung*

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)]$$

erhält man auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) $\mathbb{Z}$ eine Verknüpfung, die kommutativ und assoziativ ist und die $[(1, 0)]$ als neutrales Element besitzt.

Beweis. Siehe Aufgabe 40.5. □

Satz 40.3. *Das Äquivalenzklassenmodell von $\mathbb{Z}$ ist mit der Addition*

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)],$$

der Multiplikation

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)],$$

dem Nullelement $[(0, 0)]$ und dem Einselement $[(1, 0)]$ ein kommutativer Ring.

Beweis. Aufgrund von Lemma 40.1 und Lemma 40.2 müssen wir nur noch das Distributivgesetz überprüfen. Dieses ist wegen

$$\begin{aligned} [(a, b)]([(c, d)] + [(e, f)]) &= [(a, b)][(c + e, d + f)] \\ &= [(ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be)] \\ &= [(ac + bd, ad + bc)] + [(ae + bf, af + be)] \\ &= [(a, b)][(c, d)] + [(a, b)][(e, f)] \end{aligned}$$

erfüllt. □

Lemma 40.4. *Durch die Festlegung*

$$[(a, b)] \geq [(c, d)],$$

falls

$$a + d \geq b + c,$$

erhält man auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) $\mathbb{Z}$ eine totale Ordnung.

Beweis. Siehe Aufgabe 40.6. □

Satz 40.5. *Das Äquivalenzklassenmodell von $\mathbb{Z}$ ist mit der Addition*

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)],$$

der Multiplikation

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)],$$

dem Nullelement $[(0, 0)]$, dem Einselement $[(1, 0)]$ und der durch

$$[(a, b)] \geq [(c, d)],$$

falls

$$a + d \geq b + c,$$

definierten Ordnung ein angeordneter Ring.

Beweis. Nach Satz 40.3 ist $\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring und nach Lemma 40.4 ist $\geq$ eine totale Ordnung. Wir müssen also lediglich noch die Verträglichkeit der Ordnung mit der Addition und der Multiplikation überprüfen. Sei

$$[(a, b)] \geq [(c, d)],$$

also $a + d \geq b + c$, und $[(e, f)]$ beliebig. Dann ist auch

$$a + d + e + f \geq b + c + e + f,$$

also

$$[(a, b)] + [(e, f)] = [(a + e, b + f)] \geq [(c + e, d + f)] = [(c, d)] + [(e, f)].$$

Wenn $[(a, b)] \geq 0$ und $[(c, d)] \geq 0$ ist, so ist $a \geq b$ und $c \geq d$. Mit Aufgabe 10.30 ergibt sich

$$ac + bd \geq ad + bc,$$

was

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)] \geq 0$$

bedeutet. □

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind über die Zuordnung

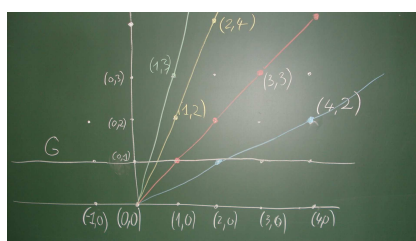
$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto [(n, 0)],$$

in den ganzen Zahlen enthalten. Diese Zuordnung ist mit der Addition, der Multiplikation und der Ordnung verträglich, siehe Aufgabe 40.7. Statt $(n, 0)$ schreibt man einfach n . Die ganzen Zahlen, die durch $(0, n)$ mit $n \in \mathbb{N}_+$ repräsentiert werden, heißen negative Zahlen. Statt $(0, n)$ schreibt man einfach $-n$.

In den Aufgaben wird gezeigt, dass das Paarmodell für $\mathbb{Z}$ mit dem im ersten Semester eingeführten Modell übereinstimmt.

40.2. Die Konstruktion der rationalen Zahlen.

Wir wollen ausgehend von der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die einen kommutativen Ring bildet, die Menge der *rationalen Zahlen* konstruieren. Wir gehen dabei ähnlich wie bei der Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen vor, indem wir auf einer „zu großen“ Menge eine Äquivalenzrelation einführen, so dass die Quotientenmenge ein Modell für die rationalen Zahlen ist. Die Konstruktion und die Beweise sind nicht wesentlich verschieden von den in der 23. Vorlesung durchgeführten, als wir die Sprache der Äquivalenzrelationen noch nicht zur Verfügung hatten.



Wir starten mit der Produktmenge

$$P = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}_+\}.$$

Zur Orientierung sei schon jetzt gesagt, dass das Paar (a, b) später den Bruch a/b repräsentieren soll.

Man kann sich vorstellen, dass in (a, b) die erste Zahl eine Anzahl an Kuchen und die zweite Zahl eine Anzahl an Personen bedeutet, oder die Anzahl der Frauen und die Anzahl der Männer auf einer Party, oder irgendein Paar, das einen proportionalen Zusammenhang repräsentiert.

Auf P wollen wir eine Äquivalenzrelation definieren, wobei zwei Paare als äquivalent gelten sollen, wenn sie „den gleichen Bruch“ repräsentieren (den es noch nicht gibt). Wir definieren

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc \text{ ist.}$$

Diese Relation wird also unter Bezug auf die Gleichheit in $\mathbb{Z}$ erklärt. Es handelt sich dabei um eine Äquivalenzrelation, wie man direkt nachrechnen kann, siehe Aufgabe 40.5. Insbesondere sind (a, b) und (ae, be) für $e \neq 0$ zueinander äquivalent.

Es ist hilfreich, sich diese Situation zu veranschaulichen, indem man die diskrete obere Halbebene¹² $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ betrachtet. Ein Paar (a, b) ist dann ein Gitterpunkt, wobei wir uns die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als die Punkte

$$(n, 1), n \in \mathbb{Z},$$

¹²Man könnte auch $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ nehmen.

vorstellen. Die zugehörige durchgezogene „Zahlengerade“ (wo also die zweite Komponente konstant 1 ist.) bezeichnen wir mit G . Ein jeder Punkt $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ definiert eine eindeutige Gerade, die durch diesen Punkt und durch den Nullpunkt $(0, 0)$ verläuft. In dieser geometrischen Interpretation sind zwei Punkte (a, b) und (c, d) genau dann äquivalent, wenn sie die gleiche Gerade definieren, und dies ist genau dann der Fall, wenn ihre „Steigungen“ übereinstimmen. Zwei Punkte liegen ja genau dann auf der gleichen Geraden, wenn sie, wenn man durch Streckung ihre zweite Koordinate zur Übereinstimmung bringt, dann auch die erste Koordinate übereinstimmt. Wenn man den ersten Punkt mit d streckt (multipliziert) und den zweiten Punkt mit b , so erhält man die beiden Punkte (da, db) und (bc, bd) , und die Gleichheit vorne war die Definition für die Relation. Die Äquivalenzklassen sind die „diskreten Geraden“ durch den Nullpunkt und einen weiteren Gitterpunkt.

Auch die Identifizierungsabbildung zu dieser Äquivalenzrelation kann man sich gut vorstellen. Der Schnittpunkt der durch einen Punkt (a, b) und dem Nullpunkt definierten Geraden H mit der Zahlengeraden G ist ein Punkt, der dem Bruch a/b entspricht (die Steigung der Geraden H ist aber $\frac{a}{b}$).

Die Quotientenmenge unter dieser Äquivalenzrelation nennen wir $\mathbb{Q}$ und sprechen vom *Äquivalenzklassenmodell* für $\mathbb{Q}$. Für die Elemente in $\mathbb{Q}$ schreiben wir vorläufig noch $[(a, b)]$. Wir wollen nun auf $\mathbb{Q}$ eine Addition und eine Multiplikation definieren.

Lemma 40.6. *Durch die Festlegung*

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)]$$

erhält man auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) $\mathbb{Q}$ eine Verknüpfung, die kommutativ und assoziativ ist und die $[(0, 1)]$ als neutrales Element besitzt. Darüber hinaus besitzt jedes Element ein inverses Element, und zwar sind $[(a, b)]$ und $[(-a, b)]$ invers zueinander.

Beweis. Zum Nachweis der Wohldefiniertheit seien $[(a, b)] = [(a', b')]$ und $[(c, d)] = [(c', d')]$, also $ab' = a'b$ und $cd' = c'd$. Dann ist

$$ab'dd' + bb'cd' = a'bdd' + bb'c'd$$

und somit

$$[(ad + bc, bd)] = [(a'd' + b'c', b'd')].$$

Die Kommutativität und die Eigenschaft, dass $[(0, 1)]$ das neutrale Element der Verknüpfung ist, folgen unmittelbar aus der Definition. Zum Beweis der Assoziativität seien $[(a, b)], [(c, d)], [(e, f)]$ gegeben. Es ist dann

$$\begin{aligned} [(a, b)]([(c, d)][(e, f)]) &= [(a, b)]([(cf + de, df)]) \\ &= [(bcf + bde + adf, bdf)] \\ &= [(ad + bc, bd)][(e, f)] \\ &= ([[(a, b)][(c, d)]][(e, f)]. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$[(a, b)] + [(-a, b)] = [ab - ab, b^2] = [(0, b^2)] = [(0, 1)] = 0.$$

□

Lemma 40.7. *Durch die Festlegung*

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)]$$

erhält man auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) $\mathbb{Q}$ eine Verknüpfung, die kommutativ und assoziativ ist und die $[(1, 1)]$ als neutrales Element besitzt. Darüber hinaus besitzt jedes Element $\neq 0$ ein inverses Element, und zwar sind bei $a > 0$ die Klassen $[(a, b)]$ und $[(b, a)]$ und bei $a < 0$ die Klassen $[(a, b)]$ und $[(-b, -a)]$ invers zueinander.

Beweis. Siehe Aufgabe 40.10. □

Satz 40.8. *Das Äquivalenzklassenmodell von $\mathbb{Q}$ ist mit der Addition*

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)],$$

der Multiplikation

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)],$$

dem Nullelement $[(0, 1)]$ und dem Einselement $[(1, 1)]$ ein Körper.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 40.6 und aus Lemma 40.7, es ist somit lediglich noch das Distributivgesetz zu begründen. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} [(a, b)]([(c, d)] + [(e, f)]) &= [(a, b)][(cf + de, df)] \\ &= [(acf + ade, bdf)] \\ &= [(acf, bdf)] + [(ade, bdf)] \\ &= [(ac, bd)] + [(ae, bf)] \\ &= [(a, b)][(c, d)] + [(a, b)][(e, f)]. \end{aligned}$$

□

Lemma 40.9. *Durch die Festlegung $[(a, b)] \geq [(c, d)]$, falls $ad \geq bc$, erhält man auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) $\mathbb{Q}$ eine totale Ordnung.*

Beweis. Siehe Aufgabe 40.13. □

Satz 40.10. *Das Äquivalenzklassenmodell von $\mathbb{Q}$ ist mit der Addition*

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)],$$

der Multiplikation

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)],$$

dem Nullelement $[(0, 1)]$, dem Einselement $[(1, 1)]$ und der durch

$$[(a, b)] \geq [(c, d)],$$

falls

$$ad \geq bc,$$

definierten Ordnung ein angeordneter Körper.

Beweis. Dies folgt aus Satz 40.8 und Lemma 40.9, es bleibt nur noch die Verträglichkeit der Ordnung mit den Verknüpfungen zu zeigen. Sei

$$[(a, b)] \geq [(c, d)],$$

also $ad \geq bc$, und $[(e, f)]$ beliebig. Wegen $f > 0$ ist dann auch $adf \geq bcf$ und somit

$$\begin{aligned} [(a, b)] + [(e, f)] &= [(af + be, bf)] \\ &= [(adf + bde, bdf)] \\ &\geq [(bcf + bde, bdf)] \\ &= [(cf + de, df)] \\ &= [(c, d)] + [(e, f)]. \end{aligned}$$

Wenn $[(a, b)] \geq 0$ und $[(c, d)] \geq 0$ ist, so sind a, c positiv und dann ist auch ac positiv, also

$$[(a, b)][(c, d)] = [ac, bd] \geq 0.$$

□

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind über die Zuordnung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, n \longmapsto [(n, 1)],$$

in den rationalen Zahlen enthalten. Diese Zuordnung ist mit der Addition, der Multiplikation und der Ordnung verträglich, siehe Aufgabe 40.14. Für die Äquivalenzklasse $[(a, b)]$ schreibt man abkürzend $\frac{a}{b}$.

40. ARBEITSBLATT

40.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 40.1. Oma Müller und Opa Müller haben heute Geburtstag. Sie wird 69 Jahre alt und er wird 73 Jahre alt. Wie alt waren sie, als man beide Altersangaben zwar mit natürlichen, aber nicht mit positiven natürlichen Zahlen ausdrücken konnte.

40.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 40.2. Familie A und B notieren ihre Einnahmen und Ausgaben pro Monat in der Form $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, wobei der erste Eintrag für die Einnahmen und der zweite Eintrag für die Ausgaben steht. Familie A notiert für die erste Jahreshälfte die Paare

$$(2500, 2800), (3500, 3200), (3300, 2900), (2800, 2800), \\ (2400, 4200), (4000, 2700).$$

Familie B notiert für die erste Jahreshälfte die Paare

$$(3300, 3600), (3900, 3800), (4300, 4300), (4000, 3800), \\ (3900, 4100), (4000, 3700).$$

- (1) Notiere für jede Familie und jeden Monat den Gewinn bzw. das Defizit in Paarschreibweise mit Hilfe der Standardrepräsentanten.
- (2) Berechne für jede Familie die Gesamteinnahmen und die Gesamtausgaben im angegebenen Zeitraum.
- (3) Bestimme auf zwei verschiedene Arten für jede Familie den Gesamtgewinn bzw. das Gesamtdefizit (Standardrepräsentant).
- (4) Vergleiche für jeden Monat den Haushalt der beiden Familien mit Hilfe der Festlegung aus Lemma 40.4.

Aufgabe 40.3. Ihre Fußballmannschaft hat das vorletzte Spiel mit $5 : 1$ und das letzte Spiel mit $10 : 5$ gewonnen. Welchen Sieg finden Sie überzeugender?

Aufgabe 40.4. Es seien $(M, *)$ und $(N, \circ)$ Mengen mit Verknüpfungen und es sei

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

eine mit den Verknüpfungen verträgliche surjektive Abbildung, es gelte also

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y).$$

Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Wenn $*$ kommutativ ist, so ist auch $\circ$ kommutativ.
- (2) Wenn $*$ assoziativ ist, so ist auch $\circ$ assoziativ.
- (3) Wenn M ein neutrales Element besitzt, so besitzt auch N ein neutrales Element.

Aufgabe 40.5.*

Zeige, dass man durch die Festlegung

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)]$$

auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) $\mathbb{Z}$ eine Verknüpfung erhält, die kommutativ und assoziativ ist und die $[(1, 0)]$ als neutrales Element besitzt.

Aufgabe 40.6.*

Zeige, dass man durch die Festlegung

$$[(a, b)] \geq [(c, d)],$$

falls

$$a + d \geq b + c,$$

auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) $\mathbb{Z}$ eine totale Ordnung erhält.

Aufgabe 40.7. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto [(n, 0)],$$

injektiv ist und dass sie mit der Addition, der Multiplikation und der Ordnung verträglich ist.

Aufgabe 40.8.*

Zeige, dass die auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc,$$

festgelegte Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 40.9. Zeige, dass bei der auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc,$$

festgelegten Äquivalenzrelation jedes Paar (x, y) einen Vertreter (x', y') besitzt, bei dem x' und y' teilerfremd sind.

Aufgabe 40.10. Zeige, dass man durch die Festlegung

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)]$$

auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) $\mathbb{Q}$ eine wohldefinierte Verknüpfung erhält, die kommutativ und assoziativ ist und die $[(1, 1)]$ als neutrales Element besitzt. Zeige ferner, dass bei $a > 0$ die Klassen $[(a, b)]$ und $[(b, a)]$ und bei $a < 0$ die Klassen $[(a, b)]$ und $[(-b, -a)]$ invers zueinander sind.

Aufgabe 40.11. Zeige, dass im Äquivalenzklassenmodell für $\mathbb{Q}$ die Addition die Beziehung

$$[(a, d)] + [(c, d)] = [(a + c, d)]$$

erfüllt.

Aufgabe 40.12. Es sei $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ mit der durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc,$$

festgelegten Äquivalenzrelation versehen. Zeige, dass es zu $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ eine Zahl $d \in \mathbb{N}_+$ und ganze Zahlen $c_1, c_2, \dots, c_n$ mit $(a_1, b_1) \sim (c_1, d)$, $(a_2, b_2) \sim (c_2, d), \dots, (a_n, b_n) \sim (c_n, d)$ gibt.

Aufgabe 40.13. Zeige, dass man durch die Festlegung $[(a, b)] \geq [(c, d)]$, falls $ad \geq bc$, auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) $\mathbb{Q}$ eine wohldefinierte totale Ordnung erhält.

Aufgabe 40.14. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, n \longmapsto [(n, 1)],$$

injektiv und mit der Addition, der Multiplikation und der Ordnung verträglich ist.

Aufgabe 40.15. Es sei M eine Menge mit einer kommutativen, assoziativen Verknüpfung $*$ und einem neutralen Element e . Ferner gelte die Kürzungsregel, dass aus $a * c = b * c$ stets $a = b$ folgt.

- (1) Zeige, dass auf $M \times M$ durch die Festlegung $(a, b) \sim (c, d)$, falls $a * d = b * c$ gilt, eine Äquivalenzrelation definiert wird.
- (2) Zeige, dass man auf der Quotientenmenge $M \times M / \sim$ eine Gruppenstruktur definieren kann, die die Verknüpfung auf M fortsetzt.

Aufgabe 40.16. Wir betrachten auf $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc,$$

festgelegte Relation. Zeige, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, deren Äquivalenzklassen die „diskreten Geraden“ durch den Nullpunkt ohne den Nullpunkt sind.

Aufgabe 40.17. Wir betrachten auf $\mathbb{Z}^2$ die durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc,$$

festgelegte Relation. Zeige, dass dies keine Äquivalenzrelation ist

40.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 40.18. (2 Punkte)

Zeige, dass die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die durch $(a, b) \sim (c, d)$, falls $a + d = b + c$ ist, festgelegt ist, durch die Sprünge $\pm \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird.

Aufgabe 40.19. (8 (2+2+2+2) Punkte)

Es sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die durch $(a, b) \sim (c, d)$, falls $a + d = b + c$ ist, festgelegt ist, und es sei $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ die zugehörige Quotientenmenge, also das Äquivalenzklassenmodell von $\mathbb{Z}$. Es sei $G = \mathbb{N} \uplus \mathbb{N}_-$ das (in der 18. Vorlesung eingeführte) „direkte Modell“ für die ganzen Zahlen. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

die durch

$$\varphi(n) = \begin{cases} (n, 0), & \text{falls } n \text{ nichtnegativ ist,} \\ (0, m), & \text{falls } n = -m \text{ negativ ist,} \end{cases}$$

definiert ist, und die zusammengesetzte Abbildung

$$G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}.$$

- (1) Zeige, dass $p \circ \varphi$ eine bijektive Abbildung ist.
- (2) Zeige, dass $p \circ \varphi$ mit der Addition verträglich ist.
- (3) Zeige, dass $p \circ \varphi$ mit der Multiplikation verträglich ist.
- (4) Zeige, dass $p \circ \varphi$ mit der Ordnung verträglich ist.

Aufgabe 40.20. (3 Punkte)

Es sei $(M, *, e)$ eine endliche Menge mit einer kommutativen, assoziativen Verknüpfung mit einem neutralen Element e . Ferner gelte in M die „Kürzungsregel“: Aus $z * x = z * y$ folgt $x = y$. Zeige, dass M eine Gruppe ist.

Aufgabe 40.21. (1 Punkt)

Zeige, dass im Äquivalenzklassenmodell für $\mathbb{Q}$ die Ordnung die Beziehung

$$[(a, d)] \geq [(c, d)]$$

genau dann, wenn

$$a \geq c,$$

erfüllt.

Aufgabe 40.22. (3 (1+1+1) Punkte)

Die Fußballspiele zwischen dem TSV Wildberg und VfB Effringen endeten in den letzten Jahren wie folgt:

$$\begin{aligned} 7 : 2, 3 : 0, 0 : 0, 9 : 6, 8 : 0, 2 : 1, 4 : 2, 3 : 0, 5 : 5, 6 : 3, 3 : 1, \\ 1 : 1, 7 : 0, 2 : 0, 6 : 4, 6 : 2, 3 : 4, 3 : 2. \end{aligned}$$

- (1) Erstelle die Äquivalenzklassen (auf der Menge der angegebenen Ergebnisse) gemäß der Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die durch $a : b \sim c : d$, falls $a + d = b + c$, definiert ist.
- (2) Erstelle die Äquivalenzklassen gemäß derjenigen Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die auf $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ durch $a : b \sim c : d$, falls $ad = bc$, definiert ist und für die $\{n : 0 \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ und $\{0 : 0\}$ eigene Äquivalenzklassen sind.

- (3) Erstelle die Äquivalenzklassen gemäß derjenigen Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die auf $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ durch $a : b \sim c : d$, falls $ad = bc$, definiert ist und für die die anderen Elemente nur zu sich selbst äquivalent sind.

41. VORLESUNG - RESTKLASSENBUILDUNG



In dieser Vorlesung besprechen wir Restklassenbildung. Dies ist ein wichtiger Spezialfall der Bildung einer Quotientenmenge zu einer Äquivalenzrelation. Ein zusätzlicher Aspekt ist, dass man auf diesen Quotientenmengen Verknüpfungen hat, die sich von der Startmenge her vererben. Unmittelbare Anwendungen sind ein besseres Verständnis der Division mit Rest der ganzen Zahlen, insbesondere der algebraischen Struktur der Reste, und später die Konstruktion der reellen Zahlen aus dem Ring der rationalen Cauchy-Folgen.

Um die folgenden Aussagen prägnanter formulieren zu können, brauchen wir eigene Begriffe für strukturerhaltende Abbildungen, das sind Abbildungen, die mit den gegebenen Verknüpfungen verträglich sind.

Definition 41.1. Seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, \circ, e_H)$ Gruppen. Eine Abbildung

$$\psi: G \longrightarrow H$$

heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn die Gleichheit

$$\psi(g \circ g') = \psi(g) \circ \psi(g')$$

für alle $g, g' \in G$ gilt.

Beispielsweise ist eine lineare Abbildung insbesondere ein Gruppenhomomorphismus.

Definition 41.2. Seien R und S Ringe. Eine Abbildung

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

heißt *Ringhomomorphismus*, wenn folgende Eigenschaften gelten:

- (1) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.
- (2) $\varphi(1) = 1$.
- (3) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

41.1. Restklassengruppen.

Bei der folgenden Konstruktion denke man an die Gruppe $\mathbb{Z}$ zusammen mit der Untergruppe $\mathbb{Z}n$ aller Vielfachen zu einer fixierten Zahl n , also an die Situation $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}$, oder an die Situation eines Untervektorraumes $U \subseteq K^n$, siehe Aufgabe 38.15.

Definition 41.3. Es sei $(G, 0, +)$ eine kommutative Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Für Elemente $x, y \in G$ setzen wir $x \sim_H y$ (und sagen, dass x und y äquivalent sind), wenn $x - y \in H$.

In dem eingangs erwähnten Beispiel sind zwei ganze Zahlen äquivalent, wenn ihre Differenz ein Vielfaches von n ist. Diese Äquivalenzrelation wurde schon in Beispiel 38.14 betrachtet. Wir sichern zuerst, dass wirklich in voller Allgemeinheit eine Äquivalenzrelation vorliegt.

Lemma 41.4. Es sei $(G, 0, +)$ eine kommutative Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und $\sim_H$ die durch H auf G definierte Relation. Dann liegt eine Äquivalenzrelation vor, und die Äquivalenzklasse zu 0 ist gerade H .

Beweis. Wegen

$$x - x = 0 \in H$$

ist die Relation reflexiv. Mit $x - y \in H$ ist auch $y - x \in H$, da Untergruppen unter dem Negativen abgeschlossen sind, was die Symmetrie der Relation bedeutet. Mit $x \sim_H y$ und $y \sim_H z$, also $x - y, y - z \in H$, ist auch

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in H,$$

da Untergruppen unter der Addition abgeschlossen sind, und somit ist auch $x \sim_H z$. Damit ist die Relation auch transitiv. Die Äquivalenz von x mit 0 bedeutet $x - 0 = x \in H$, so dass die letzte Aussage auch klar ist. $\square$

Die Äquivalenzklassen heißen in dieser Situation auch die *Nebenklassen* der Relation. Sie haben die Gestalt

$$[x] = x + H = \{x + h \mid h \in H\},$$

sie bestehen also aus allen Elementen, die man von x aus mit einem Element aus H erreichen kann. Man kann sich dabei H als einen mehr oder weniger restriktiven Vorrat an Sprungmöglichkeiten oder Bewegungsmöglichkeiten vorstellen, und die Äquivalenz zwischen x und y bedeutet, dass man von x nach y mit einem erlaubten Sprung gelangen kann.

Satz 41.5. Es sei $(G, 0, +)$ eine kommutative Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und G/H die Quotientenmenge zur durch H definierten Äquivalenzrelation auf G mit der kanonischen Projektion

$$q: G \longrightarrow G/H, g \longmapsto [g].$$

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Gruppenstruktur auf G/H derart, dass q ein Gruppenhomomorphismus ist.

Beweis. Da die kanonische Projektion zu einem Gruppenhomomorphismus werden soll, muss die Verknüpfung durch

$$[x] + [y] = [x + y]$$

gegeben sein, was bereits die Eindeutigkeit sichert. Wir müssen also zeigen, dass durch diese Vorschrift eine wohldefinierte Verknüpfung auf G/H definiert ist, die unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist. D.h. wir haben für $[x] = [x']$ und $[y] = [y']$ zu zeigen, dass $[x + y] = [x' + y']$ ist. Nach Voraussetzung können wir $x' = x + h$ und $y' = y + h'$ mit $h, h' \in H$ schreiben. Damit ist

$$x' + y' = (x + h) + (y + h') = x + y + (h + h')$$

und somit ist $[x + y] = [x' + y']$. Aus der Wohldefiniertheit der Verknüpfung auf G/H und der Surjektivität der kanonischen Projektion folgen die Gruppeneigenschaften und die Homomorphieeigenschaft der Projektion. $\square$

Definition 41.6. Es sei $(G, 0, +)$ eine kommutative Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Die Quotientenmenge

$$G/H$$

mit der aufgrund von Satz 41.5 eindeutig bestimmten Gruppenstruktur heißt *Restklassengruppe von G modulo H* . Die Elemente $[g] \in G/H$ heißen *Restklassen*. Für eine Restklasse $[g]$ heißt jedes Element $g' \in G$ mit $[g'] = [g]$ ein *Repräsentant* von $[g]$.

Beispiel 41.7. Die Untergruppen der ganzen Zahlen sind nach Satz 20.4 von der Form $\mathbb{Z}n$ mit $n \geq 0$. Die Restklassengruppen werden mit

$$\mathbb{Z}/(n)$$

bezeichnet (sprich „ $\mathbb{Z}$ modulo n “). Bei $n = 0$ ist das einfach $\mathbb{Z}$ selbst, bei $n = 1$ ist das die triviale Gruppe. Im Allgemeinen ist die durch die Untergruppe $\mathbb{Z}n$ definierte Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ dadurch gegeben, dass zwei ganze Zahlen a und b genau dann äquivalent sind, wenn ihre Differenz $a - b$ zu $\mathbb{Z}n$ gehört, also ein Vielfaches von n ist. Daher ist (bei $n \geq 1$) jede ganze Zahl zu genau einer der n Zahlen

$$0, 1, 2, \dots, n - 1$$

äquivalent (oder, wie man auch sagt, *kongruent modulo n*), nämlich zum Rest, der sich bei Division durch n ergibt. Diese Reste bilden also ein Repräsentantensystem für die Restklassengruppe, und diese besitzt n Elemente.

Diese werden im Allgemeinen mit $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}$ bezeichnet. Dabei ist $\bar{0}$ das neutrale Element, das negative Element zu $\bar{k}$ ist $\overline{n-k}$ und die Summe $\bar{i} + \bar{k}$ ist $\bar{i+k}$ bzw. $\overline{i+k-n}$, falls $i+k \geq n$ ist. Die Tatsache, dass die Restklassenabbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(n), a \longmapsto [a] = a \bmod n,$$

ein Homomorphismus ist, kann man auch so ausdrücken, dass der Rest einer Summe von zwei ganzen Zahlen nur von den beiden Resten, nicht aber von den Zahlen selbst, abhängt.

41.2. Restklassenringe.

Definition 41.8. Eine Teilmenge $\mathfrak{a}$ eines kommutativen Ringes R heißt *Ideal*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $0 \in \mathfrak{a}$.
- (2) Für alle $a, b \in \mathfrak{a}$ ist auch $a + b \in \mathfrak{a}$.
- (3) Für alle $a \in \mathfrak{a}$ und $r \in R$ ist auch $ra \in \mathfrak{a}$.

Eine Ideal ist insbesondere eine Untergruppe der kommutativen Gruppe $(R, +, 0)$. Somit ist die Restklassengruppe $R/\mathfrak{a}$ in kanonischer Weise eine kommutative Gruppe und die kanonische Abbildung

$$R \longrightarrow R/\mathfrak{a}$$

ist mit der Addition verträglich. Wir werden sehen, dass man in $R/\mathfrak{a}$ zusätzlich eine Multiplikation und ein Einselement definieren kann derart, dass $R/\mathfrak{a}$ zu einem kommutativen Ring wird und dass die kanonische Abbildung auch die Multiplikation respektiert, also ein Ringhomomorphismus ist. Bei $R = \mathbb{Z}$ ist jede Untergruppe bereits ein Ideal.

Die Nebenklassen $a + \mathfrak{a}$ sind gerade die Nebenklassen zur Untergruppe $\mathfrak{a} \subseteq R$. Zwei Elemente $a, b \in R$ definieren genau dann die gleiche Nebenklasse, also $a + \mathfrak{a} = b + \mathfrak{a}$, wenn ihre Differenz $a - b$ zum Ideal gehört.

Lemma 41.9. *Es sei R ein kommutativer Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $R/\mathfrak{a}$ die Quotientenmenge zur durch $\mathfrak{a}$ definierten Äquivalenzrelation auf R mit der kanonischen Projektion*

$$q: R \longrightarrow R/\mathfrak{a}, g \longmapsto [g].$$

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Ringstruktur auf $R/\mathfrak{a}$ derart, dass q ein Ringhomomorphismus ist.

Beweis. Nach Satz 41.5 gibt es nur eine Gruppenstruktur auf $R/\mathfrak{a}$ derart, dass die kanonische Abbildung ein Gruppenhomomorphismus ist. Da ein Ringhomomorphismus insbesondere ein Gruppenhomomorphismus bezüglich der Addition ist, ist dies die einzige additive Struktur, die in Frage kommt.

Da die kanonische Abbildung die Multiplikation respektieren soll, kommt nur $\bar{1}$ als neutrales Element der Multiplikation und

$$\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$$

als Multiplikation in Frage. Wir müssen zeigen, dass diese Multiplikation wohldefiniert ist. Seien zwei Restklassen mit unterschiedlichen Repräsentanten gegeben, also $\bar{a} = \bar{a}'$ und $\bar{b} = \bar{b}'$. Dann ist $a - a' \in \mathfrak{a}$ und $b - b' \in \mathfrak{a}$ bzw. $a' = a + x$ und $b' = b + y$ mit $x, y \in \mathfrak{a}$. Daraus ergibt sich

$$a'b' = (a + x)(b + y) = ab + ay + xb + xy.$$

Die drei hinteren Summanden gehören zum Ideal, so dass die Differenz $a'b' - ab \in \mathfrak{a}$ ist.

Aus der Wohldefiniertheit folgen die anderen Eigenschaften und insbesondere, dass ein Ringhomomorphismus in den Restklassenring vorliegt. $\square$

Die kanonische Projektion nennt man wieder die *Restklassenabbildung* oder den *Restklassenhomomorphismus*. Das Bild von $a \in R$ in $R/\mathfrak{a}$ wird mit $[a]$, häufig aber auch mit $\bar{a}$ oder einfach mit a selbst bezeichnet und heißt die *Restklasse* von a . Bei dieser Abbildung gehen genau die Elemente aus dem Ideal auf 0, d.h. der Kern dieser Restklassenabbildung ist das vorgegebene Ideal.

41.3. Die Restklassenringe von $\mathbb{Z}$.

Wir werden später die reellen Zahlen als den Restklassenring zum Ring aller rationalen Cauchy-Folgen modulo dem Ideal, das aus allen Nullfolgen besteht, erhalten. Zunächst sind die Restklassenringe zum Ring $\mathbb{Z}$ und zu den Idealen $\mathbb{Z}n$ die wichtigsten Beispiele. Die praktische Bedeutung von Lemma 41.9 liegt darin, dass man mit Resten nahezu gedankenlos rechnen darf, wenn man sich für das Restergebnis interessiert. Es ist egal, wann und wie oft man Zahlen durch ihre Reste oder durch andere Zahlen mit dem gleichen Rest ersetzt. In Aufgabe 14.6 und Aufgabe 14.9 hatten wir dies teilweise schon direkt nachgewiesen.

Durch die Konstruktion erhalten wir für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ einen kommutativen Ring mit n Elementen. Der folgende Satz charakterisiert, wann es sich um Körper handelt.

Satz 41.10. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.*

Beweis. Bei $n = 0$ ist der Restklassenring gleich $\mathbb{Z}$ selbst und kein Körper. Bei $n = 1$ besteht der Restklassenring aus nur einem Element und es ist $\bar{0} = \bar{1}$. Dies ist bei einem Körper explizit ausgeschlossen, und 1 ist keine Primzahl. Sei also von nun an $n \geq 2$. Wenn n keine Primzahl ist, so gibt es eine Darstellung

$$n = rs$$

mit kleineren Zahlen

$$1 < r, s < n.$$

Im Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ bedeutet dies, dass die Restklassen $\bar{r}$ und $\bar{s}$ nicht 0 sind, dass aber ihr Produkt

$$\bar{r}\bar{s} = \overline{rs} = \bar{n} = 0$$

ist. Das kann nach Lemma 23.12 in einem Körper nicht sein.

Sei nun n eine Primzahl. Wir müssen zeigen, dass jede von 0 verschiedene Restklasse $\bar{r}$, $0 < r < n$, ein inverses Element besitzt. Da n prim ist, sind r und n teilerfremd. Nach dem Lemma von Bezout gibt es ganze Zahlen a, b mit

$$ar + bn = 1.$$

Dies führt im Restklassenring zur Identität

$$\begin{aligned} \bar{1} &= \overline{ar + bn} \\ &= \bar{a}\bar{r} + \bar{b}\bar{n} \\ &= \bar{a}\bar{r}, \end{aligned}$$

die besagt, dass $\bar{r}$ und $\bar{a}$ invers zueinander sind. $\square$

Der Beweis zeigt auch, wie man zu einem Element r zwischen 1 und der Primzahl p das Inverse in $\mathbb{Z}/(p)$ findet. Man muss mit Hilfe des euklidischen Algorithmus in $\mathbb{Z}$ eine Darstellung der 1 finden. Aus

$$ar + bp = 1$$

lässt sich dann ablesen, dass die Restklasse von a das inverse Element zu r ist.

Beispiel 41.11. Der Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(7) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ hat die folgenden Verknüpfungstabellen:

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

41. ARBEITSBLATT

41.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 41.1. Es seien G und H Gruppen und $\varphi: G \rightarrow H$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass $\varphi(e_G) = e_H$ und $(\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1})$ für jedes $g \in G$ ist.

41.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 41.2. Sei $a \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto ax,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 41.3. Es sei K ein angeordneter Körper und $b \in K_+$ ein positives Element. Zeige, dass die ganzzahlige Exponentialfunktion

$$\mathbb{Z} \longrightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot, 1), n \longmapsto b^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 41.4.*

Bestimme, ob die durch die Gaußklammer gegebene Abbildung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}, q \longmapsto \lfloor q \rfloor,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist oder nicht.

Aufgabe 41.5. Es sei K ein Körper und sei

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in K, ad - bc \neq 0 \right\}$$

die Menge aller invertierbaren 2×2 -Matrizen.

a) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass M mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

b) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass die Abbildung

$$M \longrightarrow K^\times, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad - bc,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 41.6. Sei G eine (multiplikativ geschriebene) kommutative Gruppe und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Potenzieren

$$G \longrightarrow G, x \longmapsto x^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 41.7.*

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass sich Gruppenelemente $g \in G$ und Gruppenhomomorphismen φ von $\mathbb{Z}$ nach G über die Korrespondenz

$$g \longmapsto (n \mapsto g^n) \text{ und } \varphi \longmapsto \varphi(1)$$

entsprechen.

Aufgabe 41.8. Bestimme die Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Q}, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Aufgabe 41.9. Es sei K ein Körper. Zeige, dass es außer der trivialen Abbildung keinen weiteren Gruppenhomomorphismus von $(K, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$ gibt.

Aufgabe 41.10. Es bezeichne $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ die (multiplikative) Einheitengruppe von $\mathbb{Q}$. Man gebe einen nichttrivialen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^\times$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$ an.

Aufgabe 41.11. Sei $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wir betrachten die Restklassengruppe

$$\mathbb{Z}/(d) = \{0, 1, \dots, d-1\}.$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\psi: \mathbb{Z}/(d) \longrightarrow \mathbb{Z}, r \longmapsto r,$$

kein Gruppenhomomorphismus ist.

Wie in der Vorlesung erwähnt, sind lineare Abbildungen insbesondere Gruppenhomomorphismen. Den Kern kann man wie folgt auch für einen Gruppenhomomorphismus definieren.

Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Dann nennt man das Urbild des neutralen Elementes den *Kern* von φ , geschrieben

$$\ker \varphi = \varphi^{-1}(e_H) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}.$$

Es gilt auch wieder das Kernkriterium, also die Aussage, dass ein Gruppenhomomorphismus genau dann injektiv ist, wenn der Kern trivial ist, d.h. nur aus 0 besteht.

Aufgabe 41.12.*

Beweise das Kernkriterium für die Injektivität eines Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: G \longrightarrow H.$$

Aufgabe 41.13. Seien G und H Gruppen und sei $\varphi: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild von φ eine Untergruppe von H ist.

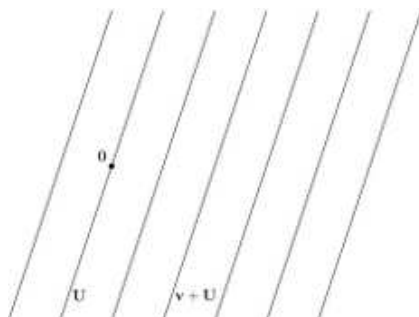
Aufgabe 41.14. Stelle in der Restklassengruppe $\mathbb{Q} \bmod \mathbb{Z}$ die folgenden Terme durch einen Bruch zwischen 0 und 1 dar.

- (1) $\frac{3}{8} + \frac{5}{7},$
- (2) $-\frac{6}{5},$
- (3) $\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{2}.$

Aufgabe 41.15. Bestimme für die folgenden Hintereinanderausführungen von Teildrehungen (in der Ebene um den Nullpunkt), um welche Gesamtdrehung es sich handelt. Die Gesamtdrehung soll dabei durch eine Drehung um höchstens 180 Grad (höchstens eine Halbdrehung) mit oder gegen den Uhrzeigersinn beschrieben werden.

- (1) Eine Halbdrehung im Uhrzeigersinn gefolgt von einer Vierteldrehung im Uhrzeigersinn.
- (2) Eine Halbdrehung im Uhrzeigersinn gefolgt von einer Vierteldrehung gegen den Uhrzeigersinn.
- (3) Eine Volldrehung im Uhrzeigersinn.
- (4) Eine drei-Viertel-Drehung gegen den Uhrzeigersinn gefolgt von einer zwei-Drittel-Drehung gegen den Uhrzeigersinn.
- (5) Eine Fünfteldrehung im Uhrzeigersinn gefolgt von einer fünf-Achtel-Drehung gegen den Uhrzeigersinn.

Aufgabe 41.16. Begründe, dass die Menge der zu einer Geraden $U \subset \mathbb{Q}^2$ parallelen Geraden eine kommutative Gruppe bilden. Addiere zwei solche Geraden miteinander. Illustriere die Wohldefiniertheit an diesem Beispiel.

**Aufgabe 41.17.***

Es sei G eine kommutative Gruppe und

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass H ebenfalls kommutativ ist.

Aufgabe 41.18. Es sei d ein Teiler von n . Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\psi: \mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(d)$$

derart gibt, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(n) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{Z}/(d) \end{array}$$

kommutiert. Warum lassen sich die Reste modulo 2 und modulo 5 besonders einfach berechnen?

Aufgabe 41.19. Es seien G und F kommutative Gruppen und sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe mit der zugehörigen Äquivalenzrelation $\sim$ auf G . Es sei $\varphi: G \rightarrow F$ ein Gruppenhomomorphismus mit $H \subseteq \ker \varphi$. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi}: G/\sim \rightarrow F$ mit $\tilde{\varphi} \circ p = \varphi$ gibt.

Aufgabe 41.20. Zeige direkt und unter Verwendung von Satz 20.4, dass jede Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ein Ideal ist.

Aufgabe 41.21. Zeige, dass $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ eine Untergruppe, aber kein Ideal ist.

Aufgabe 41.22.*

Zeige, dass ein kommutativer Ring genau dann ein Körper ist, wenn er genau zwei Ideale enthält.

Aufgabe 41.23.*

Zeige, dass der Kern eines Ringhomomorphismus

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

ein Ideal in R ist.

Aufgabe 41.24. Erstelle für $n = 2, 3, \dots, 10$ Operationstabellen für die Addition und die Multiplikation für die Restklassenringe $\mathbb{Z}/(n)$. Was haben diese Tabellen mit dem Rechnen im n -System zu tun?

Aufgabe 41.25.*

- (1) Gibt es eine Primzahl x derart, dass auch $x+10$ und $x+20$ Primzahlen sind?
- (2) Gibt es mehr als eine Primzahl x derart, dass auch $x+10$ und $x+20$ Primzahlen sind?

Aufgabe 41.26. Bestimme den Rest von $36!$ modulo 31 .

Aufgabe 41.27. Bestimme den Rest von $12!$ modulo 143 .

Aufgabe 41.28. Sei p eine Primzahl. Beweise durch Induktion den kleinen Fermat, also die Aussage, dass $a^p - a$ ein Vielfaches von p für jede ganze Zahl a ist.

Aufgabe 41.29.*

Bestimme das inverse Element zu $\overline{44}$ in $\mathbb{Z}/(97)$.

Aufgabe 41.30. Bestimme das inverse Element zu $\overline{57}$ in $\mathbb{Z}/(139)$.

Aufgabe 41.31.*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}/(n)$ der zugehörige Restklassenring. Zeige, dass $a \in \mathbb{Z}$ eine Einheit modulo n genau dann ist, wenn a und n teilerfremd sind.

Aufgabe 41.32. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Abbildung

$$K \longrightarrow \text{Mat}_n(K), a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix},$$

ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 41.33.*

Es sei K ein Körper. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: K \longrightarrow \text{Mat}_2(K), a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche Eigenschaften eines Ringhomomorphismus erfüllt die Abbildung φ , welche nicht?

Aufgabe 41.34. Löse die lineare Gleichung

$$3x = 5$$

für die folgenden Körper K

- a) $K = \mathbb{Q}$,
- b) $K = \mathbb{R}$,
- c) $K = \{0, 1\}$, der Körper mit zwei Elementen aus Beispiel 11.4,
- d) $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, der Körper mit sieben Elementen aus Beispiel 41.11.

Aufgabe 41.35. Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 41.11.

$$5x = 4.$$

Aufgabe 41.36. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 41.11.

41.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 41.37. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass der Betrag

$$K^\times \longrightarrow (K_+, \cdot, 1), \quad x \longmapsto |x|,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Was ist der Kern?

Aufgabe 41.38. (3 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Matrix einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}^2$ und ebenso von $\mathbb{Z}^2$ nach $\mathbb{Z}^2$ definiert. Untersuche diese beiden Gruppenhomomorphismen in Hinblick auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 41.39. (2 Punkte)

Stelle in der Restklassengruppe $\mathbb{Q} \bmod \mathbb{Z}$ die folgenden Terme durch einen Bruch zwischen 0 und 1 dar.

- (1) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2},$
- (2) $-\frac{3}{4},$
- (3) $11,$
- (4) $\frac{4}{7} + \frac{5}{6}.$

Aufgabe 41.40. (3 Punkte)

Erstelle Operationstabellen für die Addition und die Multiplikation für den Restklassenring $\mathbb{Z}/(13)$.

Aufgabe 41.41. (3 Punkte)

Berechne über $\mathbb{Z}/(5)$ das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 41.42. (3 Punkte)

Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 41.11.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

42. VORLESUNG - LÜCKEN AUF DEM ZAHLENSTRAHL

42.1. Lücken auf der Zahlengeraden.

Eine wichtige Intuition, die sich mit den Punkten auf (der positiven Hälfte davon) dem Zahlenstrahl und mit positiven reellen Zahlen verbindet, ist, dass sie alle möglichen Längen repräsentieren. Wenn man eine bestimmte Länge als Einheitslänge fixiert (also eine 1 auf dem Zahlenstrahl), so kann man jede natürliche Zahl durch das entsprechende Vielfache dieser Einheitsstrecke auf dem Strahl finden. Dies lässt sich durch mehrfaches Abtragen der Strecke realisieren. Auch eine rationale Zahl repräsentiert eine sinnvolle Länge, der Bruch $\frac{a}{b}$ repräsentiert diejenige Strecke, die die ganzzahlige Strecke a in b gleichlange Teile unterteilt. Diese Unterteilungspunkte kann man sich gut vorstellen, und sie lassen sich geometrisch unter Bezug auf die Strahlensätze auch konstruieren, wie zu Beginn der 24. Vorlesung ausgeführt und auch in der Konstruktion der rationalen Zahlen dargestellt wurde.

Wir beschäftigen uns hier mit der Frage, ob es über die rationalen Zahlen hinaus sinnvolle Streckenlängen gibt. Gemäß Satz 28.7 kann man jedes Element eines archimedisch angeordneten Körpers (und damit die Punkte der Zahlengeraden) durch Dezimalbrüche (also insbesondere durch rationale Zahlen) beliebig gut approximieren. Wenn man also nur an so was wie der Messgenauigkeit für beliebige Streckenlängen interessiert ist, braucht man die folgenden Überlegungen nicht. Es wird sich aber herausstellen, dass sehr prägnante Streckenlängen nicht durch rationale Zahlen exakt erfasst werden können, sondern dass man dazu neue Zahlen braucht.

Bemerkung 42.1. Aus der elementaren Geometrie der Ebene ist der Satz des Pythagoras bekannt, der besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenusenlänge c und den Kathetenlängen a und b die Gleichheit

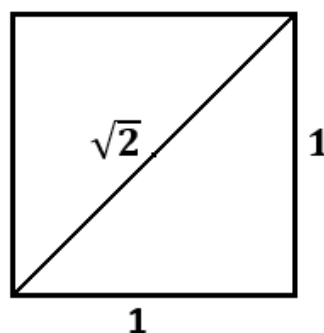
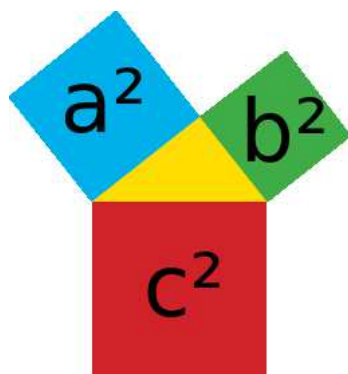
$$a^2 + b^2 = c^2$$

gilt. Die Flächeninhalte der Quadrate zu den Katheten ergänzen sich also zum Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates. Ein besonders bekanntes rechtwinkliges Dreieck ist das mit den ganzzahligen Seitenlängen 3, 4, 5. Man kann beliebige Seitenlängen a, b vorgeben und diese miteinander rechtwinklig anordnen und erhält durch Verbindung der beiden anderen Enden ein rechtwinkliges Dreieck. Aufgrund des Satzes des Pythagoras ist dann die Länge der Hypotenuse (nicht nur geometrisch, sondern auch) rechnerisch festgelegt. Die Hypotenusenlänge sollte also, wenn a und b sinnvolle Streckenlängen sind,

auch eine sinnvolle, mathematisch erfassbare Streckenlänge sein. Dies muss insbesondere für ganzzahlige a, b gelten, für die Summe $a^2 + b^2$ von zwei Quadratzahlen sollte es also stets eine Zahl geben, deren Quadrat gleich dieser Summe ist.



Pythagoras von Samos lebte im sechsten vorchristlichen Jahrhundert. „Sein“ Satz war aber schon tausend Jahre früher in Babylon bekannt.



Beispiel 42.2. Wir betrachten ein Quadrat mit Seitenlänge 1. Die Diagonale darin kann man als Hypotenuse des in dem Quadrat zweifach liegenden rechtwinkligen Dreiecks auffassen. Nach dem Satz des Pythagoras hat die Länge der Diagonalen die Eigenschaft, dass ihr Quadrat davon gleich

$$1^2 + 1^2 = 2$$

ist. Inwiefern gibt es eine Zahl x mit $x^2 = 2$? Dies ist keine einfache Frage. Was man ziemlich schnell begründen kann, ist, dass es innerhalb der rationalen Zahlen eine solche Zahl nicht geben kann! Wenn wir nämlich annehmen, dass die rationale Zahl

$$x = \frac{a}{b}$$

die Eigenschaft

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$$

besitzt, so kann man zunächst annehmen, dass die Darstellung gekürzt ist, also a und b keinen gemeinsamen Teiler ≥ 2 haben. Durch Multiplikation mit b^2 erhält man innerhalb der natürlichen Zahlen die Gleichung

$$a^2 = 2b^2.$$

Nennen wir diese Zahl z . Aufgrund der rechten Seite sieht man, dass diese Zahl gerade ist. Dann muss auch a gerade sein, da das Quadrat einer ungeraden Zahl ungerade ist. Wir können also

$$a = 2d$$

schreiben und aus der Gleichung

$$(2d)^2 = 2b^2$$

einmal die 2 kürzen, was

$$2d^2 = b^2$$

ergibt. Mit dem Argument von oben erhält man, dass auch b gerade ist, im Widerspruch zur gekürzten Darstellung.

Wir führen die folgende Sprechweise ein, die wir hauptsächlich für Körper anwenden werden.

Definition 42.3. In einem kommutativen Halbring R nennt man zu $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und einem Element $r \in R$ ein Element $x \in R$ mit

$$x^k = r$$

eine k -te *Wurzel* von r .

Im Allgemeinen gibt es keine Wurzeln, und wenn es welche gibt, so sind sie nicht eindeutig bestimmt. Im Kontext von Strecken und unter den positiven reellen Zahlen gibt es, wie wir später sehen werden, eindeutig bestimmte k -te Wurzeln. Sie werden mit $\sqrt[k]{x}$ bezeichnet, wobei wir diese Bezeichnung gelegentlich schon verwenden werden. Eine weitere Bezeichnungsweise ist $x^{\frac{1}{k}}$. Bei $k = 2$ spricht man von *Quadratwurzeln*, in diesem Fall schreibt man $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Wenn man sich auf die positive Hälfte eines angeordneten Körpers beschränkt, so gibt es maximal eine Wurzel. Im Falle der Existenz bezieht sich die Bezeichnung

$$\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$$

auf dieses eindeutig bestimmte Element.

Lemma 42.4. *Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $a \in K_{\geq 0}$. Ferner sei $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es höchstens ein $x \in K_{\geq 0}$ mit*

$$x^n = a.$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 25.18 (1). Wenn $y > x \geq 0$ ist, so ist auch $y^n > x^n \geq 0$ und können nicht beide gleich a sein. $\square$

Verschiedene Wurzeln aus verschiedenen Elementen in einem angeordneten Körper kann man häufig einfach vergleichen, indem man zu einer geeigneten Potenz übergeht und Lemma 25.18 heranzieht. Beispielsweise ist

$$\sqrt[3]{5} < \sqrt[4]{9},$$

da

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{12} = 5^4 = 625 < 729 = 9^3 = \left(\sqrt[4]{9}\right)^{12}$$

ist.

Eine weitgehende Verallgemeinerung der obigen Beobachtung, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, kommt im folgenden Satz zum Ausdruck.

Satz 42.5. *Sei $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ die kanonische Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl n . Sei k eine positive natürliche Zahl und sei vorausgesetzt, dass nicht alle Exponenten α_i ein Vielfaches von k sind. Dann gibt es keine rationale Zahl q mit der Eigenschaft*

$$n = q^k,$$

d.h. innerhalb der rationalen Zahlen besitzt n keine k -te Wurzel.

Beweis. Nehmen wir an, dass die rationale Zahl

$$q = \frac{a}{b}$$

die Eigenschaft

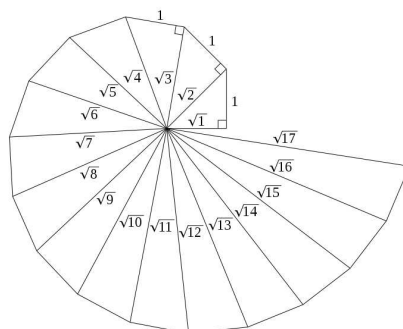
$$q^k = \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k} = n$$

besitzt. Wir multiplizieren mit b^k und erhalten in $\mathbb{N}$ die Gleichung

$$a^k = b^k \cdot n.$$

Wegen Satz 21.4 besitzt diese Zahl, nennen wir sie z , eine eindeutige Primfaktorzerlegung und insbesondere ist der p -Exponent davon zu jeder Primzahl p eindeutig bestimmt. Sei p eine Primzahl mit der Eigenschaft, dass der p -Exponent von n kein Vielfaches von k ist, was es nach Voraussetzung geben muss. Von der rechten Seite der letzten Gleichung her ist der p -Exponent von z kein Vielfaches von k , von der linken Seite her aber doch, was ein Widerspruch ist. $\square$

Diese Aussage bedeutet, dass eine natürliche Zahl innerhalb der rationalen Zahlen nur dann eine Wurzel besitzt, wenn sie schon innerhalb der natürlichen Zahlen eine Wurzel besitzt. Insbesondere sind Quadratwurzeln aus Primzahlen nie rational.



Die Spirale des Theodorus. In dieser Weise kann man alle Quadratwurzeln von natürlichen Zahlen geometrisch konstruieren.

Bemerkung 42.6. Die Quadratwurzel aus 2 tritt als Länge der Diagonalen in einem Quadrat mit Seitenlänge 1 auf und ist von daher sicher eine sinnvolle Streckenlänge. Wie sieht es mit den anderen Quadratwurzeln zu natürlichen Zahlen n aus? Wenn man die Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge n betrachtet, so besitzt die Diagonale die Seitenlänge $\sqrt{2}n$. Diese Zahl entsteht also durch eine einfache arithmetische Operation aus den bekannten natürlichen Zahlen und der $\sqrt{2}$. Wenn man Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen betrachtet, so erhält man als Diagonallängen beispielsweise $\sqrt{5}$ (Seitenlängen 1 und 2), $\sqrt{10}$ (Seitenlängen 1 und 3), $\sqrt{13}$ (Seitenlängen 2 und 3), u.s.w. Man kann aber durch eine einfach geometrische Konstruktion induktiv zeigen, dass jede Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl als Strecke auftritt. Dazu startet man mit der Strecke $\sqrt{2}$ und macht daraus die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete die Seitenlänge 1 besitzt. Die Hypotenuse dieses Dreiecks hat dann die Länge

$$\sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}.$$

So kann man aus jedem $\sqrt{n}$ auch die Länge $\sqrt{n+1}$ erhalten. Diese Prozedur wird in der *Spirale von Theodorus* veranschaulicht.



Der goldene Schnitt kommt auch in der Natur vor, hier im Verhältnis der benachbarten Umläufe bei einer Schnecke.

Beispiel 42.7. Es sei eine Strecke mit den Endpunkten A und B gegeben. Ein Punkt G auf der Strecke unterteilt die Strecke in zwei Teilstrecken. Wir suchen einen Punkt G , der die Eigenschaft besitzt, dass das Verhältnis der großen Teilstrecke zur kleinen Teilstrecke mit dem Verhältnis der Gesamtstrecke zur großen Teilstrecke übereinstimmt. Diese Eigenschaft definiert den sogenannten *goldenen Schnitt*. Wenn man mit der Einheitsstrecke von 0 bis 1 auf der Zahlengeraden arbeitet, so geht es um die Bedingung

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}.$$

Diese Bedingung kann man zu

$$1-x = x^2$$

bzw.

$$x^2 + x - 1 = 0$$

umwandeln. Eine weitere Umformung führt auf

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$$

bzw.

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4},$$

also

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sim 0,6180339\dots$$

Da $\sqrt{5}$ irrational ist, ist auch die Zahl des Goldenen Schnitts irrational. Der Kehrwert dieser Zahl, also das Verhältnis von großer Strecke zu kleiner Strecke, ist übrigens

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sim 1,6180339\dots$$

Es liegt also die Besonderheit vor, dass die Nachkommaziffern von x und von $1/x$ übereinstimmen.

Bemerkung 42.8. Die Beobachtung, dass eine Gleichung der Form

$$x^2 = c$$

mit $c \in \mathbb{Q}$ innerhalb der rationalen Zahlen im Allgemeinen keine Lösung besitzt, und dass man daher nach einer Erweiterung der Zahlen suchen sollte, in dem es eine Lösung gibt, sollte man in Analogie zu den Gleichungen sehen, die vorhergehende Zahlenbereichserweiterungen motiviert haben. Die Gleichungen der Form

$$a = b + x,$$

die innerhalb der natürlichen Zahlen formulierbar, aber nicht lösbar sind, führten zur Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$, und die Gleichungen der Form

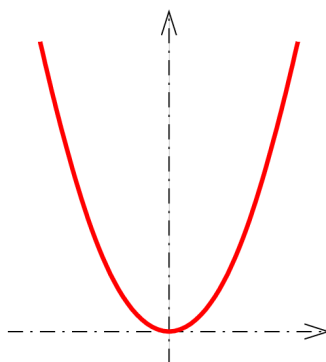
$$a = bx,$$

die innerhalb der ganzen Zahlen formulierbar, aber nicht lösbar sind, führten zur Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$.



Beispiel 42.9. Ein Kreis mit der Einheitsstrecke als Durchmesser (oder als Radius) hat einen bestimmten „Umfang“. Ist dieser Umfang eine sinnvolle Streckenlänge? Einerseits ist der Kreisbogen gekrümmt und nicht gerade, wie das Strecken sind, von daher ist es keineswegs selbstverständlich, dass der Umfang eine sinnvolle Streckenlänge sein soll. Andererseits ist aber die Vorstellung naheliegend, dass man den Kreis an einer Geraden (wie der Zahlengeraden) abrollen kann und dabei schauen kann, wohin man nach genau einer vollen Umdrehung gelangt. Die dadurch auf der Zahlengeraden markierte Zahl, also die Kreisbogenlänge, nennt man π . (wenn man die Einheitsstrecke als Radius nimmt, erhält man beim Abrollen 2π). Dies ist eine sowohl von ihrer mathematischen Natur her als auch von der numerischen Berechnung her schwierige Zahl. Zum Beispiel ist es nicht einfach zu zeigen, dass diese Zahl nicht rational ist.

Die Irrationalität von π wurde im Laufe des achtzehnten Jahrhunderts gezeigt, ebenso die Irrationalität der Zahl e . Es ist bis heute unbekannt, ob die Summe $e + \pi$ irrational ist.



Beispiel 42.10. Wir betrachten die *Standardparabel*, also den Graphen der Funktion

$$K \longrightarrow K, t \longmapsto t^2,$$

wobei K ein archimedisch angeordneter Körper ist. Kann man dem Ausschnitt des Graphen, der sich oberhalb des Einheitsintervalles von 0 bis 1 erstreckt, eine sinnvolle Länge zuordnen? Wenn ja, gehört diese Zahl zu den rationalen Zahlen?

Bemerkung 42.11. Nach Satz 28.7 führt jedes Element $x \in K$ in einem archimedisch angeordneten Körper zu einer Dezimalbruchfolge, für die die Abschätzung

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}$$

gilt und die nach Korollar 28.10 gegen x konvergiert. Grundsätzlich kann man sich zu einer jeden Dezimalbruchfolge, also einer Folge aus Dezimalbrüchen

$$x_n = \frac{a_n}{10^n}$$

mit $a_n \in \mathbb{Z}$ und mit der Eigenschaft

$$\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{a_n + 1}{10^n}$$

fragen, ob es dazu einen Punkt in dem Körper gibt, gegen den die Folge konvergiert. Dies ist keineswegs immer der Fall, für die rationalen Zahlen gilt es nicht, und zwar werden wir später in Satz 47.7 sehen, dass genau die periodischen Dezimalbruchfolgen gegen eine rationale Zahl konvergieren. Gibt es für die nichtperiodischen Dezimalbruchfolgen eine sinnvolle Interpretation als eine Zahl? Nichtperiodische Dezimalbruchfolgen können durchaus systematisch sein, wie die (in Kommazahlschreibweise gegebenen) Dezimalbruchfolgen

$$0,101001000100001000001\dots$$

oder

$$0,123456789101112131415\dots$$

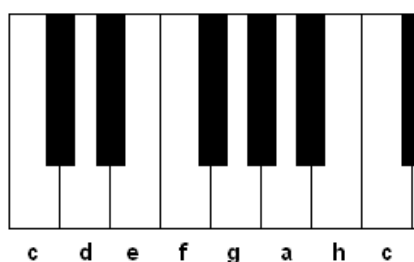
verdeutlichen.

Bemerkung 42.12. Die Frage, inwiefern es über die rationalen Zahlen hinaus weitere sinnvolle Zahlen gibt, geht in die griechische Antike zurück. Die Frage wurde in der Form gestellt, ob je zwei in natürlicher Weise gegebene Strecken zueinander kommensurabel sind, ob es also eine dritte Strecke gibt, von der beide Strecken ganzzahlige Vielfache sind. Die Pythagoreer waren von der Harmonie des Universums überzeugt und das schloss ihrer Auffassung nach mit ein, dass alle Streckenverhältnisse durch ganze Zahlen ausgedrückt werden können. Solche ganzzahligen Beziehungen fanden sie in der Musik (Schwingungsverhältnisse) und vermuteten sie für die Planeten und ihre Bewegungen und für die gesamte Geometrie. Es wird darüber spekuliert, ob in den pythagoreischen Kreisen die in Beispiel 42.2 besprochene

Überlegung, die die Irrationalität der $\sqrt{2}$ begründet (die Inkommensurabilität von Seitenlänge und Diagonale in einem Quadrat), bekannt war und sogar geheimgehalten wurde. Jedenfalls setzte sich später in der Antike die Erkenntnis durch, dass es irrationale Zahlen geben muss.

Wie in Beispiel 22.7 erwähnt, sind die Schwingungsverhältnisse bei einer Tonart feste rationale Verhältnisse. Ein Klavier wird allerdings anders gestimmt, rationale Verhältnisse gelten also noch nicht einmal in der Musik.

Beispiel 42.13. In der gleichstufigen Stimmung eines Klaviers zerlegt man eine Oktave in zwölf gleichgroße Frequenzverhältnisse. Da eine Oktave das Frequenzverhältnis $2 : 1$ bedeutet, ist das Frequenzverhältnis von zwei benachbarten (weißen oder schwarzen) Tasten durch $\sqrt[12]{2}$ gegeben. Somit sind die Schwingungsverhältnisse zwischen den Tönen im Allgemeinen irrational. Der Vorteil bei dieser Stimmung ist, dass man jede Tonart auf dem Klavier mit unmerklichen Abweichungen von den harmonischen rationalen Verhältnissen spielen kann.



Beispiel 42.14. Wir betrachten ein Quadrat mit den Eckpunkten

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).$$

Eine Schnecke kriecht innerhalb des Quadrates von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ und eine zweite Schnecke von $(1, 0)$ nach $(0, 1)$. Treffen sich die beiden Schleimspuren? Diese Frage ist nicht ohne Bezug auf Zahlenbereiche zu beantworten. Wenn es sich um (stückweise) lineare Bewegungen handelt, die beispielsweise über den rationalen Zahlen definiert sind, so gibt es auch einen Schnittpunkt mit rationalen Koordinaten (vergleiche Korollar 34.8). Wenn sich dagegen die beiden Schnecken längs der Kreise mit Radius 1 bewegen, so gibt es „optisch“ betrachtet einen Schnittpunkt (x, y) . Da dieser auf den beiden Kreisen liegt, erhalten wir die beiden Bedingungen

$$x^2 + y^2 = 1$$

und

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1,$$

was auf

$$0 = x^2 - (x - 1)^2 = 2x - 1,$$

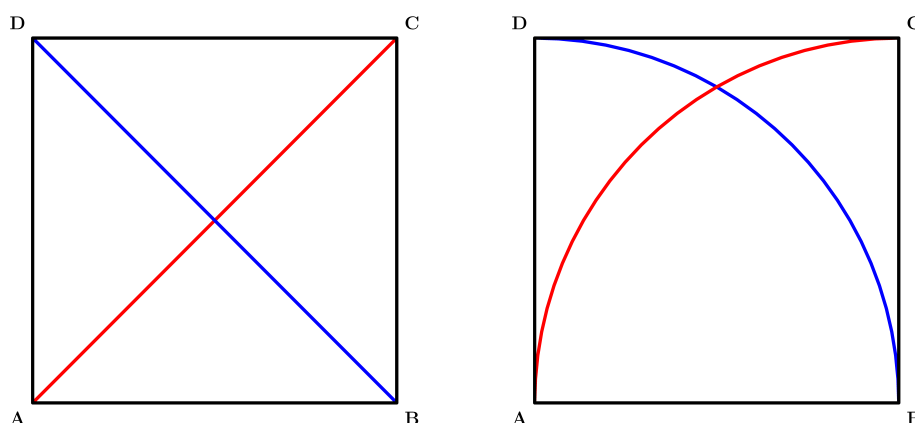
also $x = \frac{1}{2}$ führt und auch von der Symmetrie der Situation her klar ist. Dies führt allerdings zu

$$y^2 = \frac{3}{4},$$

also

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

und dies ist nach Satz 42.5 eine irrationale Zahl. Es gibt also innerhalb der rationalen Zahlen keinen Schnittpunkt. Innerhalb der reellen Zahlen werden wir mit dem Stetigkeitskonzept und dem Zwischenwertsatz eine Situation kennenlernen, indem es stets Schnittpunkte gibt.



42.2. Lücken schließen.

Wie kann man die irrationalen Lücken auf der Zahlengeraden in sinnvoller Weise adressieren bzw. lokalisieren und letztlich schließen? Mit diesen Fragen werden wir uns in den nächsten Vorlesungen beschäftigen.

42. ARBEITSBLATT

42.1. Die Pausenaufgabe.

Wenn in den folgenden Aufgaben Wurzelausdrücke vorkommen, so ist damit gemeint, dass man sich in einem angeordneten Körper befindet, in dem es diese (positiven) Wurzeln gibt.

Aufgabe 42.1. Vergleiche $\sqrt[10]{10}$ und $\sqrt[3]{2}$.

42.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 42.2. Was hat die Din-Norm für Papier mit Wurzeln zu tun?

Aufgabe 42.3. Welche elementargeometrischen Beweise für den Satz des Pythagoras kennen Sie?

Aufgabe 42.4. Kann man ein Quadrat mit Seitenlänge 5 durch drei Quadrate mit Seitenlänge 4 überdecken?

Aufgabe 42.5. Erläutere, warum die Schreibweise $x^{\frac{1}{k}}$ für die k -te Wurzel aus x sinnvoll ist.

Aufgabe 42.6. Berechne $\sqrt[12]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^5}$.

Aufgabe 42.7. Zeige, dass es in $\mathbb{Q}$ kein Element x mit $x^2 = 2$ gibt.

Aufgabe 42.8. Es sei p eine Primzahl. Zeige unter Verwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen, dass die reelle Zahl $\sqrt{p}$ irrational ist.

Aufgabe 42.9.*

Ist die Zahl $\sqrt{7} + \sqrt{7}$ rational?

Aufgabe 42.10.*

Ist die reelle Zahl

$$\sqrt{\frac{1}{11}}$$

rational?

Aufgabe 42.11.*

Begründe geometrisch, dass die Wurzeln $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, als Länge von „natürlichen“ Strecken vorkommen.

Aufgabe 42.12. Es sei K ein angeordneter Körper und $a \in K$. Zeige, dass die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in K besitzt.

Aufgabe 42.13. Es sei K ein Körper und $a \in K$. Zeige, dass die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in K besitzt.

Aufgabe 42.14. Zeige, dass es in $\mathbb{Z}/(5)$ vier Lösungen für die Gleichung

$$x^4 = 1$$

gibt.

Aufgabe 42.15. Man konstruiere einen kommutativen Ring R , in dem die 4 mindestens drei Quadratwurzeln besitzt.

Aufgabe 42.16. Vergleiche

$$\sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}.$$

Aufgabe 42.17. Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei vorausgesetzt, dass in K die (positiven) Elemente $8^{1/2}$ und $25^{1/3}$ existieren. Welches ist größer?

Aufgabe 42.18. Vergleiche

$$\sqrt{2} + \sqrt{7} \text{ und } \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Aufgabe 42.19. Es sei K ein angeordneter Körper und $a, b, c \in K_+$ mit $a \geq b \geq c$. Zeige

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} \leq \sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}.$$

Aufgabe 42.20. Bestimme die Quadrate und ihre Quadratwurzeln im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(13)$.

Aufgabe 42.21. Es sei K ein angeordneter Körper mit $\sqrt{n} \in K_+$, wobei $n \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl sei. Zeige, dass

$$\{p + q\sqrt{n} \mid p, q \in \mathbb{Q}\} \subseteq K$$

ein Körper ist.

Aufgabe 42.22. Betrachte die Menge

$$K = \{p + q\sqrt{5} \mid p, q \in \mathbb{Q}\},$$

wobei $\sqrt{5}$ zunächst lediglich ein Symbol ist.

- Definiere eine Addition und eine Multiplikation auf dieser Menge derart, dass $\sqrt{5}^2 = 5$ ist und dass K zu einem Körper wird.
- Definiere eine Ordnung derart, dass K zu einem angeordneten Körper wird und dass $\sqrt{5}$ positiv wird.
- Fasse die Elemente von K als Punkte im $\mathbb{Q}^2$ auf. Skizziere eine Trennlinie im $\mathbb{Q}^2$, die die positiven von den negativen Elementen in K trennt.
- Ist das Element $23 - 11\sqrt{5}$ positiv oder negativ?

Zu einem kommutativen Ring R bezeichnet man die Elemente, die bezüglich der Multiplikation ein Inverses besitzen, als Einheiten. Sie bilden eine Gruppe, die sogenannte Einheitengruppe, die mit $R^\times$ bezeichnet wird. Bei einem Körper ist einfach $K^\times = K \setminus \{0\}$.

Aufgabe 42.23. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Quadrate in $K^\times$ eine Untergruppe von $K^\times$ bilden.

Aufgabe 42.24. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass die Quadrate in $K^\times$ eine Untergruppe von K_+ bilden.

Aufgabe 42.25. Es sei $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{Q}_+$ die (multiplikative) Untergruppe der Quadrate innerhalb der positiven rationalen Zahlen und es sei $\sim$ die zugehörige Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}_+$. Zeige, dass jede Äquivalenzklasse einen eindeutigen Repräsentanten besitzt, der durch eine natürliche Zahl gegeben ist, in deren Primfaktorzerlegung jeder Primfaktor einfach ist (die 1 erfülle diese Eigenschaft).

Aufgabe 42.26. Wir betrachten die Menge

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \text{Mat}_2(\mathbb{Q}).$$

- Zeige, dass R eine Untergruppe von $\text{Mat}_2(\mathbb{Q})$ (bezüglich der Addition) ist.
- Zeige, dass R unter der Matrizenmultiplikation abgeschlossen ist.
- Zeige, dass R die rationalen $\mathbb{Q}$ als Diagonalmatrizen enthält.
- Zeige, dass R ein kommutativer Ring ist.
- Zeige, dass R ein Körper ist.
- Zeige, dass R eine Quadratwurzel zu -1 enthält.

Aufgabe 42.27.*

Berechne

$$\left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2}\sqrt{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{5}{3}\sqrt{5}\right).$$

Aufgabe 42.28. Berechne

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} + \frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right) \cdot \left(-4 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{5} + \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right).$$

Aufgabe 42.29.*

Ein angeordneter Körper K enthalte die Wurzeln $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[7]{2}$. Zeige, dass K auch $\sqrt[21]{2}$ enthält.

Aufgabe 42.30.*

Drücke

$$\sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[3]{7}$$

mit einer einzigen Wurzel aus.

Aufgabe 42.31. Drücke

$$\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[4]{5}$$

mit einer einzigen Wurzel aus.

Aufgabe 42.32. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass

$$U = \{x \in K_+ \mid \text{Es gibt ein } m \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } x^m \in \mathbb{Q}\}$$

eine Untergruppe von $(K_+, 1, \cdot)$ bildet.**Aufgabe 42.33.***

Wir betrachten Rechtecke mit dem konstanten Flächeninhalt c . Zeige, dass unter diesen Rechtecken das Quadrat den minimalen Umfang besitzt.

Aufgabe 42.34. Wir betrachten auf $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{N}_+$ die Relation $(p, m) \sim (q, n)$, falls $p^n = q^m$ gilt.

(1) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

(2) Es sei

$$Q = (\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{N}) / \sim$$

die zugehörige Quotientenmenge. Zeige, dass auf Q durch

$$[(p, m)] \cdot [(q, n)] := [(p^n q^m, nm)]$$

eine wohldefinierte Verknüpfung gegeben ist.

(3) Zeige, dass Q eine kommutative Gruppe ist.

(4) Es sei K ein angeordneter Körper, in dem es zu jedem $p \in \mathbb{Q}_+$ und jedes $m \in \mathbb{N}_+$ die Wurzel $\sqrt[m]{p}$ gibt. Zeige, dass die Zuordnung

$$Q \longrightarrow K_+, [(p, m)] \longmapsto \sqrt[m]{p},$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist.

42.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 42.35. (2 Punkte)

Bestimme die Quadrate und ihre Quadratwurzeln im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(19)$.

Aufgabe 42.36. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Gleichung $x^n = a$ höchstens zwei Lösungen in K besitzt.

Aufgabe 42.37. (2 Punkte)

Zeige, dass es in $\mathbb{Z}/(7)$ sechs Lösungen für die Gleichung

$$x^6 = 1$$

gibt.

Aufgabe 42.38. (4 Punkte)

Zeige, dass man $\sqrt{3}$ nicht in der Form

$$\sqrt{3} = p + q\sqrt{2}$$

mit $p, q \in \mathbb{Q}$ schreiben kann.

Aufgabe 42.39. (4 Punkte)

Es seien a, b ganze Zahlen und $x \in \mathbb{Q}$ eine Lösung der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Zeige, dass x eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 42.40. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $a \in K$, $a \geq 1$. Es seien $m \geq n$ positive ganze Zahlen. Zeige

$$\sqrt[m]{a} \leq \sqrt[n]{a}.$$

43. VORLESUNG - QUADRATWURZELN

43.1. Quadratwurzeln.

Wir betrachten die Quadratwurzel $\sqrt{5}$, von der wir die algebraische Eigenschaft, dass ihr Quadrat gleich 5 sein soll, und eine geometrische Realisierung schon kennen. Wir wissen auch, dass es innerhalb der rationalen Zahlen eine solche Zahl nicht gibt. Es ist im Moment nicht klar, in welcher Weise es diese Zahl gibt, zu welcher Zahlenmenge sie gehören soll und wie mit ihr zu rechnen ist. Es ist aber klar, dass sie innerhalb der rationalen Zahlen eine „Lücke“ aufweist. In den nächsten Vorlesungen diskutieren wir Möglichkeiten, solche Lücken zu erkennen, zu erfassen, zu lokalisieren, rational zu approximieren und rechnerisch mit ihnen umzugehen. In einem weiteren Schritt werden wir sämtliche Lücken systematisch auffüllen und erhalten dadurch die reellen Zahlen, die ihrerseits lückenlos, oder, wie wir sagen werden, vollständig sind. Diesen Prozess kann man mathematisch mit einer Reihe von unterschiedlichen Konzepten durchführen, die alle letztlich zu ein und dem gleichen Körper der reellen Zahlen führen. Wir werden die folgenden Konzepte kennenlernen.

- Cauchy-Folgen.
- Wachsende, nach oben beschränkte Folgen.
- Dezimalziffernentwicklungen (Dezimalbruchfolgen).
- Intervallschachtelungen.
- Dedekindsche Schnitte.

Diese Konzepte besitzen jeweils viele Vor- und Nachteile, die wir später eingehend diskutieren werden. Als mögliche Kriterien seien aber schon mal genannt.

- (1) Nähe zur Intuition der Zahlengeraden.
- (2) Rechnerische Zugänglichkeit.
- (3) Einfachheit der Konstruktion der reellen Zahlen.
- (4) Einfachheit des Nachweises von Eigenschaften der reellen Zahlen.
- (5) Bedeutung über die Einführung der reellen Zahlen hinaus.
- (6) Mathematische Eleganz.

In dieser Vorlesung werden wir die Ideen, die diesen Konzepten zugrunde liegen, beispielhaft an Quadratwurzeln vorstellen.

Beispiel 43.1. Wir wissen, dass es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 5 ist. Wir können aber für jede rationale Zahl x einfach bestimmen, ob ihr Quadrat x^2 größer oder kleiner als 5 ist, und das Ergebnis können wir dann so interpretieren, dass x kleiner oder größer als die nicht vorhandene Zahl $\sqrt{5}$ ist (wir beschränken uns im Moment auf positive rationale Zahlen). Für $x = 2$ ist $2^2 = 4 < 5$ zu klein und für $x = 3$ ist $3^2 = 9 > 5$ zu groß. Damit müssen wir uns über die rationalen Zahlen, die kleiner als 2 oder aber größer als 3 sind, gar keine Gedanken mehr machen. Aus $y \geq x \geq 0$ folgt aus den Anordnungsseigenschaften direkt $y^2 \geq x^2$, siehe Lemma 19.13 (8). Man muss also nur Rechnungen für rationale Zahlen zwischen 2 und 3 durchführen. Nehmen wir beispielsweise $x = \frac{7}{3}$, so ist

$$\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} > 5.$$

Nehmen wir $x = \frac{9}{4}$, so ist

$$\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} > 5.$$

Bei $x = \frac{11}{5}$ ist

$$\left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{121}{25} < 5.$$

Wir wissen also, dass alle rationalen Zahlen oberhalb von $\frac{9}{4}$ (wegen $\frac{7}{3} > \frac{9}{4}$ ist dies die bessere Grenze) zu groß und alle rationalen Zahlen unterhalb von $\frac{11}{5}$ zu klein sind, wir müssen also nur noch Zahlen zwischen $\frac{11}{5} = 2,2$ und $\frac{9}{4} = 2,25$ überprüfen. Das vermittelt eine gewisse Größenvorstellung für die „gesuchte Zahl“ $\sqrt{5}$, es gibt aber unendlich viele Zahlen, die ebenfalls zwischen diesen beiden Zahlen liegen. Wenn wir endlich viele Zahlen dahingehend überprüft haben, ob ihr Quadrat kleiner oder größer als 5 ist, so sind wir stets in einer vergleichbaren Situation, dass die Zahlen zwar einen „kleinen“ Bereich eingrenzen, es aber darin unendlich viele Zahlen gibt.

Ein anderer Ansatz ist es, direkt die Mengen

$$K = \{x \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \mid x^2 < 5\}$$

und

$$G = \{x \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \mid x^2 > 5\}$$

zu betrachten. Dies ist eine Zerlegung von $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ in zwei disjunkte Teilmengen. Dieses Paar (bzw. eine Menge davon, da sie ja die andere als Komplement festlegt) ist eine exakte Beschreibung der durch $\sqrt{5}$ in den rationalen Zahlen bedingten Lücke, der Spur, die $\sqrt{5}$ auf den rationalen Zahlen hinterlässt. Rechnerisch wurde zwar nichts gewonnen, da man nach wie vor für jedes einzelne x durch eine Rechnung überprüfen muss, ob x zu K oder zu G gehört. Es ist aber immerhin ein mathematisches Objekt gefunden, das $\sqrt{5}$ eindeutig beschreibt. Der Preis ist, dass dieses mathematische Objekt in der

Potenzmenge der rationalen Zahlen angesiedelt und somit sehr abstrakt ist. Es handelt sich um einen sogenannten *Dedekindschen Schnitt*.

Beispiel 43.2. Wir versuchen nun, die Zahl $\sqrt{5}$ systematisch durch Dezimalbrüche zu approximieren. Wir wissen bereits

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

(eine solche Abschätzung ergibt nur Sinn in einem angeordneten Körper, in dem es ein Element $\sqrt{5}$ gibt, die Grenzen links und rechts gehören aber jedenfalls zu $\mathbb{Q}$). Was ist die beste Approximation mit einem Dezimalbruch mit 10 im Nenner? Durch etwas Probieren erhält man

$$\frac{22}{10} < \sqrt{5} < \frac{23}{10}.$$

Entsprechend erhält man für den Nenner 10^2 die beste Approximation

$$\frac{223}{100} < \sqrt{5} < \frac{224}{100},$$

für den Nenner 10^3 erhält man

$$\frac{2236}{1000} < \sqrt{5} < \frac{2237}{1000},$$

u.s.w. Wenn man die vorhergehende beste Approximation um eine Zehnerpotenz verbessern möchte, so muss man maximal vier nächste Ziffern durchprobieren, man ergänzt die bisherige untere Ziffernfolge um eine 5 u.s.w. Die ersten approximierenden Dezimalbrüche von unten sind

$$2, \frac{22}{10}, \frac{223}{100}, \frac{2236}{1000}, \frac{22360}{10000}, \frac{223606}{100000}, \frac{2236067}{1000000}, \dots$$

Mit dem Intervallbegriff lässt sich die zuletzt formulierte Approximation durch die Dezimalbruchfolge unter einen etwas anderen Gesichtspunkt stellen.

Beispiel 43.3. Aufgrund der Berechnungen in Beispiel 43.2 wissen wir, dass in einem angeordneten Körper, der die $\sqrt{5}$ enthält, diese in den zunehmend kleiner werdenden Intervallen

$$[2, 3] \supseteq \left[\frac{22}{10}, \frac{23}{10}\right] \supseteq \left[\frac{223}{100}, \frac{224}{100}\right] \supseteq \left[\frac{2236}{1000}, \frac{2237}{1000}\right] \supseteq \dots$$

liegt. Die Länge der Intervalle ist hier $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$. Diese Intervalle gibt es auch in $\mathbb{Q}$ und sie helfen bei der Lokalisierung von $\sqrt{5}$, auch wenn diese Zahl gar nicht zu $\mathbb{Q}$ gehört. Der Vorteil einer solchen Intervallschachtelung gegenüber der Dezimalbruchfolge ist, dass sie den Wert von beiden Seiten her eingrenzt, während die Dezimalbruchfolge direkt nur untere approximierende Werte liefert. Wenn man beliebige konvergente Folgen betrachtet, so weiß man nur, dass grundsätzlich eine Approximation vorliegt, ohne dass man dies quantitativ ausdrücken kann. Bei einer Intervallschachtelung gibt jedes beteiligte Intervall eine direkte Eingrenzung, aus der der maximale Fehler unmittelbar abschätzbar ist.

Eine spezielle Methode ist die *Intervallhalbierung*. Dabei halbiert man das zuvor gefundene Intervall in zwei gleichlange Hälften und schaut, ob das gesuchte Element zur kleineren oder zur größeren Hälfte gehört und nimmt dann das passende Intervall als nächstes Intervall. Bei diesem Verfahren halbiert sich die Intervalllänge mit jedem Schritt. In unserem Beispiel erhält man

$$\begin{aligned}
 [2, 3] &\supseteq [2, \frac{5}{2}] \\
 &\supseteq [2, \frac{9}{4}] \\
 &\supseteq [\frac{17}{8}, \frac{9}{4}] \\
 &\supseteq [\frac{35}{16}, \frac{9}{4}] \\
 &\supseteq [\frac{71}{32}, \frac{9}{4}] \\
 &\supseteq [\frac{143}{64}, \frac{9}{4}] \\
 &\supseteq [\frac{143}{64}, \frac{287}{128}] \\
 &\supseteq \dots
 \end{aligned}$$

43.2. Das Heron-Verfahren.

Die oben in Beispiel 43.2 angeführte Dezimalbruchfolge wirkt vertraut, weil die Dezimalziffernentwicklung vertraut ist, und weil das das ist, was der Taschenrechner ausspuckt. Es gibt aber Folgen, die weit schneller die Quadratwurzel berechnen und die auch der Taschenrechner verwendet. Das sogenannte *Heron-Verfahren* (auch *babylonisches Wurzelziehen* genannt) ist ein typisches Beispiel dafür, dass Dezimalbruchfolgen im Allgemeinen nicht optimal sind, und es künstlich wäre, sich auf sie zu beschränken.

Beispiel 43.4. Wir wollen die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl „berechnen“, sagen wir von 5. Eine solche Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = 5$ gibt es nicht innerhalb der rationalen Zahlen, wie aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgt. Wenn $x \in \mathbb{R}$ ein solches Element ist, so hat auch $-x$ diese Eigenschaft. Mehr als zwei Lösungen kann es aber nach Aufgabe 42.12 nicht geben, so dass wir nur nach der positiven Lösung suchen müssen.

Obwohl es innerhalb der rationalen Zahlen keine Lösung für die Gleichung $x^2 = 5$ gibt, so gibt es doch beliebig gute Approximationen innerhalb der rationalen Zahlen dafür. Beliebig gut heißt dabei, dass der Fehler (oder die Abweichung) unter jede positive Schranke gedrückt werden kann. Das klassische Verfahren, um eine Quadratwurzel beliebig gut anzunähern, ist das *Heron-Verfahren*, das man auch *babylonisches Wurzelziehen* nennt. Dies ist ein *iteratives Verfahren*, d.h., die nächste Approximation wird aus den vorausgehenden Approximationen berechnet. Beginnen wir mit $a := x_0 := 3$ als erster Näherung. Wegen $x_0^2 = 3^2 = 9 > 5$ ist x_0 zu groß, d.h. es ist

$x_0 > 0$. Aus $a^2 > 5$ (mit a positiv) folgt zunächst $5/a^2 < 1$ und daraus $(5/a)^2 < 5$, d.h. $5/a < \sqrt{5}$. Man hat also die Abschätzungen

$$\frac{5}{a} < \sqrt{5} < a$$

wobei links eine rationale Zahl steht, wenn rechts eine rationale Zahl steht. Eine solche Abschätzung vermittelt offenbar eine quantitative Vorstellung darüber, wo $\sqrt{5}$ liegt. Die Differenz $a - 5/a$ ist ein Maß für die Güte der Approximation.

Beim Startwert 3 ergibt sich, dass die Quadratwurzel von 5 zwischen $5/3$ und 3 liegt. Man nimmt nun das arithmetische Mittel der beiden Intervallgrenzen, also

$$x_1 := \frac{3 + \frac{5}{3}}{2} = \frac{7}{3}.$$

Wegen $(\frac{7}{3})^2 = \frac{49}{9} > 5$ ist dieser Wert wieder zu groß und daher liegt $\sqrt{5}$ im Intervall $[5 \cdot \frac{3}{7}, \frac{7}{3}]$. Von diesen Intervallgrenzen nimmt man erneut das arithmetische Mittel und setzt

$$x_2 := \frac{\frac{15}{7} + \frac{7}{3}}{2} = \frac{47}{21}$$

als nächste Approximation. So fortfahrend erhält man eine immer besser werdende Approximation von $\sqrt{5}$.

Beispiel 43.5. Wir berechnen eine approximierende Folge zu $\sqrt{5}$ wie in Beispiel 43.4, allerdings mit dem Startwert 2. Die ersten Folgenglieder sind

$$2, \frac{9}{4}, \frac{161}{72}, \frac{51841}{23184}, \dots$$

Der letzte Wert stimmt schon in acht Nachkommastellen mit dem wahren Wert überein.



Heron von Alexandria (1. Jahrhundert n.C.)

Allgemein ergibt sich das folgende Heron-Verfahren.

Verfahren 43.6. Es sei $c \in K_+$ ein positives Element in einem archimedisch angeordneten Körper. Die *Heron-Folge* zu einem beliebigen positiven Startwert x_0 ist rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{c}{x_n}}{2}.$$

definiert.

Man berechnet also sukzessive das arithmetische Mittel aus x_n und $\frac{c}{x_n}$. Das Produkt dieser beiden Zahlen ist c , somit ist die eine Zahl größer und die andere Zahl kleiner als $\sqrt{c}$. Die Idee des Verfahrens liegt darin, in der Mitte dieser beiden Zahlen eine bessere Approximation zu finden. Die Folgenglieder der Heron-Folge sind offenbar stets positiv. Typischerweise startet man mit einer natürlichen Zahl als Anfangswert die in der Größenordnung der Quadratwurzel von c liegt.

Die Idee, die dem Heron-Verfahren zugrunde liegt, kann man auch so verstehen: Man möchte ein Quadrat mit dem Flächeninhalt c , also mit der Seitenlänge $\sqrt{c}$ konstruieren. Man gibt sich eine approximierende Seitenlänge x vor und betrachtet das Rechteck, dessen eine Seitenlänge x und dessen Flächeninhalt c ist. Dann muss die zweite Seitenlänge gleich $\frac{c}{x}$ sein. Wenn x zu groß ist, muss $\frac{c}{x}$ zu klein sein. Für das nächste approximierende Rechteck nimmt man als eine Seitenlänge das arithmetische Mittel aus den beiden Seitenlängen des vorhergehenden Rechtecks.

Satz 43.7. *Es sei K ein angeordneter Körper und $c \in K_+$. Es sei x_0 ein positiver Startwert und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die zugehörige Heron-Folge. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) Für $n \geq 1$ ist

$$x_n^2 \geq c$$

und

$$\left(\frac{c}{x_n}\right)^2 \leq c.$$

- (2) Die Heron-Folge ist ab dem ersten Glied fallend.
 (3) Es ist

$$\left[\frac{c}{x_{n+1}}, x_{n+1}\right] \subseteq \left[\frac{c}{x_n}, x_n\right]$$

für $n \geq 1$.

- (4) Für die Intervalllängen

$$\ell_n := x_n - \frac{c}{x_n}$$

gilt die Beziehung

$$\ell_{n+1} = \frac{1}{4x_{n+1}} \ell_n^2$$

und bei $c \geq 1$ gilt insbesondere

$$\ell_{n+1} \leq \frac{1}{4} \ell_n^2.$$

Beweis. (1) Es gilt

$$\begin{aligned} x_n^2 - c &= \left(\frac{x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}}}{2} \right)^2 - c \\ &= \frac{x_{n-1}^2 + 2c + \frac{c^2}{x_{n-1}^2}}{4} - c \\ &= \frac{x_{n-1}^2 - 2c + \frac{c^2}{x_{n-1}^2}}{4} \\ &= \left(\frac{x_{n-1} - \frac{c}{x_{n-1}}}{2} \right)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Somit ist

$$x_n^2 \geq c.$$

Wegen $x_n \cdot \frac{c}{x_n} = c$ folgt nach Lemma 19.13 (8), dass $\left(\frac{c}{x_n}\right)^2 \leq c$ ist.
 (2) Aufgrund von (1) ist

$$\left(\frac{c}{x_n}\right)^2 \leq c \leq x_n^2$$

und aufgrund des strengen Wachstums des Quadrierens im positiven Teil ist

$$\frac{c}{x_n} \leq x_n.$$

Nach Aufgabe 24.29 liegt das arithmetische Mittel stets zwischen den beiden Zahlen, also ist

$$\frac{c}{x_n} \leq x_{n+1} \leq x_n.$$

- (3) Dies folgt aus (1) und (2).
 (4) Nach der Rechnung in Teil (1) ist

$$x_{n+1} - \frac{c}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1}^2 - c}{x_{n+1}} = \frac{1}{4x_{n+1}} \left(x_n - \frac{c}{x_n} \right)^2.$$

Bei $c \geq 1$ ist

$$\frac{1}{4x_{n+1}} \leq \frac{1}{4c} \leq \frac{1}{4}.$$

□

Das eben beschriebene Verfahren liefert also zu jeder natürlichen Zahl n eine Folge, die eine durch eine gewisse algebraische Eigenschaft charakterisierte Zahl beliebig gut approximiert. Bei vielen technischen Anwendungen genügt es, gewisse Zahlen nur hinreichend genau zu kennen, wobei allerdings die benötigte Güte der Approximation von der technischen Zielsetzung abhängt. Es gibt im Allgemeinen keine Güte, die für jede vorstellbare Anwendung ausreicht, so dass es wichtig ist zu wissen, wie man eine gute Approximation durch eine bessere Approximation ersetzen kann und wie viele Schritte man machen muss, um eine gewünschte Approximation zu erreichen. Dies führt zu den Begriffen Folge und Konvergenz.

43.3. Folgen.

Wir wiederholen die Begriffe Folge und Konvergenz in einem angeordneten Körper, die wir schon in der 28. Vorlesung im Kontext des Divisionsalgorithmus erwähnt haben.

Definition 43.8. Es sei M eine Menge. Eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow M, n \longmapsto x_n,$$

nennt man auch eine *Folge* in M . Eine Folge wird häufig in der Form

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

geschrieben.

Eine Folge wird zumeist als $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, oder einfach nur kurz als $(x_n)_n$ geschrieben. Manchmal sind Folgen nicht für alle natürlichen Zahlen definiert, sondern nur für alle natürlichen Zahlen $\geq N$. Alle Begriffe und Aussagen lassen sich dann sinngemäß auch auf diese Situation übertragen. Grundsätzlich gibt es Folgen in jeder Menge, für die meisten Eigenschaften, für die man sich im Kontext von Folgen interessiert, braucht man aber eine zusätzliche „topologische Struktur“, eine Struktur, mit der man „Nähe“ erfassen kann, wie sie in einem angeordneten Körper existiert. Dies gilt insbesondere für den folgenden zentralen Begriff.

Definition 43.9. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper und es sei $x \in K$. Man sagt, dass die Folge gegen x *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt. In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert.), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Man sollte sich dabei die vorgegebenen ϵ als kleine, aber positive Zahlen vorstellen, die jeweils eine gewünschte *Zielgenauigkeit* (oder einen erlaubten Fehler) ausdrücken. Die natürliche Zahl n_0 ist dann die *Aufwandszahl*, die beschreibt, wie weit man gehen muss, um die gewünschte Zielgenauigkeit zu erreichen, und zwar so zu erreichen, dass alle ab n_0 folgenden Glieder innerhalb dieser Zielgenauigkeit bleiben. Konvergenz bedeutet demnach, dass man jede gewünschte Genauigkeit bei hinreichend großem Aufwand auch erreichen kann. Je kleiner die Zielgenauigkeit, also je besser die Approximation sein soll, desto höher ist im Allgemeinen der Aufwand.

Statt mit beliebigen positiven Zahlen ϵ kann man bei einem archimedisch angeordneten Körper auch mit den *Stammbrüchen*, also den rationalen Zahlen $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}_+$, arbeiten, siehe Aufgabe 28.34. Zu einem $\epsilon > 0$ und $x \in K$ nennt man das Intervall $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ auch die ϵ -*Umgebung* von x .



43. ARBEITSBLATT

43.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 43.1. Bestimme

$$[-3, 2] \cap]-2, 3[.$$

43.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 43.2.*

Es sei $[a, b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K und es seien $x, y \in [a, b]$. Zeige

$$|y - x| \leq b - a.$$

Aufgabe 43.3.*

Schreibe die Menge

$$\begin{aligned}]-3, -2[\cup \{7\} \cup \left(\left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}\right] \setminus \left]-\frac{4}{3}, -1\right] \right) \cup \left[1, \frac{7}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{6}{5}\right[\cup (]-7, -6] \cap \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

als eine Vereinigung von möglichst wenigen disjunkten Intervallen.

Aufgabe 43.4. Zeige, dass der Durchschnitt von zwei abgeschlossenen Intervallen in einem angeordneten Körper K wieder ein abgeschlossenes Intervall ist.

Aufgabe 43.5. Zeige, dass der Durchschnitt von einem abgeschlossenen und einem offenen Intervall in einem angeordneten Körper offen, abgeschlossen und halboffen sein kann.

Aufgabe 43.6. Es seien I_1, I_2 Intervalle in einem angeordneten Körper K mit $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Zeige, dass die Vereinigung $I_1 \cup I_2$ wieder ein Intervall ist.

Aufgabe 43.7. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $I \subseteq K$ ein Intervall mit den Intervallgrenzen $a < b$. Zeige, dass es in I eine rationale Zahl gibt.

Aufgabe 43.8. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $I \subseteq K$ ein Intervall mit den Intervallgrenzen $a < b$. Zeige, dass es in I unendlich viele rationale Zahlen gibt.

Aufgabe 43.9.*

Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K . Beschreibe die Menge

$$M = \{x \in K \mid -x \in [a, b]\}$$

als ein Intervall.

Aufgabe 43.10.*

Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K mit $0 \notin I$. Beschreibe die Menge

$$M = \{x \in K \mid x^{-1} \in [a, b]\}$$

als ein Intervall.

Aufgabe 43.11.*

Es sei K ein angeordneter Körper und seien $a < b$ rationale Zahlen. Zeige, dass es eine bijektive streng wachsende Abbildung

$$[0, 1] \longrightarrow [a, b]$$

gibt, die rationale Zahlen in rationale Zahlen überführt.

Aufgabe 43.12. Es sei K ein angeordneter Körper und seien x, y verschiedene Punkte aus K . Zeige, dass es Intervalle I_1 und I_2 mit positiver Länge, mit $x \in I_1$, $y \in I_2$ und mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ gibt.

Aufgabe 43.13. Bestimme die Intervalle in einem angeordneten Körper K , die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen sind.

a)

$$|4x - 3| < |2x - 3|.$$

b)

$$\left| \frac{x - 2}{3x - 1} \right| \leq 1.$$

Aufgabe 43.14.*

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $x_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen x_1, x_2, x_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Aufgabe 43.15. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 7 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 43.16. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von $\frac{1}{2}$ zum Startwert $x_0 = 1$.

Aufgabe 43.17.*

- (1) Bestimme die Glieder x_1, x_2 der Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{3}$ mit dem Startglied

$$x_0 = 1.$$

- (2) Finde ganze Zahlen

$$a, b \neq 0$$

mit

$$\left| a + b\sqrt{3} \right| \leq \frac{1}{10}.$$

Aufgabe 43.18. Es sei $c \in K_+$ ein Element in einem angeordneten Körper K und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{c}$ mit dem Startwert x_0 . Für ein Folgenglied gelte $x_n = \sqrt{c}$. Zeige, dass auch für alle weiteren Glieder die Folge konstant gleich $\sqrt{c}$ ist.

Aufgabe 43.19. Was passiert beim babylonischen Wurzelziehen, wenn man die Quadratwurzel einer negativen Zahl $c \in K_-$ (mit einem positiven Startwert x_0) berechnen möchte?

Aufgabe 43.20. Was passiert beim babylonischen Wurzelziehen, wenn man mit einem negativen Startwert x_0 die Quadratwurzel von $c \in K_+$ berechnen möchte?

Aufgabe 43.21. Es sei

$$f(x) = x^2 + 4x - 3.$$

Es ist $f(-5) = 2 > 0$ und $f(-4) = -3 < 0$. Führe, ausgehend vom Intervall $[-5, -4]$, Intervallhalbierungen derart durch, dass der Wert der Funktion f an der linken Grenze des Intervalls positiv und an der rechten Grenze negativ ist, bis ein Intervall der Länge $\frac{1}{16}$ erreicht ist.

Aufgabe 43.22.*

Es sei $c \in K_+$ ein Element in einem angeordneten Körper K und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{c}$ mit dem Startwert $x_0 \in K_+$. Sei $u \in K_+$, $d = c \cdot u^2$, $y_0 = ux_0$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{d}$ mit dem Startwert y_0 . Zeige

$$y_n = ux_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 43.23.*

Wir betrachten die Rekursionsvorschrift

$$x' = 2^{-1} \cdot \left(x + \frac{c}{x}\right)$$

des Heron-Verfahrens in $\mathbb{Z}/(5)$ für $c = 3$. Zeige, dass für sämtliche Startglieder $x_0 \neq 0$ stets eine nichtkonstante Folge entsteht.

Aufgabe 43.24.*

Wir betrachten die Rekursionsvorschrift

$$x' = 2^{-1} \cdot \left(x + \frac{c}{x}\right)$$

des Heron-Verfahrens in $\mathbb{Z}/(7)$ für $c = 3$. Zeige, dass für sämtliche Startglieder die entstehende Folge ab einer bestimmten Stelle nicht mehr definiert ist.

43.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 43.25. (2 Punkte)

Zeige, dass der Durchschnitt von zwei offenen Intervallen in einem angeordneten Körper K wieder ein offenes Intervall ist.

Aufgabe 43.26. (3 Punkte)

Bestimme die Intervalle in einem angeordneten Körper K , die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung bilden.

$$|5x - 8| < |11x - 6|.$$

Aufgabe 43.27. (3 Punkte)

Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 3 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 43.28. (3 Punkte)

Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von $\frac{1}{3}$ zum Startwert $x_0 = 1$.

Aufgabe 43.29. (4 Punkte)

Es sei

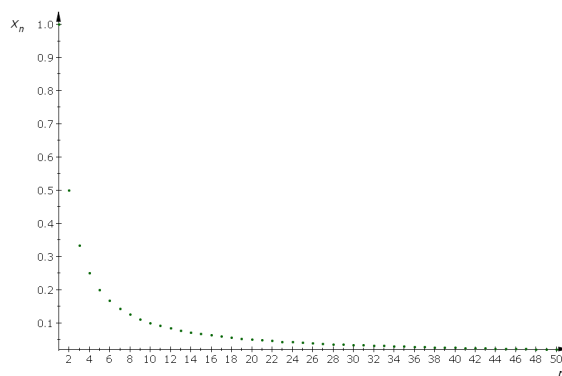
$$f(x) = x^2 + 4x - 3.$$

Es ist $f(0) = -3 < 0$ und $f(1) = 2 > 0$. Führe, ausgehend vom Intervall $[0, 1]$, Intervallhalbierungen derart durch, dass der Wert der Funktion f an der linken Grenze des Intervalls negativ und an der rechten Grenze positiv ist, bis ein Intervall der Länge $\frac{1}{16}$ erreicht ist.

44. VORLESUNG - KONVERGENTE FOLGEN

44.1. Beispiele für Folgen.

Definition 44.1. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.



Beispiel 44.2. Eine *konstante Folge* $x_n = c$ ist stets konvergent mit dem Grenzwert c . Dies folgt direkt daraus, dass man für jedes $\epsilon > 0$ als Aufwandszahl $n_0 = 0$ nehmen kann. Es ist ja

$$|x_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \epsilon$$

für alle n .

Es sei nun K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann ist die Folge

$$x_n = \frac{1}{n}$$

konvergent mit dem Grenzwert 0. Sei dazu ein beliebiges $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, vorgegeben. Aufgrund des Archimedes Axioms gibt es ein n_0 mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Daraus folgt $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$. Insgesamt gilt damit für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$x_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon.$$

Beispiel 44.3. Wir betrachten die Folge mit den Folgengliedern

$$x_n = \frac{7n}{2^n}$$

in $\mathbb{Q}$. Die Anfangsglieder sind

$$0, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{21}{8}, \frac{7}{4}, \frac{35}{32}, \frac{21}{32}, \frac{49}{128} \dots$$

In der Tat ist dies eine Nullfolge. Zu einem vorgegebenen $\epsilon > 0$ gibt es nämlich nach Satz 27.2 ein m derart, dass

$$2^n \geq n^2$$

für $n \geq m$ gilt. Für diese n ist somit

$$\frac{7n}{2^n} \leq \frac{7n}{n^2} = \frac{7}{n}.$$

Wenn zusätzlich noch $n \geq \frac{7}{\epsilon}$, so ist dies kleinergleich ϵ .

Bemerkung 44.4. Eine Dezimalbruchfolge in einem angeordneten Körper ist eine Folge der Form

$$x_n = \frac{a_n}{10^n} = \sum_{i=0}^n z_{-i} 10^{-i} = z_0, z_{-1} z_{-2} z_{-3} \dots z_{-n}$$

mit $a_n \in \mathbb{Z}$ (bzw. mit Ziffern $z_{-i} \in \{0, 1, \dots, 9\}$) und mit

$$\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Eine solche Folge, also eine „Kommazahl“, muss im Allgemeinen nicht konvergieren. Wenn wir mit zwei positiven rationalen Zahlen a, b starten und den Divisionsalgorithmus $a : b$ durchführen, um die Ziffern z_{-i} zu erhalten, so konvergiert nach Korollar 28.10 die zugehörige Dezimalbruchfolge

$$x_n = \sum_{i=0}^n z_{-i} 10^{-i}$$

gegen die rationale Zahl $\frac{a}{b}$.

Lemma 44.5. *Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K . Dann besitzt x_n maximal einen Grenzwert.*

Beweis. Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte x, y , $x \neq y$, gibt. Dann ist $d := |x - y| > 0$. Wir betrachten $\epsilon := d/3 > 0$. Wegen der Konvergenz gegen x gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

und wegen der Konvergenz gegen y gibt es ein n'_0 mit

$$|x_n - y| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n'_0.$$

Beide Bedingungen gelten dann gleichermaßen für $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$. Sei n mindestens so groß wie dieses Maximum. Dann ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d = |x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq \epsilon + \epsilon = 2d/3.$$

□

Definition 44.6. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K . Die Folge x_n heißt *beschränkt*, wenn es ein Element $B \in K$ mit

$$|x_n| \leq B \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gibt.

44.2. Rechenregeln für Folgen.

Lemma 44.7. *Es sei K ein angeordneter Körper. Wenn eine Folge in K konvergent ist, so ist sie auch beschränkt.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit dem Limes $x \in K$ und es sei $\epsilon > 0$. Aufgrund der Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Dann ist insbesondere

$$|x_n| \leq |x| + |x - x_n| \leq |x| + \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Unterhalb von n_0 gibt es nur endlich viele Zahlen, so dass das Maximum

$$B := \max_{n < n_0} \{|x_n|, |x| + \epsilon\}$$

wohldefiniert ist. Daher ist B eine obere Schranke und $-B$ eine untere Schranke für $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Beispiel 44.8. Es sei K ein angeordneter Körper. Dann ist die *alternierende Folge*

$$x_n = (-1)^n$$

beschränkt, aber nicht konvergent. Die Beschränktheit ist klar, da ja nur die beiden Werte 1 und -1 vorkommen. Konvergenz liegt aber nicht vor. Nehmen wir an, dass $x \geq 0$ der Grenzwert sei. Dann gilt für positives $\epsilon < 1$ und jedes ungerade n die Beziehung

$$|x_n - x| = 1 + x \geq 1 > \epsilon,$$

so dass es Folgenwerte außerhalb dieser ϵ -Umgebung gibt. Analog kann man einen negativ angenommen Grenzwert zum Widerspruch führen.

Lemma 44.9. *Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in K . Dann ist auch das Produkt der beiden Folgen eine Nullfolge.*

Beweis. Sei $B > 0$ eine Schranke für $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es zu $\frac{\epsilon}{B}$ ein n_0 derart, dass für $n \geq n_0$ die Abschätzung $|x_n| \leq \frac{\epsilon}{B}$ gilt. Für diese Indizes ist dann auch

$$|x_n y_n| \leq |x_n| \cdot |y_n| \leq \frac{\epsilon}{B} \cdot B = \epsilon.$$

$\square$

Wie bei einer Dezimalbruchfolge, die man ja (mit den Ziffern z_{-i}) als

$$x_n = \sum_{i=0}^n z_{-i} 10^{-i}$$

schreiben kann, wird eine Folge oft als eine Summe in der Form

$$x_n = \sum_{i=0}^n u_i$$

gegeben. Die Folgenglieder sind also die Teilsummen, die sich aus den einzelnen Summanden ergeben. Solche Folgen nennt man auch *Reihen* und die u_i nennt man die Reihenglieder. Wir betonen, dass sich alle Folgeeigenschaften auf die Folgenglieder beziehen. Man schreibt für solche Reihen auch kurz $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.



Nikolaus von Oresme (1330-1382) bewies, dass die harmonische Reihe divergiert.

Die sogenannte *harmonische Reihe* ist nicht beschränkt und konvergiert nicht.

Beispiel 44.10. Die *harmonische Reihe* ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Es geht also um die „unendliche Summe“ der Stammbrüche

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

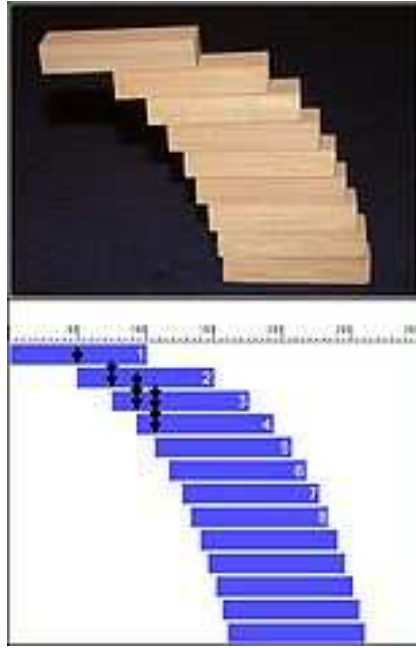
Diese Reihe divergiert: Für die 2^n Zahlen $k = 2^n + 1, \dots, 2^{n+1}$ ist

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \right) \geq 1 + (n+1) \frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und kann nach Lemma 44.7 nicht konvergent sein.



Aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgt, dass man einen beliebig weiten Überhang mit gleichförmigen Bauklötzen bauen kann.

Lemma 44.11. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die Folge $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

- (2) *Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

- (3) *Für $c \in K$ gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = c \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right).$$

- (4) Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}.$$

- (5) Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{x}.$$

Beweis. (2). Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach Lemma 44.7 insbesondere beschränkt und daher existiert ein $D > 0$ mit $|x_n| \leq D$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Wir setzen $C = \max\{D, |y|\}$. Aufgrund der Konvergenz gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_1 \text{ und } |y_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_2.$$

Diese Abschätzungen gelten dann auch für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$. Für diese Zahlen gilt daher

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x| \\ &\leq C \frac{\epsilon}{2C} + C \frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

(4). Da der Limes der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht 0 ist, gilt für $n \geq N_1$ die Bedingung $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$ und damit $\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es ein N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon |x|^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_2.$$

Dann gilt für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x_n - x}{x x_n} \right| = \frac{1}{|x| |x_n|} |x_n - x| \leq \frac{2}{|x|^2} \cdot \frac{\epsilon |x|^2}{2} = \epsilon.$$

□

Die im vorstehenden Satz auftretenden Folgen nennt man die Summenfolge, die Produktfolge bzw. die Quotientenfolge. Sie sind jeweils gliedweise definiert.

Beispiel 44.12. Sei $r \leq s$. Bei einer Folge der Form

$$x_n = \frac{a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_s n^s + b_{s-1} n^{s-1} + \cdots + b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$$

mit a_i, b_j in einem archimedisch angeordneten Körper und $a_r, b_s \neq 0$ kann man durch einen einfachen Standardtrick den Grenzwert bestimmen. Man multipliziert Zähler und Nenner mit n^{-s} und erhält somit die auf den ersten Blick kompliziertere Darstellung

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\frac{a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{n^s}}{\frac{b_s n^s + b_{s-1} n^{s-1} + \dots + b_2 n^2 + b_1 n + b_0}{n^s}} \\ &= \frac{\frac{a_r n^r}{n^s} + \frac{a_{r-1} n^{r-1}}{n^s} + \dots + \frac{a_2 n^2}{n^s} + \frac{a_1 n}{n^s} + \frac{a_0}{n^s}}{\frac{b_s n^s}{n^s} + \frac{b_{s-1} n^{s-1}}{n^s} + \dots + \frac{b_2 n^2}{n^s} + \frac{b_1 n}{n^s} + \frac{b_0}{n^s}} \\ &= \frac{\frac{a_r}{n^{s-r}} + \frac{a_{r-1}}{n^{s-r-1}} + \dots + \frac{a_2}{n^{s-2}} + \frac{a_1}{n^{s-1}} + \frac{a_0}{n^s}}{b_s + \frac{b_{s-1}}{n} + \dots + \frac{b_2}{n^{s-2}} + \frac{b_1}{n^{s-1}} + \frac{b_0}{n^s}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 44.11 (1) konvergiert der Nenner gegen b_s , da die Summanden bis auf den ersten Summanden Nullfolgen sind. Der Zähler konvergiert bei $s > r$ gegen 0 und bei $s = r$ gegen a_r . Im ersten Fall liegt insgesamt eine Nullfolge vor, im zweiten Fall konvergiert die Folge gegen $\frac{a_r}{b_r}$.

Beispiel 44.13. Zu jedem Element $x \in K$ in einem archimedisch angeordneten Körper K gibt es nach Korollar 28.10 eine eindeutig bestimmte Dezimalbruchfolge, die gegen x konvergiert. Zu zwei Elementen x und y muss dabei die Dezimalbruchfolge der Summe $x + y$ nicht die (gliedweise genommene) Summe der einzelnen Dezimalbruchfolgen sein. Beispielsweise ist die Dezimalbruchfolge zur rationalen Zahl $\frac{7}{9}$ gleich

$$\frac{7}{10}, \frac{77}{100}, \frac{777}{1000}, \frac{7777}{10000}, \frac{77777}{100000}, \dots$$

und die Dezimalbruchfolge zur rationalen Zahl $\frac{8}{9}$ gleich

$$\frac{8}{10}, \frac{88}{100}, \frac{888}{1000}, \frac{8888}{10000}, \frac{88888}{100000}, \dots$$

Die Summe dieser beiden Folgen ist

$$\frac{15}{10}, \frac{165}{100}, \frac{1665}{1000}, \frac{16665}{10000}, \frac{166665}{100000}, \dots$$

Dagegen besitzt

$$\frac{7}{9} + \frac{8}{9} = \frac{15}{9}$$

die Dezimalbruchfolge

$$\frac{16}{10}, \frac{166}{100}, \frac{1666}{1000}, \frac{16666}{10000}, \frac{166666}{100000}, \dots$$

Die oben angegebene Summenfolge konvergiert zwar gegen $\frac{15}{9}$, sie ist aber keine Dezimalbruchfolge.

Lemma 44.14. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 44.17. □

Die folgende Aussage heißt *Quetschkriterium*.

Lemma 44.15. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei Folgen in K . Es gelte*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a . Dann konvergiert auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a .

Beweis. Siehe Aufgabe 44.19. □

44. ARBEITSBLATT

44.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 44.1. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper K , die beide gegen $c \in K$ konvergieren mögen. Zeige, dass die Differenzfolge $x_n - y_n$ eine Nullfolge ist.

44.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 44.2. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{5}$ zum Startwert $x_0 = 2$. Konvergiert diese Folge in $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 44.3. Es sei $c \in \mathbb{Q}_+$, $x_0 \in \mathbb{Q}_+$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die zugehörige Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{c}$. Wann konvergiert diese Folge in $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 44.4. Bestimme für die Folge

$$x_n := \frac{2}{3n+5}$$

und

$$\epsilon = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots,$$

ab welchem (minimalen) n die Abschätzung

$$x_n \leq \epsilon$$

gilt.

Aufgabe 44.5. Bestimme für die Folge

$$x_n := \frac{4n-3}{5n-2}$$

und

$$\epsilon = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots,$$

ab welchem (minimalen) n die Abschätzung

$$\left| x_n - \frac{4}{5} \right| \leq \epsilon$$

gilt.

Aufgabe 44.6. Sei $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Folge $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 44.7. Zeige, dass bei einer Folge in einem angeordneten Körper K die Änderung von endlich vielen Folgengliedern weder die Konvergenz noch den Grenzwert ändert.

Aufgabe 44.8. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei die rationale Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgendermaßen definiert: Es sei

$$x_n = \frac{a_n}{10^n}$$

die größte Zahl mit $a_n \in \mathbb{N}$ und mit $x_n^2 \leq 5$. Zeige, dass die Folge eine Dezimalbruchfolge ist.

Aufgabe 44.9.*

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K sei durch einen Anfangswert $x_0 \in K$ und durch die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = -x_n$$

gegeben. Bestimme die Anfangswerte, für die diese Folge konvergiert.

Aufgabe 44.10.*

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K sei durch einen Anfangswert $x_0 \in K_+$ und durch die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = (x_n)^{-1}$$

gegeben. Bestimme die Anfangswerte, für die diese Folge konvergiert.

Aufgabe 44.11. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper K . Zeige, dass die Folge genau dann gegen $x \in K$ konvergiert, wenn die durch

$$y_n := x_n - x$$

gegebene Folge eine Nullfolge ist.

In den folgenden Aufgaben werden die Aussagen (1), (3) und (5) von Lemma 44.11 bewiesen.

Aufgabe 44.12.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K . Zeige, dass die Summenfolge $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$$

ist.

Aufgabe 44.13. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K . Sei $c \in K$. Zeige, dass die Folge $(c \cdot x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)$$

ist.

Aufgabe 44.14. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K . Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\left(\frac{y_n}{x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent ist mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{x}.$$

Aufgabe 44.15.*

Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 44.16. Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{6n^3 + 3n^2 - 4n + 5}{7n^3 - 6n^2 - 2}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 44.17.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ gilt.

Aufgabe 44.18. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall in K . Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K mit $x_n \in I$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge konvergiere gegen $x \in K$. Zeige $x \in I$.

Aufgabe 44.19.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei Folgen in K . Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a . Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Aufgabe 44.20. Zeige, dass die Folge

$$x_n = n$$

in keinem angeordneten Körper konvergiert. Kann sie beschränkt sein?

Aufgabe 44.21. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 44.22. Bestimme mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung den Grenzwert der Folge

$$x_n := \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 13.29 hilfreich.

Aufgabe 44.23. Es sei K ein angeordneter Körper, in dem die Wurzeln $\sqrt[n]{n}$ zu $n \in \mathbb{N}_+$ existieren. Zeige, dass die Folge $x_n = \sqrt[n]{n}$ ab $n \geq 3$ streng fallend ist.

Aufgabe 44.24.*

Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei a_n die Summe der ungeraden Zahlen bis n und b_n die Summe der geraden Zahlen bis n . Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{a_n}{b_n}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 44.25. Man gebe Beispiele für positive monoton wachsende unbeschränkte Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K derart, dass die Folge

$$\left(\frac{y_n}{x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

- (1) gegen 0 konvergiert,
- (2) gegen 1 konvergiert,
- (3) divergiert.

Aufgabe 44.26.*

Es sei

$$x_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

- (1) Finde das kleinste n mit

$$x_n \geq 2.$$

- (2) Finde das kleinste n mit

$$x_n \geq 2,5.$$

Aufgabe 44.27. Es sei K ein angeordneter Körper und seien $a, b \in K_+$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{ak + b}$$

divergiert.

Aufgabe 44.28. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergiert.

Aufgabe 44.29. Zeige analog zu Beispiel 44.13, dass das (gliedweise) Produkt der kanonischen Dezimalbruchfolgen von zwei rationalen Zahlen nicht die Dezimalbruchfolge des Produktes sein muss.

Aufgabe 44.30. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass K genau dann archimedisch angeordnet ist, wenn die Folge der Stammbrüche $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$, gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 44.31. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper K mit $x_n, y_n \in K_+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Quadratfolgen x_n^2 und y_n^2 seien konvergent und es sei $x_n^2 - y_n^2$ eine Nullfolge. Zeige, dass $x_n - y_n$ ebenfalls eine Nullfolge ist.

Aufgabe 44.32.*

Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper K mit $x_n, y_n \in K_+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $x_n^2 - y_n^2$ eine Nullfolge. Zeige, dass $x_n - y_n$ ebenfalls eine Nullfolge ist.

Aufgabe 44.33. Es sei K ein angeordneter Körper und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K . Zeige, dass die Folge eine wachsende oder eine fallende Teilfolge enthält.

44.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 44.34. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{7n^3 - 3n^2 + 2n - 11}{13n^3 - 5n + 4}$$

definierten Folge.

Aufgabe 44.35. (3 Punkte)

Man gebe Beispiele für konvergente Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

$$\left(\frac{y_n}{x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

- (1) gegen 0 konvergiert,
- (2) gegen 1 konvergiert,
- (3) divergiert.

Aufgabe 44.36. (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x . Zeige, dass dann auch die durch

$$y_n := \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1}$$

definierte Folge gegen x konvergiert.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 44.31 hilfreich.

Aufgabe 44.37. (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $c \in K_+$. Es seien $x_0, y_0 \in K_+$ Startwerte und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die zugehörigen Heron-Folgen zur Berechnung von $\sqrt{c}$. Zeige, dass $x_n - y_n$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 44.38. (4 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die Folge

$$\left(\frac{n^3}{2^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 44.39. (3 Punkte)

Zeige, dass die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+2}$$

divergieren.

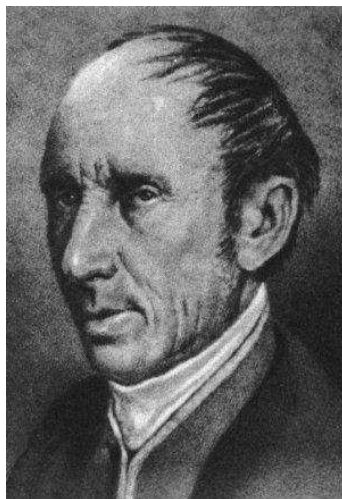
45. VORLESUNG - CAUCHY-FOLGEN

45.1. Cauchy-Folgen.

Ein Problem des Konvergenzbegriffes ist, dass zur Formulierung der Grenzwert verwendet wird, den man unter Umständen noch gar nicht kennt. Wenn man beispielsweise die durch das babylonische Wurzelziehen konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sagen wir zur Berechnung von $\sqrt{5}$) mit einem rationalen Startwert betrachtet, so ist dies eine Folge aus rationalen Zahlen. Wenn wir diese Folge in $\mathbb{R}$ betrachten, wo $\sqrt{5}$ existiert, so ist die Folge konvergent. Innerhalb der rationalen Zahlen ist sie aber definitiv nicht konvergent. Es ist wünschenswert, allein innerhalb der rationalen Zahlen den Sachverhalt formulieren zu können, dass die Folgenglieder beliebig nahe zusammenrücken, auch wenn

man nicht sagen kann, dass die Folgenglieder einem Grenzwert beliebig nahe zustreben. Dazu dient der Begriff der Cauchy-Folge.

Wir werden in der nächsten Vorlesung die reellen Zahlen mit Hilfe der rationalen Cauchy-Folgen konstruieren.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Definition 45.1. Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

Es werden also die Abstände von Folgenglieder untereinander verglichen, diese Schwankungen müssen beliebig klein werden. Grob gesprochen kann man sagen, dass eine Cauchy-Folge alle Eigenschaften einer konvergenten Folge besitzt bis auf die Konvergenz, bis auf die Existenz eines Grenzwertes. Eine nichtkonvergente Cauchy-Folge entdeckt eine „Lücke“. Beim Übergang von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ schließt man diese Lücken, indem man (Äquivalenzklassen von) Cauchy-Folgen hinzunimmt.

Satz 45.2. *Es sei K ein angeordneter Körper. Dann ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit Grenzwert x . Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wenden die Konvergenzeigenschaft auf $\epsilon/2$ an. Daher gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Für beliebige $n, m \geq n_0$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Also liegt eine Cauchy-Folge vor. $\square$

Lemma 45.3. *Es sei K ein angeordneter Körper. Dann ist eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchy-Folge, wenn folgende Bedingung gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m \geq n_0$ die Abschätzung*

$$|x_m - x_{n_0}| \leq \epsilon$$

gilt.

Beweis. Eine Cauchy-Folge erfüllt auch die angegebene Bedingung, da man ja $n_0 = n$ setzen kann. Für die Umkehrung sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die Bedingung der Aussage gilt insbesondere für $\epsilon/2$, d.h. es gibt ein n_0 derart, dass für jedes $m \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_m - x_{n_0}| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

gilt. Damit gilt aufgrund der Dreiecksungleichung für beliebige $m, n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{n_0}| + |x_{n_0} - x_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

so dass eine Cauchy-Folge vorliegt. $\square$

Lemma 45.4. *Eine Dezimalbruchfolge*

$$x_n = \frac{a_n}{10^n}$$

in einem archimedisch angeordneten Körper K ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Wegen der definierenden Eigenschaft für eine Dezimalbruchfolge

$$\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{a_n + 1}{10^n}$$

ist

$$x_{n+1} < x_n + \frac{1}{10^n}$$

bzw.

$$x_{n+1} - x_n < \frac{1}{10^n}.$$

Somit gilt für $m > n$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} x_m - x_n &= (x_{m+1} - x_m) + (x_m - x_{m-1}) + \\ &\quad \cdots + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n) \\ &\leq \frac{1}{10^m} + \frac{1}{10^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^n} \\ &= \left(\frac{1}{10^{m-n}} + \frac{1}{10^{m-n-1}} + \cdots + \frac{1}{10} + 1 \right) \frac{1}{10^n} \leq 2 \cdot \frac{1}{10^n}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die endliche geometrische Reihe benutzt haben. Dieser Ausdruck wird in einem archimedisch angeordneten Körper beliebig klein. $\square$

Dies bedeutet insbesondere, dass jede „Kommazahl“, also jede „unendliche Ziffernfolge“, eine Cauchy-Folge ist.

Lemma 45.5. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $c \in K_+$. Es sei x_0 ein positiver Startwert und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die zugehörige Heron-Folge. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die Heron-Folge ist eine Cauchy-Folge.*
- (2) *Wenn es in K ein positives Element x mit $x^2 = c$ gibt, so konvergiert die Folge gegen dieses Element.*
- (3) *Wenn die Folge in K gegen ein Element x konvergiert, so ist $x^2 = c$.*

Beweis. (1) Zu $m \geq n$ ist nach Satz 43.7 (3) $x_m \in [\frac{c}{x_n}, x_n]$ und somit ist

$$|x_n - x_m| \leq \left| x_n - \frac{c}{x_n} \right|.$$

Diese Intervalllängen bilden nach Satz 43.7 (4) eine Nullfolge.

- (2) Nach Satz 43.7 (1) ist

$$\frac{c}{x_n} \leq \sqrt{c} \leq x_n.$$

Somit ist

$$|x_n - \sqrt{c}| \leq \left| x_n - \frac{c}{x_n} \right|$$

und rechts steht wieder die Nullfolge.

- (3) Nach Satz 43.7 kann der Grenzwert nicht 0 sein. Nach Lemma 44.11 (5) konvergiert daher $\frac{c}{x_n}$ gegen $\frac{c}{x}$ und somit konvergiert nach Lemma 44.11 (1)

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{c}{x_n}}{2}$$

(Betrachten der beiden Seiten) gegen

$$x = \frac{x + \frac{c}{x}}{2}.$$

Daraus ergibt sich $x^2 = c$.

$\square$

Definition 45.6. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K . Zu jeder streng wachsenden Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, i \mapsto n_i$, heißt die Folge

$$i \mapsto x_{n_i}$$

eine *Teilfolge* der Folge.

Bei einer Teilfolge wählt man einfach gewisse Folgenglieder aus und überspringt andere.

Eine Dezimalbruchfolge ist nach Lemma 45.4 eine Cauchy-Folge. Sie ist auch eine wachsende Folge, die nach oben beschränkt ist. Solche Folgen sind stets Cauchy-Folgen. Insbesondere ergibt sich Lemma 45.4 erneut aus dem folgenden Lemma.

Lemma 45.7. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende, nach oben beschränkte Folge. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei $b \in K$ eine obere Schranke, also $x_n \leq b$ für alle Folgenglieder x_n . Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist, und verwenden die Charakterisierung aus Lemma 45.3. Somit gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für jedes n_0 ein $m > n_0$ mit $x_m - x_{n_0} \geq \epsilon$ gibt (wir können die Betragstriche wegen der Monotonie weglassen). Wir können daher induktiv eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen definieren durch $n_0 = 0$,

$$n_1 > n_0 \text{ so, dass } x_{n_1} - x_{n_0} \geq \epsilon,$$

$$n_2 > n_1 \text{ so, dass } x_{n_2} - x_{n_1} \geq \epsilon,$$

etc. Andererseits gibt es aufgrund des Archimedesaxioms ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k\epsilon > b - x_0$. Die Summe der ersten k Differenzen der Teilfolge x_{n_j} , $j \in \mathbb{N}$, ergibt

$$\begin{aligned} x_{n_k} - x_0 &= (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + (x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}}) + \\ &\quad \cdots + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_1} - x_{n_0}) \\ &\geq k\epsilon \\ &> b - x_0. \end{aligned}$$

Dies impliziert $x_{n_k} > b$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass b eine obere Schranke der Folge ist. $\square$

Lemma 45.8. *Eine Cauchy-Folge in einem angeordneten Körper K ist beschränkt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 45.8. $\square$

Lemma 45.9. *Es sei K ein angeordneter Körper. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in K . Dann sind auch die Summe und das Produkt der beiden Folgen wieder eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Zum Beweis der Summeneigenschaft sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der Cauchy-Eigenschaft gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit

$$|x_m - x_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ für } m, n \geq N_1 \text{ und } |y_m - y_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ für } m, n \geq N_2.$$

Diese Abschätzungen gelten dann auch für

$$m, n \geq N := \max\{N_1, N_2\}.$$

Für diese Indizes gilt somit

$$\begin{aligned} |x_m + y_m - (x_n + y_n)| &= |x_m - x_n + y_m - y_n| \\ &\leq |x_m - x_n| + |y_m - y_n| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Zum Beweis der Produkteigenschaft sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die beiden Cauchy-Folgen sind nach Lemma 45.8 insbesondere beschränkt und daher existiert ein $D > 0$ mit

$$|x_n|, |y_n| \leq D$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Cauchy-Eigenschaft gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit

$$|x_m - x_n| \leq \frac{\epsilon}{2D} \text{ für } m, n \geq N_1 \text{ und } |y_m - y_n| \leq \frac{\epsilon}{2D} \text{ für } m, n \geq N_2.$$

Diese Abschätzungen gelten dann auch für $m, n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$. Für diese Indizes gilt daher

$$\begin{aligned} |x_m y_m - x_n y_n| &= |x_m y_m - x_m y_n + x_m y_n - x_n y_n| \\ &\leq |x_m y_m - x_m y_n| + |x_m y_n - x_n y_n| \\ &= |x_m| |y_m - y_n| + |y_n| |x_m - x_n| \\ &\leq D \frac{\epsilon}{2D} + D \frac{\epsilon}{2D} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Wenn eine Folge in K konvergiert, so ist der Grenzwert 0 oder positiv oder negativ. Wenn der Grenzwert positiv ist, so können zwar am Anfang der Folge auch negative Folgenglieder auftreten, ab einem bestimmten n_0 müssen aber alle Folgenglieder positiv sein, und zwar mindestens so groß wie die Hälfte des Grenzwertes. Eine entsprechende Einteilung gilt für Cauchy-Folgen, wie das folgende Lemma zeigt, das grundlegend für die (später einzuführende) Ordnung auf den reellen Zahlen ist.

Lemma 45.10. *Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K . Dann gibt es die drei folgenden Alternativen.*

- (1) *Die Folge ist eine Nullfolge.*
- (2) *Es gibt eine positive Zahl δ derart, dass ab einem gewissen n_0 die Abschätzung*

$$x_n \geq \delta$$

für alle $n \geq n_0$ gilt.

- (3) *Es gibt eine positive Zahl δ derart, dass ab einem gewissen n_0 die Abschätzung*

$$x_n \leq -\delta$$

für alle $n \geq n_0$ gilt.

Beweis. Sei die Folge keine Nullfolge. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es unendlich viele Folgenglieder mit

$$|x_n| > \epsilon$$

gibt. Dann gibt es auch unendlich viele Folgenglieder mit

$$x_n > \epsilon$$

oder mit

$$x_n < -\epsilon.$$

Nehmen wir das erste an. Wegen der Cauchy-Eigenschaft für $\frac{\epsilon}{2}$ gibt es ein n_0 derart, dass

$$|x_m - x_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $m, n \geq n_0$ gilt. Wenn man die beiden Aussagen verbindet, so gilt für $m \geq n_0$ und einem x_n mit

$$x_n > \epsilon$$

unter Verwendung von Lemma 24.7 (8) die Abschätzung

$$x_m = x_n + x_m - x_n \geq x_n - |x_m - x_n| \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Dieses wählen wir als δ . □

Lemma 45.11. *Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem angeordneten Körper mit der Eigenschaft, dass es ein $a > 0$ und ein n_0 derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung*

$$x_n \geq a$$

gilt. Dann ist auch die durch (für n hinreichend groß)

$$y_n = (x_n)^{-1}$$

gegebene inverse Folge eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Cauchy-Eigenschaft von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es ein n_1 mit

$$|x_m - x_n| \leq \epsilon a^2$$

für alle $n \geq n_1$. Dann gilt für alle $n \geq N := \max\{n_0, n_1\}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |y_m - y_n| &= \left| \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n} \right| \\ &= \left| \frac{x_n - x_m}{x_m x_n} \right| \\ &= \frac{1}{|x_m| \cdot |x_n|} |x_m - x_n| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{a^2} \cdot \epsilon a^2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

45.2. Das Vollständigkeitsaxiom.

Definition 45.12. Ein angeordneter Körper K heißt *vollständig* oder *vollständig angeordnet*, wenn jede Cauchy-Folge in K konvergiert (also in K einen Grenzwert besitzt).

Axiom 45.13. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind ein vollständiger archimedisch angeordneter Körper.

Damit haben wir alle Axiome der reellen Zahlen zusammengetragen: die Körperaxiome, die Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Alle weiteren Eigenschaften werden wir daraus ableiten. Diese Eigenschaften legen die reellen Zahlen eindeutig fest, d.h. wenn es zwei Modelle $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ gibt, die beide für sich genommen diese Axiome erfüllen, so kann man eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_1$ nach $\mathbb{R}_2$ angeben, die alle mathematischen Strukturen erhält (sowas nennt man einen „Isomorphismus“, siehe Satz 47.1).

Die Existenz der reellen Zahlen ist nicht trivial. Vom naiven Standpunkt her kann man die Vorstellung einer „kontinuierlichen lückenfreien Zahlengerade“ zugrunde legen, und dies als Existenznachweis akzeptieren. In einer strengen mengentheoretischen Begründung der Existenz geht man von $\mathbb{Q}$ aus und konstruiert die reellen Zahlen als die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ mit einer geeigneten Identifizierung. Dies werden wir in der nächsten Vorlesung durchführen.

45. ARBEITSBLATT

45.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 45.1. Negiere die Aussage, dass eine Folge x_n in einem angeordneten Körper eine Cauchy-Folge ist, durch Umwandlung der Quantoren.

45.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 45.2. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

Aufgabe 45.3.*

Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K , die eine konvergente Teilfolge enthalte. Zeige, dass die Folge konvergiert.

Aufgabe 45.4. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem archimedisch angeordneten Körper K . Es gelte

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{1000}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Folgt daraus, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist?

Aufgabe 45.5.*

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem archimedisch angeordneten Körper K . Es gelte

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Folgt daraus, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist?

Aufgabe 45.6. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem archimedisch angeordneten Körper K und sei $a \in K$ ein Element mit $0 \leq a < 1$. Es gelte

$$|x_{n+1} - x_n| \leq a^n$$

für alle n . Zeige, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 45.7. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper K derart, dass

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen und es sei die Differenzfolge $z_n - x_n$ eine Nullfolge. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 45.8. Zeige, dass eine Teilfolge einer Cauchy-Folge wieder eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 45.9. Es seien $K \subseteq L$ angeordnete Körper und es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K , die in L gegen $x \in L$ konvergiert. Zeige, dass die Folge in K eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 45.10. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende, nach unten beschränkte Folge. Zeige, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 45.11.*

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K beschränkt ist.

Aufgabe 45.12. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem angeordneten Körper und es sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in K . Zeige, dass die Summenfolge

$$z_n = x_n + y_n$$

ebenfalls eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 45.13. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge in einem angeordneten Körper. Zeige, dass jede Teilfolge ebenfalls gegen x konvergiert.

Aufgabe 45.14. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für die Folge der Stammbrüche die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) Die Folge $\frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge.
- (2) Die Folge $\frac{1}{n}$ ist eine Cauchy-Folge.
- (3) Der Körper K ist archimedisch angeordnet.

Aufgabe 45.15. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \in K$ mit $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Abschätzung

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n \leq 2$$

gilt.

Aufgabe 45.16. Zwei Personen, A und B , sitzen in der Kneipe. A will nach Hause gehen, aber B will noch ein Bier trinken. „Na gut, dann trinken wir eben noch ein Bier, das ist aber das allerletzte“ sagt A . Danach möchte B immer noch Bier, aber da das vorhergehende Bier definitiv das letzte war, einigen sie sich auf ein allerletztes halbes Bier. Danach trinken sie noch ein allerletztes Viertelbier, danach noch ein allerletztes Achtelbier, u.s.w. Wie viel „allerletztes Bier“ trinken sie insgesamt?

Aufgabe 45.17.*

Zeige

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Aufgabe 45.18. Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ in einem archimedisch angeordneten Körper konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 45.19. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in einem angeordneten Körper K , wobei die Differenzfolge $y_n - x_n$ eine Nullfolge sei. Zeige, dass für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann eine der Alternativen aus Lemma 45.10 gilt, wenn sie für $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt.

Aufgabe 45.20. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in einem angeordneten Körper K , die im Sinne von Lemma 45.10 positiv seien. Zeige, dass dann auch die Summenfolge $x_n + y_n$ und die Produktfolge $x_n y_n$ positiv sind.

Aufgabe 45.21. Es sei K ein archimedisch angeordneter vollständiger Körper. Zeige, dass $x \in K$ genau dann nichtnegativ ist, wenn x eine Quadratwurzel besitzt.

Aufgabe 45.22. Zeige, dass $\mathbb{Z}$ vollständig ist, dass also jede Cauchy-Folge in $\mathbb{Z}$ konvergiert.

45.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 45.23. (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine Folge, die nicht konvergiert, aber eine konvergente Teilfolge enthält.

Aufgabe 45.24. (5 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem angeordneten Körper K . Zeige, dass es eine Teilfolge x_{n_i} , $i \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft gibt, dass zu jedem $k \in \mathbb{N}_+$ für alle $i, j \geq k$ die Abschätzung

$$|x_{n_i} - x_{n_j}| \leq \frac{1}{k}$$

gilt.

Aufgabe 45.25. (3 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem angeordneten Körper K , die sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Folgenglieder besitzt. Zeige, dass es sich um eine Nullfolge handelt.

Aufgabe 45.26. (4 Punkte)

Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ beschränkt ist.

46. VORLESUNG - KONSTRUKTION DER REELLEN ZAHLEN

Aus so krummem Holze, als
woraus der Mensch gemacht
ist, kann nichts ganz Gerades
gezimmert werden.

Immanuel Kant

46.1. Die Konstruktion der reellen Zahlen.

Wir besprechen nun eine Konstruktion der reellen Zahlen. Die Idee der Konstruktion ist von der Zielsetzung her bestimmt: In $\mathbb{R}$ soll jede Cauchy-Folge und insbesondere jede rationale Cauchy-Folge konvergieren. Von daher startet man mit der Menge aller rationalen Cauchy-Folgen und überlegt dann, welche von ihnen den gleichen Grenzwert haben müssen, falls er existiert. Beispielsweise ergibt das Heron-Verfahren zu unterschiedlichen Startwerten unterschiedliche Folgen, die aber die gleiche Wurzel, also die gleiche Lücke adressieren, und die somit identifiziert werden müssen.

Wir konstruieren, ausgehend von den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, einen vollständigen archimedisch angeordneten Körper, also ein Modell für den Körper der reellen Zahlen. Die Konstruktion ist mengentheoretisch und begrifflich ziemlich aufwändig. Sie setzt einen sicheren Umgang mit Äquivalenzrelationen, Restklassenbildung und Folgen voraus.

Es sei

$$C = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{Cauchy-Folge in } \mathbb{Q}\},$$

also die Menge aller Cauchy-Folgen mit rationalen Gliedern. Dies ist eine riesige und erst mal unübersichtliche Menge. Sie enthält die Menge $\mathbb{Q}$, indem wir jeder rationalen Zahl x die konstante Folge zuordnen, für die jedes Folgenglied gleich x ist. Eine konstante Folge ist trivialerweise eine Cauchy-Folge.

Lemma 46.1. *Die Menge C der rationalen Cauchy-Folgen bildet mit der gliedweisen Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring.*

Beweis. Das Nullelement ist die konstante Nullfolge und das Einselement ist die konstante Einsfolge. Die Ringeigenschaften begründet man zuerst innerhalb der Menge aller rationalen Folgen. Da Addition und Multiplikation gliedweise ausgeführt werden, folgt die Assoziativität, die Kommutativität und die Distributivität der Verknüpfungen und die Eigenschaften der neutralen Elemente direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von $\mathbb{Q}$. Das Negative zu einer Folge ist die gliedweise negierte Folge. Die Abgeschlossenheit der Menge der Cauchy-Folgen unter Addition und Multiplikation folgt direkt aus Lemma 45.9, ebenso, dass die negierte Folge wieder eine Cauchy-Folge ist. $\square$

Eine rationale Nullfolge konvergiert nach Definition in $\mathbb{Q}$ gegen 0, und das soll auch in $\mathbb{R}$ so sein. Insbesondere gibt es eine Vielzahl von Cauchy-Folgen, die gegen die gleiche Zahl konvergieren. Die Addition einer Nullfolge zu einer Folge ändert das Konvergenzverhalten und den Grenzwert, falls er existiert, nicht.

Das Produkt einer Nullfolge mit einer beliebigen Folge ist im Allgemeinen nicht wieder eine Nullfolge. Beispielsweise ist die Folge der Stammbrüche $x_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge (in jedem archimedisch angeordneten Körper), wenn man sie aber mit der Folge der natürlichen Zahlen, also $y_n = n$ multipliziert, so erhält man die konstante Einsfolge, die keine Nullfolge ist. Innerhalb des Ringes der Cauchy-Folgen kann man aber Nullfolgen mit beliebigen Cauchy-Folgen multiplizieren und erhält wieder eine Nullfolge.

Lemma 46.2. *Im Ring C der rationalen Cauchy-Folgen bildet die Menge der Nullfolgen ein Ideal.*

Beweis. Die Summe von zwei Nullfolgen ist nach Lemma 44.11 (1) wieder eine Nullfolge. Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C$ eine beliebige Folge aus C , also eine Cauchy-Folge. Nach Lemma 45.8 ist somit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und daher ist nach Lemma 44.9 das Produkt $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wieder eine Nullfolge. $\square$

Bemerkung 46.3. Im Cauchy-Folgenring C ist die durch das Nullfolgenideal gegebene Äquivalenzrelation einfach zu verstehen. Zwei Cauchy-Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind äquivalent, wenn ihre Differenzfolge, also die durch

$$z_n := x_n - y_n$$

gegebene Folge, eine Nullfolge ist. Insbesondere sind alle Nullfolgen zur konstanten Nullfolge äquivalent. Wenn man an die Vorstellung denkt, dass eine Cauchy-Folge eine Lücke innerhalb der rationalen Zahlen entdeckt oder lokalisiert, so bedeutet die Äquivalenz von zwei Cauchy-Folgen, dass sie die gleiche Lücke lokalisieren. Man kann also erkennen, ob zwei Cauchy-Folgen die gleiche Lücke adressieren, auch wenn man die Lücke gar nicht kennt.

Wir definieren nun die Quotientenmenge unter dieser Äquivalenzrelation, also den Restklassenring nach dem von den Nullfolgen erzeugten Ideal, als Menge der reellen Zahlen, also

$$\mathbb{R} := C / \sim = C / N.$$

Wir sprechen vom *Cauchy-Folgen-Modell* für die reellen Zahlen.

Definition 46.4. Der Restklassenring C/N des Ringes C der rationalen Cauchy-Folgen modulo des Ideals N der Nullfolgen heißt *Cauchy-Folgen-Modell* der reellen Zahlen.

Unter der Identifizierungsabbildung

$$C \longrightarrow C / \sim = C / N$$

werden also alle Nullfolgen zu 0 gemacht, und zwei rationale Folgen werden miteinander identifiziert, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Wir schreiben die zugehörigen Äquivalenzklassen als $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$. Man kann jede Folge durch eine nullfolgenäquivalente Folge ersetzen, ohne den Wert der Restklasse zu ändern. Insbesondere kann man eine Cauchy-Folge an endlich vielen Gliedern abändern, ohne die Äquivalenzklasse zu ändern. Man kann sogar jede Klasse durch eine Dezimalbruchfolge repräsentieren und dadurch eine „schnellere Konvergenz“ erreichen und für unterschiedliche Klassen sicherstellen, dass ihr Konvergenzverhalten simultan ist.

Lemma 46.5. *Das Cauchy-Folgen-Modell der reellen Zahlen ist ein kommutativer Ring.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 41.9. □

Auf der Quotientenmenge sind also die Verknüpfungen durch

$$[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] := [(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \text{ und } [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] := [(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$

gegeben. Deutlich aufwändiger ist es zu zeigen, dass unser konstruiertes Modell ein Körper ist. Die zusätzliche Eigenschaft ist, dass jedes von 0 verschiedene Element ein inverses Element besitzt. Die entscheidenden Vorbereitungen haben wir aber schon in Lemma 45.10 gemacht.

Lemma 46.6. *Das Cauchy-Folgen-Modell der reellen Zahlen ist ein Körper.*

Beweis. Dass ein kommutativer Ring vorliegt, wurde schon in Lemma 46.5 vermerkt. Wir müssen also noch zeigen, dass ein von 0 verschiedenes Element $x \in \mathbb{R}$ ein inverses Element besitzt. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C$ eine Cauchy-Folge, die dieses x repräsentiert. Diese Folge ist keine Nullfolge, da ja alle Nullfolgen unter der Restklassenabbildung auf das Nullelement abgebildet werden. Nach Lemma 45.10 gilt somit eine der dort angegebenen Alternativen, d.h. es gibt ein $\delta \in K_+$ und ein n_0 mit der Eigenschaft, dass für $n \geq n_0$ alle Folgenglieder entweder oberhalb von δ oder aber unterhalb von $-\delta$ liegen. Betrachten wir den ersten Fall, wobei wir durch Abändern der ersten n_0 Folgenglieder, was die Äquivalenzklasse nicht ändert, annehmen können, dass alle Folgenglieder oberhalb von δ liegen. Nach Lemma 45.11 ist dann die durch

$$y_n = (x_n)^{-1}$$

gegebene inverse Folge ebenfalls eine Cauchy-Folge. Wegen

$$y_n x_n = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch

$$[(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \cdot [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = [1] = 1,$$

und somit ist eine inverse Klasse gefunden. □

Ausgehend von der in Lemma 45.10 formulierten Alternative: die rationale Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, oder es gibt ein $\delta > 0$ mit $x_n \geq \delta$ für fast alle¹³ $n \in \mathbb{N}$, oder mit $x_n \leq -\delta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, kann man $\mathbb{R}$ in 0, in positive und in negative Zahlen einteilen und somit eine (totale) Ordnungsrelation darauf definieren.

Lemma 46.7. *Das Cauchy-Folgen-Modell der reellen Zahlen ist ein archimedisch angeordneter Körper.*

Beweis. Die in Lemma 45.10 beschriebenen Alternativen hängen nach Aufgabe 45.17 nur von der Äquivalenzklasse ab. Daher ergibt sich durch das Lemma eine Zerlegung (des Cauchy-Folgen-Modells) der reellen Zahlen in die 0, in positive und in negative Zahlen. Dabei sind die positiven Zahlen unter Addition und unter Multiplikation abgeschlossen, d.h. es liegt wegen Aufgabe 46.28 ein angeordneter Körper vor. Sei ein $x \in \mathbb{R}$ gegeben, das durch eine rationale Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ repräsentiert werde. Nach Lemma 45.8 ist die Folge beschränkt und es gibt insbesondere eine natürliche Zahl b mit

$$x_n \leq b$$

für alle n . Damit gilt auch für die Restklassen

$$x = [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \leq [b] = b,$$

was bedeutet, dass $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist. $\square$

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen wird in zwei Schritten bewiesen. Zuerst wird gezeigt, dass die rationalen Cauchy-Folgen, mit denen wir gestartet sind, aufgefasst in $\mathbb{R}$, gegen ihre Klasse konvergiert, und dann, dass überhaupt jede reelle Cauchy-Folge konvergiert.

Lemma 46.8. *Eine rationale Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert im Cauchy-Folgen-Modell gegen die Äquivalenzklasse $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$.*

Beweis. Da die x_n rationale Zahlen sind, können wir sie direkt (als konstante Folgen) als Elemente in $\mathbb{R}$ auffassen. Wir schreiben

$$x := [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}].$$

Die Differenz $x - x_m$ von x zum Folgenglied x_m (in $\mathbb{R}$) ist gleich der Klasse $[(x_n - x_m)_{n \in \mathbb{N}}]$. Sei $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}_+$, vorgegeben. Aufgrund der Cauchy-Eigenschaft gibt es ein n_0 derart, dass für alle

$$m, n \geq n_0$$

die Abschätzungen

$$-\frac{1}{k} \leq x_n - x_m \leq \frac{1}{k}$$

¹³Das bedeutet für alle bis auf endlich viele.

gelten. Für $m \geq n_0$ ist damit auch die Differenzklasse $[(x_n - x_m)_{n \in \mathbb{N}}]$ zwischen $-\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{k}$. Somit ist

$$-\frac{1}{k} \leq x - x_m \leq \frac{1}{k}$$

für $m \geq n_0$, was die Konvergenz bedeutet. $\square$

Die folgende Tabelle gibt die Beweiseidee des folgenden Satzes an.

					Grenzwert
Erste Folge	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\rightarrow$	z_1
Zweite Folge	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\rightarrow$	z_2
Dritte Folge	x_{31}	x_{32}	x_{33}	$\rightarrow$	z_3
				$\searrow$	$\downarrow$
					y

Satz 46.9. *Das Cauchy-Folgen-Modell der reellen Zahlen ist ein vollständiger, archimedisch angeordneter Körper.*

Beweis. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. D.h. jedes einzelne Folgenglied z_n ist selbst durch eine rationale Cauchy-Folge repräsentiert. Für diese repräsentierende Folge schreiben wir $(x_{ni})_{i \in \mathbb{N}}$, wobei der zweite Index der Folgenindex ist und der erste Index sich auf die zugehörige Restklasse z_n bezieht. Wir können durch Übergang zu einer Teilfolge der n .ten Folge annehmen, dass für jeden Stammbruch $\frac{1}{k}$ bereits für alle $i, j \geq k$ die Abschätzung

$$|x_{ni} - x_{nj}| \leq \frac{1}{3k}$$

gilt. Es sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die zugehörige Diagonalfolge, ihre Folgenglieder sind also die rationalen Zahlen

$$y_n = x_{nn}.$$

Wir behaupten, dass diese Folge eine Cauchy-Folge ist und dass die vorgegebene Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen $y = [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ konvergiert. Sei also $\epsilon = \frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}_+$ vorgegeben.¹⁴ Aufgrund der Cauchy-Eigenschaft der Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es ein n_0 (das wir als mindestens k annehmen können) derart, dass für alle $m, n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|z_m - z_n| \leq \frac{1}{3k}$$

gilt. Aufgrund von Lemma 46.8 konvergiert die geeignet gewählte repräsentierende Folge $(x_{ni})_{i \in \mathbb{N}}$ gegen z_n , und zwar mit der Eigenschaft, dass

$$|x_{ni} - x_{nj}| \leq \frac{1}{3k}$$

¹⁴Da wir schon wissen, dass ein archimedisch angeordneter Körper vorliegt, müssen wir nur die Stammbrüche betrachten.

für $i, j \geq k$ und somit auch

$$|x_{ni} - z_n| \leq \frac{1}{3k}$$

für i hinreichend groß gilt. Somit ist insgesamt für $m, n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |z_m - y_n| &= |z_m - x_{nn}| \\ &= |z_m - z_n + z_n - x_{nm} + x_{nm} - x_{nn}| \\ &\leq |z_m - z_n| + |z_n - x_{nm}| + |x_{nm} - x_{nn}| \\ &\leq \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k} \\ &= \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Durch den Vergleich

$$|y_n - y_\ell| \leq |z_m - y_n| + |z_m - y_\ell|$$

sieht man, dass $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Die zugehörige Klasse $y = [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ ist nach Lemma 46.8 der Grenzwert davon. Die obige Abschätzung gilt dann auch für $|z_m - y|$. $\square$

Wir halten insbesondere fest, dass es einen vollständigen archimedisch angeordneten Körper gibt.

46. ARBEITSBLATT

46.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 46.1. Zeige, dass im Ring der rationalen Folgen $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ die Teilmenge der Nullfolgen kein Ideal bildet.

46.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 46.2. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Menge aller Folgen in K (mit gliedweiser Addition und Multiplikation) ein kommutativer Ring ist.

Dieser Folgenring wird mit $K^{\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Aufgabe 46.3. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Menge aller Folgen in K (mit gliedweiser Addition und Multiplikation) kein Körper ist.

Aufgabe 46.4. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass die Menge aller konvergenten Folgen in K (mit gliedweiser Addition und Multiplikation) ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 46.5. Die beiden Zwillingsschwestern Carmen und Conchita Cauchy waren gestern auf einer tollen Party. Beide haben jeweils genau eine Erinnerungslücke, einen Moment, an den sie sich nicht erinnern können. Sie möchten wissen, ob es sich um die gleiche Lücke handelt. Da es sich um eine Lücke handelt, können sie diese nicht direkt adressieren und untereinander vergleichen. Welche Möglichkeiten haben sie, ihre Erinnerungslücken allein mit Hilfe ihrer Erinnerungen zu vergleichen?

Aufgabe 46.6. Wir nennen zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Q}$ *Cauchy-äquivalent*, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m, n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_n - y_m| \leq \epsilon$$

gilt. Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Die Cauchy-Äquivalenz ist eine symmetrische und transitive Relation auf dem Folgenring $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.
- (2) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge genau dann, wenn sie zu sich selbst Cauchy-äquivalent ist.
- (3) Auf dem Raum aller Cauchy-Folgen ist die Cauchy-Äquivalenz eine Äquivalenzrelation.
- (4) Auf dem Raum aller Cauchy-Folgen stimmt die Cauchy-Äquivalenz von zwei Folgen mit der Eigenschaft überein, dass ihre Differenzfolge eine Nullfolge ist.
- (5) Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-äquivalent ist, so ist auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Aufgabe 46.7. Es sei K ein Körper und $K^{\mathbb{N}}$ der zugehörige Folgenring. Es sei $k \in \mathbb{N}$ fixiert.

- (1) Zeige, dass

$$I_k = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_k = 0\}$$

ein Ideal in $K^{\mathbb{N}}$ ist.

- (2) Welche Bedeutung hat die durch dieses Ideal gegebene Äquivalenzrelation?
- (3) Zeige, dass die Gesamtabbildung

$$K \longrightarrow K^{\mathbb{N}} \longrightarrow K^{\mathbb{N}}/I_k$$

bijektiv ist.

Aufgabe 46.8. Es sei K ein Körper und $K^{\mathbb{N}}$ der zugehörige Folgenring. Zeige, dass durch

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

falls sich die beiden Folgen nur in endlich vielen Gliedern unterscheiden, eine Äquivalenzrelation definiert ist. Rührt diese Äquivalenzrelation von einem Ideal her?

Aufgabe 46.9.*

Bildet im Ring aller rationalen Folgen die Teilmenge der in $\mathbb{Q}$ konvergenten Folgen ein Ideal?

Aufgabe 46.10. Bildet im Ring aller rationalen Folgen die Teilmenge der in $\mathbb{R}$ konvergenten Folgen ein Ideal?

Aufgabe 46.11. Es sei $R \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ der Ring, der aus allen in $\mathbb{Q}$ konvergenten, rationalen Folgen besteht.

- (1) Zeige, dass die Menge der Nullfolgen ein Ideal in R bildet.
- (2) Zeige, dass es einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\varphi: R \longrightarrow \mathbb{Q}$$

gibt.

- (3) Zeige, dass es einen bijektiven Ringhomomorphismus

$$\psi: R/N \longrightarrow \mathbb{Q}$$

gibt.

Aufgabe 46.12.*

Es sei

$$D = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{Cauchy-Folge in } \mathbb{R}\}$$

und N das Ideal der Nullfolgen in D .

- (1) Zeige, dass es einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\psi: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt.

- (2) Zeige, dass es einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\varphi: D/N \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt.

(3) Zeige, dass die Gesamtabbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow D \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$$

bijektiv ist.

Aufgabe 46.13. Es sei $R = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ der Ring aller rationalen Folgen. Ist die Abbildung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow R,$$

die einer rationalen Zahl ihre Dezimalbruchfolge zuordnet, ein Ringhomomorphismus?

Aufgabe 46.14. Wir betrachten die Ringhomomorphismen

$$q: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(n)$$

und

$$q: C \longrightarrow C/N = \mathbb{R},$$

wobei C den Ring der rationalen Cauchy-Folgen und N das Ideal der Nullfolgen bezeichnet. Zeige, dass es jeweils (über kanonische Repräsentanten) eine natürliche Abbildung s in die andere Richtung mit

$$q \circ s = \text{Id}$$

gibt, die aber kein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 46.15. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei M die Menge der wachsenden Folgen in $K_{\geq 0}$. Zeige, dass M mit der gliedweisen Addition und Multiplikation ein kommutativer Halbring ist.

Aufgabe 46.16. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rationale Cauchy-Folgen. Zeige, dass in $\mathbb{R} = C/N$ die Ordnungsbeziehung

$$[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \geq [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$

genau dann gilt, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass $x_n \geq y_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Aufgabe 46.17. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rationale Cauchy-Folgen. Zeige, dass in $\mathbb{R} = C/N$ die Ordnungsbeziehung

$$[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \geq [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$

genau dann gilt, wenn es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq y_n$ gibt.

Aufgabe 46.18. Wir betrachten die Folge $\sqrt{\frac{1}{n}}$ in $\mathbb{R}$. Jedes Folgenglied sei selbst durch die Heron-Folge $x_{ni}, i \in \mathbb{N}$, mit dem Startwert $x_{n0} = 1$ repräsentiert. Bestimme die Diagonalfolgenglieder y_1, y_2, y_3, y_4 im Sinne von Satz 46.9.

Aufgabe 46.19. Es sei u_n die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{5}$ mit dem Startwert $u_0 = 1$, also $u_1 = 3, u_2 = \frac{7}{3}, u_3 = \frac{47}{21}, \dots$ Wir betrachten die reelle Folge

$$z_n := \sqrt{u_n}.$$

Zu jedem n sei $x_{ni}, i \in \mathbb{N}$, die Heron-Folge zur Berechnung von $z_n = \sqrt{u_n}$ mit dem Startwert $x_{n0} = 1$. Bestimme die Diagonalfolgenglieder y_1, y_2, y_3, y_4 im Sinne von Satz 46.9. Zeige, dass z_n eine Cauchy-Folge ist und bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 46.20. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von reellen Zahlen. Zeige, dass man die z_n durch rationale Cauchy-Folgen $x_{ni}, i \in \mathbb{N}$, derart repräsentieren kann, dass die Diagonalfolge

$$y_n := x_{nn}$$

(siehe Satz 46.9)

- (1) in $\mathbb{R}$ nicht konvergiert,
- (2) in $\mathbb{R}$ konvergiert, aber nicht gegen den Grenzwert von z_n ,
- (3) in $\mathbb{R}$ konvergiert, und zwar gegen den Grenzwert von z_n .

Aufgabe 46.21. Es sei M die Menge aller reellen konvergenten Folgen und

$$\Psi: M \longrightarrow \mathbb{R}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right),$$

die Abbildung, die einer konvergenten Folge ihren Grenzwert zuordnet. Warum ist dies eine (wohldefinierte) Abbildung? Ist Ψ injektiv? Ist Ψ surjektiv?

Aufgabe 46.22. Bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Kern des Potenzierens

$$\mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{R}^\times, z \longmapsto z^n.$$

Aufgabe 46.23. Gibt es Gruppenhomomorphismen

$$(\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, 0),$$

die nicht $\mathbb{R}$ -linear sind?

Aufgabe 46.24. Zeige, dass es keinen Ringhomomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{Q}$ gibt.

Aufgabe 46.25. Es seien $K \subseteq L$ archimedisch angeordnete Körper. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K$ eine in K konvergente Folge. Zeige, dass diese Folge auch in L konvergiert.

Aufgabe 46.26.*

Man gebe ein Beispiel für eine konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K , die in einem größeren angeordneten Körper

$$K \subseteq L$$

nicht konvergiert.

Aufgabe 46.27. Zeige, dass das reelle Einheitsintervall $[0, 1]$ unendlich viele irrationale Zahlen enthält.

Aufgabe 46.28. Zeige, dass jedes reelle Intervall mit positiver Intervalllänge unendlich viele irrationale Zahlen enthält.

46.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 46.29. (2 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$. Zeige, dass jede Teilfolge davon das gleiche Element im Cauchy-Folgen-Modell definiert.

Aufgabe 46.30. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper, bei dem eine Teilmenge $P \subseteq K$ ausgezeichnet sei, die den folgenden Bedingungen genügt.

- (1) Für $x \in K$ ist entweder $x \in P$ oder $-x \in P$ oder $x = 0$.
- (2) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$.
- (3) Aus $x, y \in P$ folgt $x \cdot y \in P$.

Zeige, dass durch die Festlegung

$$x \geq y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x - y \in P$$

ein angeordneter Körper entsteht.

Aufgabe 46.31. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass die Menge aller beschränkten Folgen in K (mit gliedweiser Addition und Multiplikation) ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 46.32. (5 Punkte)

Wir betrachten die Folge $z_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ in $\mathbb{R}$. Jedes Folgenglied sei selbst durch die Heron-Folge $x_{ni}, i \in \mathbb{N}_+$, mit dem Startwert $x_{n0} = 1$ repräsentiert. Bestimme die Diagonalfolgenglieder y_1, y_2, y_3, y_4 im Sinne von Satz 46.9.

Aufgabe 46.33. (4 (2+2) Punkte)

Es sei K ein Körper und $K^{\mathbb{N}}$ der zugehörige Folgenring. Es sei $I \subseteq K^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen über K , bei denen nur endlich viele Glieder von 0 verschieden sind.

- (1) Zeige, dass I ein Ideal in $K^{\mathbb{N}}$ ist.
- (2) Zeige, dass der Restklassenring $K^{\mathbb{N}}/I$ kein Körper ist.

47. VORLESUNG - DEZIMALENTWICKLUNG

Das Leben hat kein Geländer

Hermann Bahr

47.1. Der Isomorphiesatz.

Zum folgenden Satz vergleiche man Satz 7.2. So wie die Dedekind-Peano-Axiome die natürlichen Zahlen eindeutig festlegen, werden die reellen Zahlen durch die Eigenschaften, die in einem vollständigen archimedisch angeordneten Körper zusammengefasst werden, eindeutig charakterisiert.

Satz 47.1. *Es gibt genau einen vollständigen archimedisch angeordneten Körper, die reellen Zahlen. Genauer: Wenn zwei vollständige archimedisch angeordnete Körper $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ vorliegen, so gibt es einen eindeutig bestimmten bijektiven Ringhomomorphismus*

$$\varphi: \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_2.$$

Beweis. Wir können davon ausgehen, dass der eine Körper M das Cauchy-Folgen-Modell C/N der reellen Zahlen ist, wobei C den Ring aller rationalen Cauchy-Folgen und N das Ideal der Nullfolgen bezeichnet. Der andere Körper sei mit K bezeichnet. Beide Körper enthalten die rationalen Zahlen und ein Ringhomomorphismus bildet $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{Q}$ ab. Ein Ringhomomorphismus respektiert auch die Quadrate. In einem vollständigen archimedisch angeordneten Körper sind die nichtnegativen Elemente nach Aufgabe 45.18 genau die Quadrate, deshalb muss ein solcher Ringhomomorphismus auch positive Elemente in positive Elemente überführen. Da man in einem archimedisch angeordneten Körper die Konvergenz mit Stammbrüchen allein überprüfen kann, erhält eine solche Abbildung auch die Konvergenz. Da in M nach Konstruktion und Lemma 46.8 jedes Element Limes einer rationalen

Cauchy-Folge ist, und diese auch in K wegen der Vollständigkeit konvergiert, kann es nur eine solche Abbildung geben. Diese Überlegung zeigt zugleich, wie man die Abbildung φ ansetzen muss. Ein Element $x \in M$ werde repräsentiert durch eine rationale Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Folge konvergiert in K gegen ein y und man setzt $\varphi(x) = y$. Dies ist wohldefiniert. Wenn man nämlich eine andere repräsentierende rationale Cauchy-Folge $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nimmt, so ist die Differenz zu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und dann konvergieren nach Lemma 44.11 (1) die beiden Folgen in K gegen das gleiche Element.

Aufgrund der Verträglichkeit mit der Konvergenz haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & M = C/N \\ \psi \searrow & & \downarrow \varphi \\ & & K \end{array},$$

wobei ψ eine Cauchy-Folge auf ihren Limes in K abbildet. Nach Lemma 44.11 ist diese Abbildung ein Ringhomomorphismus. Da die horizontale Abbildung surjektiv ist, ist auch φ ein Ringhomomorphismus.

Die Injektivität gilt für jeden Ringhomomorphismus zwischen Körpern. Zum Nachweis der Surjektivität von φ sei $y \in K$. Nach Korollar 28.10 gibt es eine Dezimalbruchfolge, die gegen y konvergiert. Da diese Dezimalbruchfolge eine rationale Cauchy-Folge ist, gehört sie zu C und definiert ein Element in M , das durch φ auf y abgebildet wird. Insgesamt ist also φ ein bijektiver Ringhomomorphismus. $\square$

Nachdem wir nachgewiesen haben, dass die reellen Zahlen durch ihre axiomatisch fixierten Eigenschaften eindeutig festgelegt sind, werden wir in Zukunft nur noch mit diesen Axiomen und daraus abgeleiteten Eigenschaften arbeiten, die Konstruktion der reellen Zahlen mit Hilfe der Cauchy-Folgen wird in den Hintergrund treten. Den Körper der reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$.

Definition 47.2. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \notin \mathbb{Q}$ heißt eine *irrationale Zahl*.

47.2. Monotone Folgen.

Korollar 47.3. Eine beschränkte und monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Folge wachsend und nach oben beschränkt oder fallend und nach unten beschränkt. Nach Lemma 45.7 liegt eine Cauchy-Folge vor, und diese konvergiert in $\mathbb{R}$. $\square$

47.3. Zifferndarstellung reeller Zahlen.

Eine Folge der Form

$$x_n = \frac{a_n}{10^n}$$

mit $a_n \in \mathbb{Z}$ und

$$\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{a_n + 1}{10^n}$$

heißt Dezimalbruchfolge. Eine Ziffernfolge (eine Ziffernentwicklung) z_{-i} , $i \in \mathbb{N}_+$, mit $z_{-i} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ definiert die Folge

$$x_n = \sum_{i=1}^n z_{-i} 10^{-i} = \frac{\sum_{i=1}^n z_{-i} 10^{n-i}}{10^n} = \frac{a_n}{10^n}$$

mit

$$a_n := \sum_{i=1}^n z_{-i} 10^{n-i}.$$

Inwiefern stellt eine solche Dezimalbruchfolge eine reelle Zahl dar und inwiefern ist die Darstellung eindeutig? Zu jedem Element $x \in K$ in einem archimedisch angeordneten Körper K gibt es nach Verfahren 28.6 eine Dezimalbruchfolge, nämlich die durch

$$x_n = \lfloor x \cdot 10^n \rfloor \cdot 10^{-n}$$

gegebene Folge, die nach Korollar 28.10 gegen x konvergiert.

Satz 47.4. (1) *Jede Dezimalbruchfolge konvergiert gegen eine eindeutig bestimmte reelle Zahl.*

(2) *Zu jeder reellen Zahl x konvergiert die durch*

$$x_n = \lfloor x \cdot 10^n \rfloor \cdot 10^{-n}$$

gegebene Dezimalbruchfolge gegen x .

(3) *Zwei verschiedene Dezimalbruchfolgen $x_n = \frac{a_n}{10^n} = \sum_{i=0}^n w_{-i} 10^{-i}$ und $y_n = \frac{b_n}{10^n} = \sum_{i=0}^n z_{-i} 10^{-i}$ konvergieren genau dann gegen die gleiche Zahl x , wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$w_{-i} = z_{-i}$$

für $-i > -k$,

$$z_{-k} \neq 9$$

und

$$w_{-k} = z_{-k} + 1$$

und

$$w_{-i} = 0$$

und

$$z_{-i} = 9$$

für $-i < -k$ (oder umgekehrt).

Beweis. (1) Dies folgt aus Lemma 45.4 und der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

(2) Dies wurde in Korollar 28.10 bewiesen.

und damit hat man auch die Abschätzung

$$0,999999999999999999 \leq x + y \leq 1,00000000000000000001.$$

Man weiß aber nicht, ob die ersten Ziffern Neuen oder Nullen sind, und das weiß man auch dann im Allgemeinen nicht, wenn man noch mehr Ziffern der Zahlen kennt.

Bei der Multiplikation ist das Problem noch deutlicher. Selbst wenn ein Faktor z eine natürliche Zahl ist, so kann man die Ziffernentwicklung eines Produktes zw nicht aus den entsprechenden Ziffern von w ablesen. Sei beispielsweise $z = 3$ und

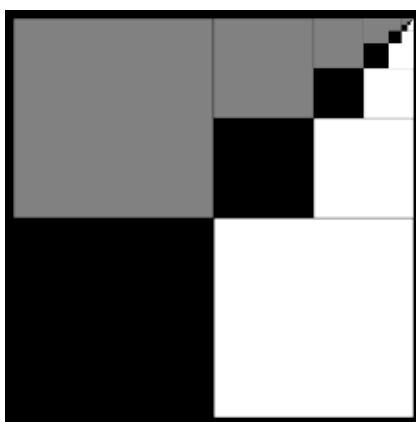
$$w = 0,333333333333333333....$$

Dann weiß man nur

$$0,999999999999999999 \leq zw \leq 1,00000000000000000002,$$

man hat aber keine Kenntnis über die ersten Ziffern des Produktes.

47.4. Die geometrische Reihe.



Dieses Bild veranschaulicht das Verhalten der geometrischen Reihe zu $x = \frac{1}{4}$. Die Grundseite des Quadrates sei 2, dann passt die geometrische Reihe dreimal in dieses Quadrat rein. Der jeweilige Flächeninhalt der drei Reihen ist $\frac{4}{3}$.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ heißt *geometrische Reihe* zu $x \in \mathbb{R}$, es geht also um die Folge mit den Folgengliedern

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

bzw. um die Summe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Die Konvergenz hängt wesentlich vom Betrag von x ab.

Satz 47.6. Für alle reellen Zahlen x mit $|x| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis. Für jedes x und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Beziehung

$$(x-1) \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) = x^{n+1} - 1$$

und daher gilt für die Partialsummen die Beziehung (bei $x \neq 1$)

$$s_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Für $n \rightarrow \infty$ und $|x| < 1$ konvergiert dies wegen Lemma 44.11 und Aufgabe 28.30 gegen $\frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$. $\square$

47.5. Rationale Zahlen und periodische Ziffernentwicklung.

Für einen Bruch $\frac{a}{b}$ zu $a, b \in \mathbb{N}_+$ liefert der Divisionsalgorithmus nach Lemma 28.3 (3) eine periodische Entwicklung $z, z_{-1}z_{-2}\dots$ die nach Lemma 28.8 die Dezimalbruchfolge zur Zahl $\frac{a}{b}$ ist. Zu einer rationalen Zahl gehört also eine periodische Ziffernentwicklung. Die Umkehrung gilt ebenfalls.

Satz 47.7. Eine reelle Zahl ist genau dann eine rationale Zahl, wenn sie eine periodische Ziffernentwicklung (im Dezimalsystem) besitzt.

Beweis. Die Periodizität der Ziffernentwicklung zu $\frac{a}{b}$ wurde in Lemma 28.3 (3) in Verbindung mit Korollar 28.10 bewiesen. Es liege eine periodische Ziffernentwicklung für die reelle Zahl x vor. Da sich die Eigenschaft, eine rationale Zahl zu sein, weder bei Multiplikation mit einer rationalen Zahl $\neq 0$ noch bei Addition mit einer rationalen Zahl ändert, können wir sofort annehmen, dass die Ziffernentwicklung die Form

$$0, z_{m-1}z_{m-2}\dots z_0 z_{m-1}z_{m-2}\dots z_0 z_{m-1}z_{m-2}\dots z_0 \dots$$

besitzt. Die dadurch definierte Zahl können wir als

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1} z_i 10^i \right) \cdot 0,00\dots 00100\dots 00100\dots 00100\dots 001\dots$$

auffassen, wobei die Einsen an der m -ten, $2m$ -ten u.s.w. Stelle stehen. Wir müssen uns also nur noch um periodische Ziffernentwicklungen von dieser speziellen Art kümmern. Wir betrachten also die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^m} \right)^i.$$

Nach Satz 47.6 konvergiert dies gegen

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^m} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{99 \dots 99}{10^m}\right)} - 1 = \frac{10^m}{99 \dots 99} - 1 = \frac{1}{99 \dots 99},$$

wobei jeweils m Neunen vorkommen. Diese Zahl ist also rational. $\square$

Die entsprechende Aussage gilt für die Ziffernentwicklung zu jeder Basis, nicht nur im Dezimalsystem. Eine reelle Zahl mit einer periodischen Ziffernentwicklung wird so geschrieben, dass man einen Strich über die Periode macht, also beispielsweise

$$351,052882\overline{700}.$$

Beispiel 47.8. Wir bestimmen mit Hilfe des Beweises zu Satz 47.7 die rationale Zahl, die durch die periodische Ziffernentwicklung

$$0,7\overline{41}$$

gegeben ist. Es ist

$$\begin{aligned} 0,7\overline{41} &= 0,7 + 0,0\overline{41} \\ &= 0,7 + \frac{1}{10} \cdot 0,4\overline{1} \\ &= \frac{7}{10} + \frac{1}{10} \cdot 41 \cdot 0,0\overline{1} \\ &= \frac{7}{10} + \frac{1}{10} \cdot 41 \cdot \frac{1}{99} \\ &= \frac{7}{10} + \frac{41}{990} \\ &= \frac{734}{990} \\ &= \frac{367}{495}. \end{aligned}$$

47. ARBEITSBLATT

47.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 47.1. Heinz Ngolo und Mustafa Müller sagen abwechselnd reelle Zahlen auf. Dabei sind die Zahlen von Heinz alle positiv und fallen, die Zahlen von Mustafa sind negativ und wachsen. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die dadurch gegebene Folge.

- (1) Kann $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine von 0 verschiedene Zahl konvergieren?
- (2) Muss $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren?

47.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 47.2. Zeige, dass der einzige Körperisomorphismus

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Identität ist.

Aufgabe 47.3.*

Es sei K ein Körper, R ein Ring mit $0 \neq 1$ und

$$\varphi: K \longrightarrow R$$

ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass φ injektiv ist.

Aufgabe 47.4. Es sei $u \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{Q}$.

- (1) Zeige, dass u genau dann irrational ist, wenn $u + v$ irrational ist.
- (2) Sei zusätzlich $v \neq 0$. Zeige, dass u genau dann irrational ist, wenn $u \cdot v$ irrational ist.

Aufgabe 47.5.*

a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 \neq c^2.$$

c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a, b \in]0, 1[$ und eine rationale Zahl $c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Aufgabe 47.6.*

In $\mathbb{Q}$ sei eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben, deren Anfangsglieder durch $x_0 = 0$, $x_1 = 0,7$, $x_2 = 0,73$, $x_3 = 0,734$ gegeben sind. Muss die Folge in $\mathbb{Q}$ konvergieren? Muss die Folge in $\mathbb{R}$ konvergieren? Kann die Folge in $\mathbb{Q}$ konvergieren? Kann die Folge in $\mathbb{R}$ konvergieren?

Aufgabe 47.7. Die Dezimalentwicklungen der beiden reellen Zahlen x und y beginnen

$$x = 0,24\dots$$

und

$$y = 0,51\dots$$

Was kann man über die Ziffernentwicklung der Summe $x + y$ sagen?

Aufgabe 47.8. Die Dezimalentwicklungen der beiden reellen Zahlen x und y beginnen

$$x = 0,24719113\dots$$

und

$$y = 0,60421809\dots$$

Was kann man über die Ziffernentwicklung der Summe $x + y$ sagen?

Aufgabe 47.9. Die Dezimalentwicklungen der beiden reellen Zahlen x und y beginnen

$$x = 0,3\dots$$

und

$$y = 0,3\dots$$

Was kann man über die Ziffernentwicklung des Produktes $x \cdot y$ sagen? Was kann man über die erste Nachkommaziffer des Produktes sagen, wenn die zweite Nachkommaziffer gleich 5 ist.

Aufgabe 47.10. Die Dezimalentwicklungen der beiden reellen Zahlen x und y beginnen

$$x = 0,536080713\dots$$

und

$$y = 0,663184254\dots$$

Was kann man über die Ziffernentwicklung des Produktes $x \cdot y$ sagen?

Aufgabe 47.11.*

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ die Teilmenge aller reellen Zahlen, bei denen die 17. Nachkommastelle in der (kanonischen) Dezimalentwicklung eine 0 ist. Welche Eigenschaften eines Ideals erfüllt diese Menge, welche nicht?

Aufgabe 47.12.*

Eine reelle Zahl x besitze die Ziffernentwicklung

$$0,523\dots$$

im Dezimalsystem. Was kann man über die Ziffernentwicklung von $1/x$ sagen?

Aufgabe 47.13. Eine reelle Zahl x besitze die Ziffernentwicklung

$$0,3715\dots$$

im Dezimalsystem. Was kann man über die Ziffernentwicklung von $1/x$ sagen?

Aufgabe 47.14. Zeige, dass es keinen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: (\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow G$$

in eine Gruppe G mit der Eigenschaft gibt, dass $r \in \mathbb{R}$ genau dann irrational ist, wenn $\varphi(r) = 0$ ist.

Aufgabe 47.15.*

Es sei $u \in \mathbb{R}$ eine irrationale Zahl und sei

$$G = \{a + bu \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

- (1) Zeige, dass G eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, 0, +)$ ist.
- (2) Zeige, dass es kein Element $v \in \mathbb{R}$ mit

$$G = \mathbb{Z}v = \{cv \mid c \in \mathbb{Z}\}$$

gibt.

- (3) Zeige, dass es in G kein positives minimales Element gibt.

Aufgabe 47.16. Es sei K ein angeordneter Körper und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K . Wir definieren zwei Folgen mit den Anfangswerten $y_0 = x_0$ und $z_0 = 0$ rekursiv durch

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n + x_{n+1} - x_n, & \text{falls } x_{n+1} \geq x_n, \\ y_n & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$z_{n+1} = \begin{cases} z_n + x_{n+1} - x_n, & \text{falls } x_{n+1} < x_n, \\ z_n & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (1) Zeige, dass $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wachsend ist.
- (2) Zeige, dass $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fallend ist.

(3) Zeige

$$x_n = y_n + z_n.$$

Man kann also jede Folge als Summe einer wachsenden und einer fallenden Folge darstellen.

Aufgabe 47.17. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass man die alternierende Folge $(-1)^n$ nicht als Summe

$$(-1)^n = y_n + z_n$$

schreiben kann, wenn $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkte und monotone Folgen sind.

Aufgabe 47.18.*

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei eine reelle Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2}$$

definiert. Zeige die folgenden Aussagen.

- (a) Bei $x_0 > a$ ist $x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng fallend.
- (b) Bei $x_0 = a$ ist die Folge konstant.
- (c) Bei $x_0 < a$ ist $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng wachsend.
- (d) Die Folge konvergiert.
- (e) Der Grenzwert ist a .

Aufgabe 47.19. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass jede wachsende, nach oben beschränkte Folge in K konvergiert. Zeige, dass K vollständig ist.

Aufgabe 47.20.*

Wir betrachten die Folge, die durch die Folgenglieder

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

gegeben ist. Zeige, dass dies eine Nullfolge ist.

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n.$$

Aufgabe 47.21. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x .

Aufgabe 47.22. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt ($n \geq 1$).

Aufgabe 47.23. Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass zu einem beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_+$ durch

$$x_{n+1} := \frac{x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{2}$$

eine Folge definiert wird, die gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert.

Aufgabe 47.24. Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{\frac{2\sqrt{n} - 3}{3\sqrt{n} - 2}}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 47.25.*

Welche Dezimalbruchfolgen der Form $0, z_{-1}z_{-2}z_{-3}\dots$ mit $z_i \in \{0, \dots, 9\}$ sind Nullfolgen in $\mathbb{R}$? Welche in $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 47.26. Bestimme die rationale Zahl, die im Dezimalsystem durch

$$0,11\overline{05}$$

gegeben ist.

Aufgabe 47.27. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dualsystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,\overline{3}$ gegeben ist.

Aufgabe 47.28. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dreiersystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,\overline{17}$ gegeben ist.

Aufgabe 47.29. Zu den reellen Zahlen x und y sei die periodische Ziffernentwicklung bekannt,

$$x = z_0, \overline{z_1 \dots z_m}$$

und

$$y = w_0, \overline{w_1 \dots w_m}.$$

Zeige, dass die Summe $x+y$ ebenfalls eine (nicht unbedingt minimale) Periode der Länge m besitzt. Erläutere, wie sich die Periode der Summe aus den beiden einzelnen Perioden ergibt.

Aufgabe 47.30. Zu den reellen Zahlen x und y sei die periodische Ziffernentwicklung bekannt,

$$x = z_0, z_1 \dots z_k \overline{z_{k+1} \dots z_{k+r}}$$

und

$$y = w_0, w_1 \dots w_\ell \overline{w_{\ell+1} \dots w_{\ell+s}}.$$

Was kann man über die Periodenlänge der Summe $x + y$ sagen?

Aufgabe 47.31. Zu den reellen Zahlen x und y sei die periodische Ziffernentwicklung bekannt,

$$x = z_0, z_1 \dots z_k \overline{z_{k+1} \dots z_{k+r}}$$

und

$$y = w_0, w_1 \dots w_\ell \overline{w_{\ell+1} \dots w_{\ell+s}}.$$

Was kann man über die Periodenlänge des Produktes $x \cdot y$ sagen?

Aufgabe 47.32.*

Sei $m \in \mathbb{N}_+$ und sei

$$x = 0, \overline{0 \dots 01}$$

die reelle Zahl mit Periodenlänge m (die Periode besteht aus $m - 1$ Nullen und einer 1). Sei

$$y = \sum_{i=0}^{m-1} z_i 10^i$$

mit $z_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Zeige

$$xy = 0, \overline{z_{m-1} z_{m-2} \dots z_1 z_0}.$$

Aufgabe 47.33. Aufgrund der Wohldefiniertheit der Addition und der Multiplikation für die reellen Zahlen können wir je zwei Zahlen, die in der Form

$$z_n z_{n-1} \dots z_1 z_0, z_{-1} z_{-2} \dots$$

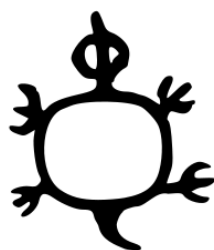
(mit Ziffern z_i aus $\{0, 1, \dots, 9\}$, die nach rechts unendlich weiter gehen können) miteinander addieren und multiplizieren, insbesondere kommt dabei wieder eine Zahl in einer solchen Form heraus. Jemand kommt auf folgende Idee: „Es müsste dann ebenfalls möglich sein, auch Zahlen der Form

$$\dots z_1 z_0, z_{-1} z_{-2} \dots z_{-k},$$

die also nach links unendlich weiter gehen dürfen, miteinander zu addieren und zu multiplizieren. Die Situation ist ja völlig symmetrisch (Spiegelung an der Einerstelle) zur Dezimalentwicklung und man muss nur die gleichen Rechenregeln analog anwenden“. Was ist davon zu halten?

Aufgabe 47.34. Die Situation im Schildkröten-Paradoxon von Zenon von Elea ist folgendermaßen: Eine langsame Schildkröte (mit der Kriechgeschwindigkeit $v > 0$) hat einen Vorsprung $s > 0$ gegenüber dem schnelleren Achilles (mit der Geschwindigkeit $w > v$ und dem Startpunkt 0). Sie starten gleichzeitig. Achilles kann die Schildkröte nicht einholen: Wenn er beim Ausgangspunkt der Schildkröte $s_0 = s$ ankommt, so ist die Schildkröte nicht mehr dort, sondern ein Stück weiter, sagen wir an der Stelle $s_1 > s_0$. Wenn Achilles an der Stelle s_1 ankommt, so ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter, an der Stelle $s_2 > s_1$, u.s.w.

Berechne die Folgenglieder s_n , die zugehörigen Zeitpunkte t_n , sowie die jeweiligen Grenzwerte. Vergleiche diese Grenzwerte mit den direkt berechneten Überholungsdaten.



Aufgabe 47.35. Sei $k \geq 2$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konvergiert.

Aufgabe 47.36. Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ konvergiert.

Aufgabe 47.37. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass jede Dezimalbruchfolge in K konvergiert. Zeige, dass K vollständig ist.

Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ heißt *dicht*, wenn es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ Elemente $t \in T$ mit

$$|t - x| < \epsilon$$

gibt.

Aufgabe 47.38. Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht ist.

Aufgabe 47.39. Zeige, dass die Menge der Dezimalbrüche in $\mathbb{R}$ dicht ist.

Aufgabe 47.40. Es sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ eine fixierte natürliche Zahl und es sei T die Menge aller rationalen Zahlen, die man mit einer Potenz von k als Nenner schreiben kann. Zeige, dass T in $\mathbb{R}$ dicht ist.

Aufgabe 47.41. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann dicht in $\mathbb{R}$ ist, wenn es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ gibt, die gegen x konvergiert.

Aufgabe 47.42. Zeige, dass die Menge der irrationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ dicht ist.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 47.15 hilfreich.

Aufgabe 47.43. Zeige, dass die Untergruppe

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \sqrt{3} \subseteq \mathbb{R}$$

dicht ist.

Aufgabe 47.44. Sei H eine (additive) Untergruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Zeige, dass entweder $H = \mathbb{Z}a$ mit einer eindeutig bestimmten nichtnegativen reellen Zahl a ist, oder aber H dicht in $\mathbb{R}$ ist.

47.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 47.45. (4 Punkte)

Die Teilmenge

$$S = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{3} = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$$

ist ein Körper. Zeige, dass es einen von der Identität verschiedenen bijektiven Ringhomomorphismus

$$\varphi: S \longrightarrow S$$

gibt.

Aufgabe 47.46. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{2n + 5\sqrt{n} + 7}{-5n + 3\sqrt{n} - 4}$$

definierten reellen Folge.

Aufgabe 47.47. (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K . Zeige, dass man

$$x_n = y_n + z_n$$

mit einer wachsenden Cauchy-Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und einer fallenden Cauchy-Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schreiben kann.

Aufgabe 47.48. (4 Punkte)

Es sei $x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert x . Zeige, dass die Folge $\sqrt{x_n}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert.

Aufgabe 47.49. (3 Punkte)

Bestimme die rationale Zahl, die im Dezimalsystem durch

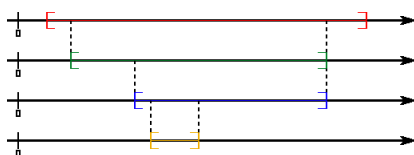
$$0,2347\overline{07}$$

gegeben ist.

48. VORLESUNG - INTERVALLSCHACHTELUNGEN

48.1. Intervallschachtelungen.

Eine weitere Möglichkeit, reelle Zahlen zu beschreiben, einzuführen, zu approximieren und rechnerisch zu handhaben, wird durch Intervallschachtelungen gegeben.



Definition 48.1. Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N},$$

in K heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

gegen 0 konvergiert.

Die Intervalllängen müssen also insbesondere eine fallende Nullfolge bilden. Es wird nicht eine bestimmte Geschwindigkeit dieser Konvergenz verlangt. Die *Intervallhalbierung* ist eine spezielle Intervallschachtelung, bei der man zusätzlich verlangt, dass das folgende Intervall jeweils die untere oder die obere Hälfte des Vorgängerintervalls ist. Zu einer Dezimalbruchfolge

$$x_n = \frac{a_n}{10^n}$$

gehört die Intervallschachtelung

$$I_n = \left[\frac{a_n}{10^n}, \frac{a_n + 1}{10^n} \right].$$

Hier ist x_n der untere Rand des Intervalls I_n und es gilt $x_{n+1} \in I_n$ (und wobei zusätzlich ausgeschlossen ist, dass x_{n+1} der rechte Rand von I_n ist). Die Intervalllängen sind hier $\frac{1}{10^n}$.

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen wirkt sich auf Intervallschachtelungen folgendermaßen aus.

Satz 48.2. Es sei I_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Dann besteht der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Eine reelle Intervallschachtelung bestimmt also genau eine reelle Zahl.

Beweis. Es sei $x_n \in I_n = [a_n, b_n]$ beliebig gewählt. Wir behaupten, dass dies eine Cauchy-Folge ist. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ sei n_0 derart, dass

$$b_{n_0} - a_{n_0} \leq \epsilon.$$

Für $m \geq n \geq n_0$ ist dann

$$|x_m - x_n| \leq b_n - a_n \leq \epsilon,$$

da ja $x_m, x_n \in I_n$ ist. Es sei x der Limes dieser Cauchy-Folge. Wäre $x \notin I_m$ für ein m , so wäre

$$x < a_m$$

(oder $x > b_m$), doch wegen der Konvergenz der Folge gegen x würden dann auch die Folgenglieder für n hinreichend groß echt unterhalb von a_m und damit von a_n liegen, im Widerspruch zu $x_n \in I_n$. Also ist $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Würden zwei Zahlen $x < y$ zum Durchschnitt aller Intervalle gehören, so wäre

$$y - x \leq b_n - a_n$$

für alle n im Widerspruch dazu, dass die Intervalllängen gegen 0 konvergieren. $\square$

Der Beweis zeigt, dass jede Folge $x_n \in I_n = [a_n, b_n]$ gegen die gleiche durch die Intervallschachtelung definierte Zahl konvergiert. Dies gilt insbesondere für die Folge der unteren und die Folge der oberen Intervallgrenzen.

48.2. Dedekindsche Schnitte.

Definition 48.3. Unter einem *Dedekindschen Schnitt* versteht man ein Paar (A, B) bestehend aus Teilmengen der rationalen Zahlen, die folgende Eigenschaften erfüllen.

- (1) A und B sind nicht leer.
- (2)

$$A \uplus B = \mathbb{Q},$$

d.h. es liegt eine Zerlegung der Menge aller rationalen Zahlen in zwei Teilmengen vor.

- (3) Für jedes $x \in A$ und jedes $y \in B$ ist $x < y$.
- (4) Zu $x \in A$ gibt es ein $x' \in A$ mit $x' > x$.



Richard Dedekind (1831-1916)

Bemerkung 48.4. Die Mengen A bzw. B heißen auch die Untermenge bzw. Obermenge des Dedekindschen Schnittes. Sie legen sich wegen der Bedingung (2) gegenseitig fest. Jede reelle Zahl $z \in \mathbb{R}$ (und auch jedes Element in einem angeordneten Körper) definiert einen Dedekindschen Schnitt, indem man

$$A := \{q \in \mathbb{Q} \mid q < z\}$$

und

$$B := \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq z\}$$

setzt. Die Eigenschaften sind erfüllt, wie eine direkte Überprüfung zeigt. Man spricht von einem *Punktschnitt*. Ob ein Dedekindscher Schnitt ein Punktschnitt ist, hängt wesentlich vom Körper ab. Der durch $\sqrt{5}$ definierte Dedekindsche Schnitt ist in $\mathbb{R}$ ein Punktschnitt, in $\mathbb{Q}$ aber nicht.

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen hat folgende Auswirkungen auf die Dedekindschen Schnitte.

Satz 48.5. *In den reellen Zahlen ist jeder Dedekindsche Schnitt (A, B) ein Punktschnitt, d.h. es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit*

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}.$$

Beweis. Es seien $a \in A$ und $b \in B$. Wir definieren rekursiv eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$ mit $a_n \in A$ und $b_n \in B$. Wir setzen $a_0 := a$ und $b_0 := b$. Wenn a_n und b_n schon definiert sind, so setzen wir

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2}, & \text{falls } \frac{a_n + b_n}{2} \in A, \\ a_n & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n, & \text{falls } \frac{a_n + b_n}{2} \in A, \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist stets $a_n \in A$, $b_n \in B$ und insbesondere $a_n < b_n$, die Folgen sind wachsend bzw. fallend und die Intervalllänge wird in jedem Schritt halbiert.

Somit liegt eine Intervallschachtelung vor. Nach Satz 48.2 gibt es genau eine reelle Zahl x , die in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegt. Wir behaupten, dass dieses x der trennende Punkt ist, d.h. wir müssen

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$$

zeigen. Sei zunächst $q \in A$. Dann ist $q < b_n$ für jedes n und somit ist $q \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$. Da A mit q auch noch größere Elemente enthält, sagen wir $q < q' \in A$, gilt sogar $q < q' \leq x$. Wenn dagegen $x \notin A$, also $x \in B$ ist, so zeigt die gleiche Argumentation mit vertauschten Rollen die Beziehung $q \geq x$. $\square$

Bemerkung 48.6. Mit den Dedekindschen Schnitten kann man, wie mit Cauchy-Folgen, die reellen Zahlen konstruieren; Bei diesem Zugang definiert man direkt die reellen Zahlen als die Menge aller Dedekindschen Schnitte. Man muss dann natürlich auf der Ebene der Schnitte eine Addition, eine Multiplikation und eine Ordnungsrelation einführen und die gewünschten Eigenschaften nachweisen, siehe Aufgabe 48.10, Aufgabe 48.11, Aufgabe 48.12, Aufgabe 48.13. Dies ist ein gangbarer Weg. Der Vorteil liegt darin, dass es direkt eine Korrespondenz zwischen Dedekindschen Schnitten und den reellen Zahlen gibt, man muss nicht verschiedene Darstellungen (mit Hilfe einer Äquivalenzrelation) identifizieren. Der Nachteil ist, das Dedekindsche Schnitte abgesehen von dieser Konstruktion keine wichtige Rolle in der Mathematik spielen, während Folgen und Intervallschachtelungen überall in der Mathematik begegnen. Auch der rechnerisch-approximative Aspekt ist bei Dedekindschen Schnitten nicht wirklich vorhanden.

48.3. Existenz der Wurzeln.

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen sichert auch die Existenz einer eindeutig bestimmten Wurzel für eine nichtnegative reelle Zahl. Für Quadratwurzeln folgt dies auch aus Lemma 45.5 (1).

Satz 48.7. *Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und jedem $k \in \mathbb{N}_+$ gibt es eine eindeutige nichtnegative reelle Zahl x mit*

$$x^k = c.$$

Beweis. Wir betrachten den Dedekindschen Schnitt (A, B) mit

$$A = \{q \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \mid q^k < c\} \cup \mathbb{Q}_-$$

und

$$B = \{q \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \mid q^k \geq c\}.$$

Die Eigenschaften eines Dedekindschen Schnittes beruhen hierbei darauf, dass $\geq$ eine totale Ordnung ist, auf dem Archimedes-Axiom, auf Lemma 19.13 (8) und auf dem binomischen Lehrsatz, siehe Aufgabe 48.15. Nach Satz 48.5 gibt es somit ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}.$$

Wir behaupten

$$x^k = c.$$

Dies ergibt sich, da die beiden Annahmen $x^k < c$ bzw. $x^k > c$ jeweils zu einem Widerspruch führen. $\square$

Definition 48.8. Zu einer nichtnegativen reellen Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}_+$ bezeichnet man mit $\sqrt[k]{c}$ diejenige nichtnegative reelle Zahl, deren k -te Potenz gleich c ist.

Auf der eindeutigen Existenz von Wurzeln aus positiven reellen Zahlen beruht auch das *Potenzprinzip*, mit dem man in der Regel die Gleichheit von Wurzelausdrücken begründet: Zwei positive reelle Zahlen stimmen bereits dann überein, wenn eine gewisse gleichnamige Potenz von ihnen übereinstimmt. Dieses Prinzip findet im Beweis der nächsten Aussage Verwendung.

Lemma 48.9. *Es seien a, b positive reelle Zahlen und $m, n \in \mathbb{N}_+$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(1) *Es ist*

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{b}.$$

(2) *Es ist*

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \sqrt[m]{b}.$$

(3) *Es ist*

$$\sqrt[m]{b^{-1}} = \left(\sqrt[m]{b} \right)^{-1}.$$

Beweis. Wegen der Eindeutigkeit der Wurzeln stimmen zwei positive reellen Zahlen überein, sobald eine gewisse Potenz davon übereinstimmt. Damit kann man die Aussagen auf die Potenzgesetze mit ganzzahligen Exponenten zurückführen.

(1) Es ist unter Verwendung von Lemma 23.13 (4)

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} \right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} \right)^m \right)^n = \left(\sqrt[n]{b} \right)^n = b,$$

was auch herauskommt, wenn man von der rechten Seite die mn -te Potenz nimmt.

(2) Nach Lemma 23.13 (5) ist

$$\left(\sqrt[m]{a} \sqrt[m]{b} \right)^m = \left(\sqrt[m]{a} \right)^m \left(\sqrt[m]{b} \right)^m = ab,$$

was auch links herauskommt.

(3) Dies folgt aus Teil (2) mit $a = b^{-1}$.

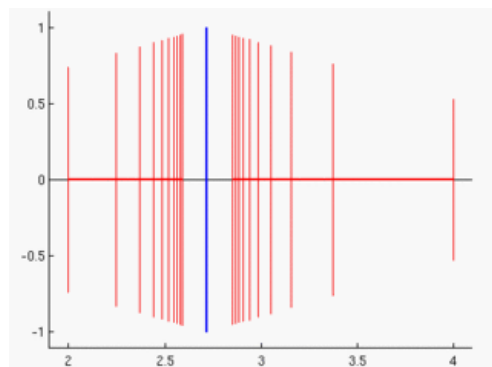
$\square$

Definition 48.10. Zu zwei nichtnegativen reellen Zahlen x und y heißt

$$\sqrt{x \cdot y}$$

das *geometrische Mittel*.

48.4. Die eulersche Zahl e .



Wir besprechen eine Beschreibung der sogenannten *eulerschen Zahl* e .

Lemma 48.11. Die Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 1$, mit den Grenzen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ und } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

definieren eine Intervallschachtelung.

Beweis. Wegen $1 + \frac{1}{n} > 1$ ist klar, dass

$$a_n < a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = b_n$$

ist, so dass also wirklich Intervalle vorliegen. Um zu zeigen, dass die Intervalle ineinander liegen, zeigen wir, dass die unteren Grenzen wachsend und die oberen Grenzen fallend sind. Wir betrachten zuerst $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Aufgrund der Bernoulli-Ungleichung gilt

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Dies schreiben wir als

$$\frac{n-1}{n} \leq \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

Daraus ergibt sich durch beidseitige Multiplikation mit $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ (es sei $n \geq 2$.) die Abschätzung

$$a_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = a_n.$$

Für die oberen Intervallgrenzen b_n ergibt die Bernoullische Ungleichung die Abschätzung

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2 - 1} \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

Daraus folgt

$$1 + \frac{1}{n} \leq \left(\frac{n^2}{n^2 - 1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Durch beidseitige Multiplikation mit $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ ergibt sich

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = b_{n-1}.$$

Wir betrachten schließlich die Intervalllängen. Diese sind

$$b_n - a_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) - a_n = a_n \frac{1}{n} \leq \frac{b_1}{n}$$

und konvergieren somit gegen 0. Also liegt insgesamt eine Intervallschachtelung vor. $\square$



Leonhard Euler (1707-1783)

Durch diese Intervallschachtelung ist aufgrund von Satz 48.2 eindeutig eine reelle Zahl bestimmt.

Definition 48.12. Die reelle Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

heißt *Eulersche Zahl*.

Ihr numerischer Wert ist

$$e = 2,718281828459\dots$$

Bemerkung 48.13. Eine wichtige alternative Möglichkeit, die eulersche Zahl festzulegen, ist

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

d.h. die Zahl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

stimmt mit der Zahl

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \dots$$

überein. Es ist nicht so einfach, die Übereinstimmung dieser beiden Definitionen zu zeigen. Die Konvergenz in der Reihenentwicklung ist deutlich schneller.

48. ARBEITSBLATT

48.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 48.1. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass jede Intervallschachtelung in K einen Punkt enthält. Zeige, dass K vollständig ist.

48.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 48.2. Die Dezimalentwicklung einer reellen Zahl beginne

$$3,601473301\dots$$

Beschreibe die zugehörige Intervallschachtelung mit Intervallen der Länge $10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}$ und entsprechenden Grenzen.

Aufgabe 48.3. Es sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung für x und $J_n = [c_n, d_n]$ eine Intervallschachtelung für y . Beschreibe eine Intervallschachtelung für $x + y$.

Aufgabe 48.4. Bestimme die ersten Intervalle I_n , $n = 1, 2, 3, 4, 5$, in der Intervallhalbierung zu $\sqrt[3]{20}$, ausgehend von $I_0 = [0, 10]$.

Aufgabe 48.5. Bestimme die ersten Intervalle I_n , $n = 1, 2, 3, 4, 5$, in der Intervallhalbierung zu $\sqrt[7]{\frac{2}{3}}$, ausgehend von $I_0 = [0, 1]$. Was besagt das Ergebnis für die Ziffernentwicklung von $\sqrt[7]{\frac{2}{3}}$ im Zweiersystem?

Im jetzigen Kontext betrachte man auch nochmal Aufgabe 28.36, Aufgabe 28.37, Aufgabe 28.38.

Aufgabe 48.6.*

Man gebe ein Beispiel für eine Folge von abgeschlossenen Intervallen ($n \in \mathbb{N}_+$)

$$I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$$

mit $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle n , wobei a_n streng wachsend und b_n streng fallend ist, wo aber keine Intervallschachtelung vorliegt.

Aufgabe 48.7.*

Man gebe ein Beispiel für eine Folge von abgeschlossenen Intervallen ($n \in \mathbb{N}_+$)

$$I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$$

derart an, dass $b_n - a_n$ eine Nullfolge ist, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} I_n$ aus einem einzigen Punkt besteht, wo aber keine Intervallschachtelung vorliegt.

Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Teilmenge $T \subseteq K$ heißt ein *Abschnitt*, wenn für alle $a, b \in T$ mit $a \leq b$ und jedes $x \in K$ mit $a \leq x \leq b$ auch $x \in T$ ist.

Aufgabe 48.8. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass jedes Intervall (einschließlich der unbeschränkten Intervalle) in K ein Abschnitt ist.

Man gebe ein Beispiel für einen Abschnitt in $\mathbb{Q}$, der kein Intervall ist.

Zeige, dass in $\mathbb{R}$ jeder Abschnitt ein Intervall ist.

Aufgabe 48.9.*

Sei K ein angeordneter Körper und sei M die Menge aller Intervallschachtelungen auf K . Wir sagen, dass zwei Intervallschachtelungen I_n , $n \in \mathbb{N}$, und J_n , $n \in \mathbb{N}$, zueinander verfeinerungsäquivalent sind, wenn folgendes gilt: Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $J_n \subseteq I_m$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $I_k \subseteq J_n$.

- (1) Zeige, dass die Verfeinerungsäquivalenz eine Äquivalenzrelation auf M ist.
- (2) Sei $K = \mathbb{R}$. Zeige, dass zwei verfeinerungsäquivalente Intervallschachtelungen die gleiche reelle Zahl definieren.
- (3) Man gebe ein Beispiel für zwei reelle Intervallschachtelungen, die nicht verfeinerungsäquivalent sind, die aber die gleiche reelle Zahl definieren.

Aufgabe 48.10. Inwiefern definiert eine rationale Zahl einen Dedekindschen Schnitt?

Aufgabe 48.11. Inwiefern definiert eine reelle Zahl einen Dedekindschen Schnitt?

Aufgabe 48.12. Man gebe für jede der vier Bedingungen, die in der Definition eines Dedekindschen Schnittes vorkommen, ein Beispiel für ein Paar (A, B) mit $A, B \subseteq \mathbb{Q}$, das drei dieser Bedingungen erfüllt, aber nicht die vierte.

Aufgabe 48.13. Definiere auf der Menge der Dedekindschen Schnitte eine Addition, die für rationale Schnitte mit der Addition auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmt. Zeige, dass diese Verknüpfung kommutativ und assoziativ ist, dass es ein neutrales Element gibt und dass jeder Dedekindsche Schnitt einen negativen Schnitt besitzt.

Aufgabe 48.14. Definiere auf der Menge der Dedekindschen Schnitte eine Multiplikation, die für rationale Schnitte mit der Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmt. Zeige, dass diese Verknüpfung kommutativ und assoziativ ist, dass es ein neutrales Element gibt und dass jeder Dedekindsche Schnitt $\neq 0$ einen inversen Schnitt besitzt.

Aufgabe 48.15. Definiere auf der Menge der Dedekindschen Schnitte eine totale Ordnung, die für rationale Schnitte mit der Größergleichrelation auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmt.

Aufgabe 48.16. Zeige, dass die Menge der Dedekindschen Schnitte ein angeordneter Körper ist.

Aufgabe 48.17. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass jeder Dedekindsche Schnitt in K ein Punktschnitt ist. Zeige, dass K vollständig ist.

Aufgabe 48.18. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und es seien r, s nichtnegative reelle Zahlen mit

$$r^n < s.$$

Zeige mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, dass es ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit

$$\left(r + \frac{1}{k}\right)^n < s$$

gibt.

Aufgabe 48.19.*

Untersuche die Folge

$$x_n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} - n$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 48.20.*

Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

Aufgabe 48.21. Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n,$$

$$y_{n+1} = \text{arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.

Aufgabe 48.22.*

Sei $b \geq 1$ eine reelle Zahl. Wir betrachten die reelle Folge

$$x_n := b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

($n \in \mathbb{N}_+$).

- (1) Zeige, dass die Folge monoton fallend ist.
- (2) Zeige, dass sämtliche Folgenglieder ≥ 1 sind.
- (3) Zeige, dass die Folge gegen 1 konvergiert ist.

Aufgabe 48.23. Berechne für die Folge

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

die ersten vier Glieder als Bruch. Man gebe jeweils einen approximierenden Dezimalbruch mit einem Fehler von maximal $\frac{1}{1000}$ an.

Aufgabe 48.24. Zeige die folgenden Abschätzungen.

- a) $\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$,
 b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Aufgabe 48.25.*

Für die Eulersche Zahl e seien die Abschätzungen

$$2,71 \leq e \leq 2,72$$

bekannt.

- (1) Was lässt sich über die ersten Stellen der Dezimalentwicklung von e^2 sagen?
- (2) Was lässt sich über die ersten Stellen der Dezimalentwicklung von e^{-1} sagen?

48.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 48.26. (3 Punkte)

Die Dezimalentwicklung einer reellen Zahl beginne

$$-7,35831149\dots$$

Beschreibe die zugehörige Intervallschachtelung mit Intervallen der Länge $10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}$ und entsprechenden Grenzen.

In der folgenden Aufgabe dürfen Sie annehmen, dass sich alles in $\mathbb{R}_+$ abspielt.

Aufgabe 48.27. (3 Punkte)

Es sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung für x und $J_n = [c_n, d_n]$ eine Intervallschachtelung für y . Beschreibe eine Intervallschachtelung für $x \cdot y$.

Aufgabe 48.28. (3 Punkte)

Eine reelle Zahl x besitze die Ziffernentwicklung

$$2,1278\dots$$

im Dezimalsystem. Was kann man über die Ziffernentwicklung von $1/x$ sagen?

Aufgabe 48.29. (4 Punkte)

Eine reelle Zahl x besitze die Ziffernentwicklung

$$0,101001000100001000001\dots$$

im Dezimalsystem, die angedeutete Regelmäßigkeit gelte für die gesamte Entwicklung. Bestimme die Ziffernentwicklung von $1/x$ bis zur vierten Nachkommastelle.

Aufgabe 48.30. (3 Punkte)

Bestimme die Ziffernentwicklung von

$$0, \bar{1} \cdot 0, \bar{1}.$$

Aufgabe 48.31. (3 Punkte)

Berechne für die Folge

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

die Glieder bis x_5 als Bruch. Man gebe jeweils einen approximierenden Dezimalbruch mit einem Fehler von maximal $\frac{1}{10000}$ an.

49. VORLESUNG - POLYNOME

Zu einem Körper K wie $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ und einer fixierten Variablen X kann man sich fragen, welche Terme man mit dieser Variablen über diesem Körper „basteln“ kann. Dazu gehören

$$5, 3X + 3, 3(X + 1), (2X - 6)(4X + 3), X \cdot (X \cdot X), \\ 5 + 3X - 6X^2 + 7X^3, X^2 - 4 + 5X^2 + 7X - 13X,$$

wobei wir Potenzschreibweise verwendet und einige Klammern weggelassen haben. Als Terme sind $3X + 3$ und $3(X + 1)$ verschieden. Bei jeder Interpretation von X in einem Ring sind diese Ausdrücke aber gleich. Der Polynomring besteht aus genau diesen Termen, wobei allerdings Terme miteinander identifiziert werden, wenn sich dies aus den Rechenregeln für einen kommutativen Ring ergibt.

49.1. Der Polynomring über einem Körper.

Definition 49.1. Der *Polynomring* über einem Körper K besteht aus allen Polynomen

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

mit $a_i \in K$, $n \in \mathbb{N}$, und mit komponentenweiser Addition und einer Multiplikation, die durch distributive Fortsetzung der Regel

$$X^n \cdot X^m := X^{n+m}$$

definiert ist.

Dabei nennt man X die *Variable* des Polynomrings. Ein Polynom $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ ist formal gesehen nichts anderes als das Tupel $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, die die *Koeffizienten* des Polynoms heißen. Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn sie in allen ihren Koeffizienten übereinstimmen. Der Körper K heißt in diesem Zusammenhang der *Grundkörper* des Polynomrings. Aufgrund der komponentenweisen Definition der Addition liegt unmittelbar eine Gruppe vor, mit dem *Nullpolynom* (bei dem alle Koeffizienten 0 sind) als neutralem Element. Die Polynome mit $a_i = 0$ für alle $i \geq 1$ heißen *konstante Polynome*, man schreibt sie einfach als a_0 .

Die für ein einfaches Tupel zunächst ungewöhnliche Schreibweise deutet in suggestiver Weise an, wie die Multiplikation aussehen soll, das Produkt $X^n \cdot X^m$ ist nämlich durch die Addition der Exponenten, also $X^n \cdot X^m := X^{n+m}$, gegeben. Für beliebige Polynome ergibt sich die Multiplikation aus dieser einfachen Multiplikationsbedingung durch distributive Fortsetzung gemäß der Vorschrift, „alles mit allem“ zu multiplizieren. Die Multiplikation ist also explizit durch folgende Regel gegeben:¹⁵

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i X^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m b_j X^j \right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^k a_r b_{k-r}.$$

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} & (4X^2 - 5X + 6)(3X^2 + 2X - 1) \\ &= 12X^4 + (4 \cdot 2 - 5 \cdot 3)X^3 + (-4 - 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3)X^2 + (5 + 6 \cdot 2)X - 6 \\ &= 12X^4 - 7X^3 + 4X^2 + 17X - 6. \end{aligned}$$

Lemma 49.2. *Der Polynomring $K[X]$ über einem Körper K ist ein kommutativer Ring.*

Beweis. Lediglich die Gültigkeit des Assoziativgesetzes für die Multiplikation und des Distributivgesetzes sind nicht unmittelbar klar. Zum Nachweis dieser Eigenschaften schreiben wir abkürzend die beteiligten Polynome als

$$\sum_i a_i X^i, \sum_j b_j X^j \text{ und } \sum_k c_k X^k.$$

¹⁵Wobei wir natürlich, wie auch bei der Addition oder dem Vergleichen von Polynomen verschiedener Grade, die Polynome für $r > n$ bzw. $k - r > m$ mit den Koeffizienten $a_r = 0$ bzw. $b_{k-r} = 0$ ergänzen können.

Mit diesen Bezeichnungen ist

$$\begin{aligned}
 & \left(\left(\sum_i a_i X^i \right) \left(\sum_j b_j X^j \right) \right) \left(\sum_k c_k X^k \right) \\
 &= \left(\sum_r \left(\sum_{i+j=r} a_i b_j \right) X^r \right) \left(\sum_k c_k X^k \right) \\
 &= \left(\sum_s \left(\sum_{i+j+k=s} a_i b_j c_k \right) X^s \right),
 \end{aligned}$$

woraus wegen der Symmetrie des Ausdrucks die Assoziativität ablesbar ist. Ferner ist

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_i a_i X^i \right) \left(\left(\sum_j b_j X^j \right) + \left(\sum_j c_j X^j \right) \right) \\
 &= \left(\sum_i a_i X^i \right) \left(\sum_j (b_j + c_j) X^j \right) \\
 &= \sum_r \left(\sum_{i+j=r} a_i (b_j + c_j) \right) X^r \\
 &= \sum_r \left(\sum_{i+j=r} a_i b_j + a_i c_j \right) X^r = \sum_r \left(\sum_{i+j=r} a_i b_j \right) X^r + \sum_r \left(\sum_{i+j=r} a_i c_j \right) X^r \\
 &= \left(\sum_i a_i X^i \right) \left(\sum_j b_j X^j \right) + \left(\sum_i a_i X^i \right) \left(\sum_j c_j X^j \right),
 \end{aligned}$$

was die Distributivität bedeutet. $\square$

Der Polynomring ist kein Körper, beispielsweise gibt es zur Variablen X kein inverses Element.

Definition 49.3. Der *Grad* eines von 0 verschiedenen Polynoms

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$

mit $a_n \neq 0$ ist n .

Das Nullpolynom bekommt keinen Grad. Der Koeffizient a_n , der zum Grad n des Polynoms gehört, heißt *Leitkoeffizient* des Polynoms. Der Ausdruck $a_n X^n$ heißt *Leitterm*. Ein Polynom mit Leitkoeffizient 1 heißt *normiert*.

Lemma 49.4. Es sei K ein Körper und $P, Q \in K[X]$ Polynome über K . Dann gelten für den Grad folgende Aussagen.

- (1) Es ist $\text{grad}(P + Q) \leq \max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\}$.
- (2) Es ist $\text{grad}(P \cdot Q) = \text{grad}(P) + \text{grad}(Q)$.

Beweis. Es seien

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

und

$$Q = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0$$

mit $a_n, b_m \neq 0$, also $n = \text{grad}(P)$ und $m = \text{grad}(Q)$. Bei $m \neq n$ ist $\max(m, n)$ der Grad der Summe, bei $m = n$ ist bei $a_n \neq -b_n$ dies auch der Grad des Summenpolynoms, im andern Fall wird der Grad kleiner (die Summe kann 0 sein, dann ist die Aussage als erfüllt zu interpretieren). Wegen Lemma 23.12 ist $a_n b_m \neq 0$ und somit ist $a_n b_m X^{n+m}$ der Leitterm des Produktpolynoms PQ , dessen Grad somit gleich $n + m$ ist. $\square$

Polynome vom Grad 0 sind die konstanten Polynome, Polynome vom Grad 1 nennt man auch lineare Polynome.

49.2. Quadratische Polynome.

Ein Polynom vom Grad zwei nennt man auch ein *quadratisches Polynom*. Wir schreiben es in der Form

$$aX^2 + bX + c \text{ mit } a \neq 0.$$

Wenn $a = 0$ ist, so fällt der vordere Term weg und es liegt ein lineares, kein quadratisches Polynom vor. Wenn $b = 0$ ist, so spricht man von einem rein-quadratischen Polynom.

Es sei ein quadratisches Polynom gegeben. Wir interessieren uns für die Frage, ob das Polynom Nullstellen¹⁶ besitzt und wie diese zu ermitteln sind. Es geht also um Lösungen einer Gleichung der Form

$$aX^2 + bX + c = 0.$$

Dabei sind a, b, c vorgegeben mit $a \neq 0$ und gesucht ist $x \in \mathbb{R}$ derart, dass wenn man die Zahl x für die Variable X einsetzt, sich der Wert 0 ergibt. Wenn $b = 0$ ist, also eine Gleichung der Form

$$aX^2 + c = 0$$

vorliegt, so geht es einfach um das ziehen einer Quadratwurzel. Die Gleichung ist ja äquivalent zu

$$X^2 = -\frac{c}{a}.$$

Wenn die Zahl rechts negativ ist, so gibt es keine Lösung. Wenn die Zahl rechts 0 ist (was bei $c = 0$ der Fall ist), so gibt es die einzige Lösung $\{0\}$. Wenn die Zahl rechts positiv ist, so gibt es zwei Lösungen, nämlich $\{\sqrt{-\frac{c}{a}}, -\sqrt{-\frac{c}{a}}\}$. In einem beliebigen Körper geht es um die Frage, ob $-\frac{c}{a}$ eine Quadratwurzel besitzt oder nicht.

Für die Gleichung

$$aX^2 + bX = 0,$$

¹⁶Dieses Konzept werden wir in der nächsten Vorlesung allgemeiner besprechen.

wo also $c = 0$ ist, kann man sofort die Lösungen angeben, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Für die allgemeine quadratische Gleichung

$$aX^2 + bX + c = 0$$

gibt es einen wichtigen Trick, sie auf eine rein-quadratische Form zurückzuführen und sie damit durch Wurzelziehen zu lösen, das sogenannte *quadratische Ergänzen*. Zunächst dividiert man durch a und erhält die äquivalente Gleichung

$$X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} = 0.$$

Das nennt man auch eine normierte Gleichung, da links ein normiertes Polynom steht. Wir schreiben diese Gleichung mit

$$p = \frac{b}{a}$$

und

$$q = \frac{c}{a}$$

als

$$X^2 + pX + q = 0.$$

Dieses Polynom schreiben wir nun scheinbar komplizierter als

$$X^2 + pX + q = \left(X + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q.$$

Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite mit Hilfe der ersten binomischen Formel sieht man, dass die Terme links und rechts übereinstimmen. Der Gewinn ist dabei, dass $X + \frac{p}{2}$ eine „verschobene Variable“ ist, die wie eine Variable behandelt werden kann, und dass $-\frac{p^2}{4} + q$ eine reelle Zahl ist. Es liegt also im Wesentlichen eine rein-quadratische Gleichung vor. Mit einer Umstellung erhält man

$$\left(X + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

und somit

$$X + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

vorausgesetzt, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen nichtnegativ ist. Als Lösung erhält man dann

$$X = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} = \frac{\pm \sqrt{p^2 - 4q} - p}{2}.$$

Satz 49.5. *Es sei*

$$aX^2 + bX + c = 0$$

*eine reelle quadratische Gleichung. Dann gilt folgendes Lösungsverhalten.*¹⁷

¹⁷Den Ausdruck $b^2 - 4ac$ nennt man auch die *Diskriminante* der quadratischen Gleichung.

(1) Bei

$$b^2 - 4ac < 0$$

gibt es keine reelle Lösung.

(2) Bei

$$b^2 - 4ac = 0$$

gibt es die eine Lösung

$$x = \frac{-b}{2a}$$

(3) Bei

$$b^2 - 4ac > 0$$

gibt es die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}.$$

Beweis. Die Lösung in (2) ist ein Spezialfall von (3), in dem die beiden Lösungen zusammenfallen. Wir zeigen explizit, dass in der Tat Lösungen vorliegen. Es ist

$$\begin{aligned} & a \left(\frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a} \right)^2 + b \left(\frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a} \right) + c \\ &= a \frac{b^2 - 4ac + \mp 2b\sqrt{b^2 - 4ac} + b^2}{4a^2} + \frac{\pm b\sqrt{b^2 - 4ac} - b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2 - 4ac + \mp 2b\sqrt{b^2 - 4ac} + b^2 \pm 2b\sqrt{b^2 - 4ac} - 2b^2 + 4ac}{4a} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da eine quadratische Gleichung nur maximal zwei Lösungen besitzt, sind wir im dritten Fall fertig.

Im Allgemeinen schreiben wir

$$\begin{aligned} aX^2 + bX + c &= a \left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(X + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(X + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right). \end{aligned}$$

Der rechte Term ist bei

$$b^2 - 4ac < 0$$

stets positiv und so hat das Polynom in diesem Fall keine Nullstelle, bei

$$b^2 - 4ac = 0$$

hat es genau die eine angegebene Nullstelle. □

Diese Lösungsformel heißt auch *Mitternachtsformel*. Wenn man zuerst durch a durchdividiert und die quadratische Gleichung in der Form

$$X^2 + pX + q = 0$$

vorliegt, so vereinfachen sich die Lösungen zu

$$x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{p^2 - 4q} - p}{2}.$$

Dazu sagt man auch *p-q-Formel*. Diese Formeln gelten in jedem Körper, in dem $2 \neq 0$ ist. Die Lösbarkeit hängt dann allein davon ab, ob die Diskriminante $b^2 - 4ac$ eine Quadratwurzel besitzt oder nicht.

Beispiel 49.6. Wir betrachten die quadratische Gleichung

$$x^2 + 4x - 3 = 0.$$

Nach Satz 49.5 sind

$$x_1 = \frac{\sqrt{16 + 12} - 4}{2} = \frac{\sqrt{28} - 4}{2} = \frac{2\sqrt{7} - 4}{2} = \sqrt{7} - 2$$

und

$$x_2 = \frac{-\sqrt{16 + 12} - 4}{2} = \frac{-\sqrt{28} - 4}{2} = \frac{-2\sqrt{7} - 4}{2} = -\sqrt{7} - 2$$

die Lösungen.

Beispiel 49.7. Bauer Ernst möchte ein neues quadratisches Beet für Melonen anlegen. Die Anlage des Beetes kostet pro Quadratmeter 20 Euro. Das Beet muss mit einem Schneckenzaun rundum versehen werden, der pro Meter 8 Euro koste. Ernst möchte 300 Euro insgesamt investieren. Wie groß wird das Beet?

Es sei x die Seitenlänge des Beetes. Die Kosten sind dann $20x^2 + 4 \cdot 8x$, was zur Gleichung

$$20x^2 + 32x = 300$$

bzw.

$$20x^2 + 32x - 300 = 0$$

führt. Nach Satz 49.5 führt dies auf

$$x = \frac{\sqrt{1024 + 24000} - 32}{40} = \frac{\sqrt{25024} - 32}{40} \sim \frac{158,19 - 32}{40} \sim 3,155.$$

Die Seitenlänge des Beetes ist also ungefähr 3,155 Meter.

Der folgende *Satz von Vieta* ermöglicht eine sinnvolle Probe für das Ergebnis. Wenn man weiß, dass es ganzzahlige Lösungen geben muss, kann man damit auch häufig die Lösungen der quadratischen Gleichung erraten.



François Viète (1540-1603)

Lemma 49.8. *Es sei eine quadratische Gleichung in der Form*

$$x^2 + px + q = 0$$

gegeben und es seien x_1 und x_2 die Lösungen. Dann gilt

$$x_1 + x_2 = -p$$

und

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 49.5 ist

$$x_1 = \frac{\sqrt{p^2 - 4q} - p}{2}$$

und

$$x_2 = \frac{-\sqrt{p^2 - 4q} - p}{2}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{\sqrt{p^2 - 4q} - p}{2} + \frac{-\sqrt{p^2 - 4q} - p}{2} \\ &= \frac{\sqrt{p^2 - 4q} - p - \sqrt{p^2 - 4q} - p}{2} \\ &= \frac{-2p}{2} \\ &= -p \end{aligned}$$

und

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\sqrt{p^2 - 4q} - p}{2} \cdot \frac{-\sqrt{p^2 - 4q} - p}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\sqrt{p^2 - 4q} - p\right) \left(-\sqrt{p^2 - 4q} - p\right)}{4} \\
&= \frac{-p^2 + 4q + p^2}{4} \\
&= \frac{4q}{4} \\
&= q.
\end{aligned}$$

□

Von dieser Aussage gilt auch die Umkehrung, siehe Aufgabe 49.25. Wenn man beispielsweise die Zusatzinformation kennt, dass

$$X^2 - 7X + 6 = 0$$

ganzzahlige Lösungen besitzt, so kommen dafür nur die Teiler von 6 in Frage, und in der Tat sind 1 und 6 die beiden Lösungen.

49. ARBEITSBLATT

49.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 49.1. Berechne das Polynom

$$(3X^2 - 5X + 4) \cdot (X^3 - 6X^2 + 1) - (4X^3 + 2X^2 - 2X + 3) \cdot (-2X^2 - 5X)$$

im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$.

49.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 49.2.*

Bestimme für das Polynom

$$P = 7X^{11} - 3X^8 + \frac{3}{2}X^6 - X + 5$$

den Grad, den Leitkoeffizienten, den Leitterm und den Koeffizienten zu X^5 .

Aufgabe 49.3. Es ist heiß. Lucy Sonnenschein möchte einen würfelförmigen Pool mit Seitenlänge x voll mit Wasser haben. Der Kubikmeter Wasser kostet 10 Euro, der Quadratmeter Kacheln für Wände und Boden kostet 100 Euro, der Überlauftrand kostet 30 Euro pro Meter und die Baugenehmigung kostet 200 Euro. Erstelle eine Kostenfunktion für den Pool in Abhängigkeit von der gewählten Seitenlänge.

Aufgabe 49.4. Berechne das Produkt

$$(X^6 + X^3 + X^2 + X + 1) \cdot (X^5 + X^4 + X^2 + 1)$$

im Polynomring $\mathbb{Z}/(2)[X]$.

Aufgabe 49.5. Berechne das Produkt

$$(2X^3 + 4X + 5) \cdot (X^4 + 5X^2 + 6)$$

im Polynomring $\mathbb{Z}/(7)[X]$.

Aufgabe 49.6. Beweise die Formel

$$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + X^{n-3} + \cdots + X^2 + X + 1).$$

Aufgabe 49.7. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich 0 sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

Aufgabe 49.8. Es sei K ein angeordneter Körper und $R = K[X]$ der Polynomring über K . Sei

$$P = \{F \in K[X] \mid \text{Der Leitkoeffizient von } F \text{ ist positiv}\}.$$

Zeige, dass P die drei folgenden Eigenschaften besitzt

- (1) Entweder ist $F \in P$ oder $-F \in P$ oder $F = 0$.
- (2) Aus $F, G \in P$ folgt $F + G \in P$.
- (3) Aus $F, G \in P$ folgt $F \cdot G \in P$.

Aufgabe 49.9. Zeige, dass eine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

über einem Körper K maximal zwei Lösungen besitzt.

Aufgabe 49.10. Löse die quadratische Gleichung $3x^2 - 6x + 2 = 0$ über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 49.11. Löse die quadratische Gleichung $4x^2 + 5x + 2 = 0$ über $\mathbb{Z}/(7)$.

Aufgabe 49.12. Löse die reelle quadratische Gleichung $7x^2 + 5x - 4 = 0$ durch quadratisches Ergänzen.

Aufgabe 49.13. Lucy Sonnenschein möchte sich ein quadratisches Grundstück kaufen. Drum rum möchte sie einen Heckenzaun pflanzen. Der Quadratmeterpreis beträgt 200 Euro, ein Meter Hecke kostet 30 Euro und die Eintragung ins Grundbuch kostet 1000 Euro. Lucy möchte eine Million Euro investieren. Welche Seitenlänge hat das Grundstück?

Aufgabe 49.14.*

Bestimme den minimalen Wert der reellen Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{4}{3}.$$

Eine Gleichung der Form

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

heißt *biquadratische Gleichung*.

Aufgabe 49.15. Löse die biquadratische Gleichung $x^4 + 7x^2 - 11 = 0$ über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 49.16.*

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$x^2 = x$$

über $\mathbb{Z}/(6)$.

Aufgabe 49.17. Eliminiere im kubischen Polynom

$$X^3 + 6X^2 - 5X - 2$$

den quadratischen Term, d.h. schreibe dieses Polynom als

$$(X + d)^3 + e(X + d) + f$$

mit geeigneten d, e, f .

Aufgabe 49.18.*

Forme die Gleichung

$$x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 = 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^4 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Aufgabe 49.19.*

Forme die Gleichung

$$x^5 + 10x^4 + x - 5 = 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^5 + b_3y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Aufgabe 49.20.*

Es sei

$$x^2 + px + q = 0$$

eine quadratische Gleichung über einem Körper K , und es sei $r \neq 0$ eine Lösung davon. Zeige, dass auch $\frac{q}{r}$ eine Lösung der Gleichung ist.

Bei den folgenden Aufgaben überlege man sich auch, was die Äquivalenzrelationen für die Graphen der Funktionen bedeuten.

Aufgabe 49.21. Es sei K ein Körper und sei

$$\text{Abb}(K, K) = \{f : K \rightarrow K \mid f \text{ Funktion}\}$$

die Menge der Abbildungen von K nach K . Wir betrachten die Relation auf $\text{Abb}(K, K)$, die durch $f \sim g$, falls es ein $d \in K$ mit

$$f = g + d$$

gibt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 49.22. Es sei K ein Körper und sei

$$\text{Abb}(K, K) = \{f : K \rightarrow K \mid f \text{ Funktion}\}$$

die Menge der Abbildungen von K nach K . Wir betrachten die Relation auf $\text{Abb}(K, K)$, die durch $f \sim g$, falls es ein $c \in K$ mit

$$f(x) = g(x + c)$$

für alle $x \in K$ gibt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 49.23. Es sei K ein Körper und sei

$$\text{Abb}(K, K) = \{f : K \rightarrow K \mid f \text{ Funktion}\}$$

die Menge der Abbildungen von K nach K . Wir betrachten die Relation auf $\text{Abb}(K, K)$, die durch $f \sim g$, falls es ein $c, d \in K$ mit

$$f(x) = g(x + c) + d$$

für alle $x \in K$ gibt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 49.24. Wir betrachten auf der Menge der quadratischen Polynome über dem Körper K die Äquivalenzrelation aus Aufgabe 49.23. Finde für jedes quadratische Polynom einen besonders einfachen Repräsentanten.

Aufgabe 49.25. Beweise die Umkehrung des Satzes von Vieta: Wenn eine normierte quadratische Gleichung

$$X^2 + pX + q = 0$$

gegeben ist und wenn $r, s \in \mathbb{R}$ Zahlen sind mit

$$r + s = -p$$

und

$$rs = q,$$

so sind r und s die Lösungen der Gleichung.

Aufgabe 49.26. Finde ganzzahlige Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

mit Hilfe des Satzes von Vieta.

Aufgabe 49.27. Finde ganzzahlige Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 101x + 100 = 0$$

mit Hilfe des Satzes von Vieta.

Aufgabe 49.28. Sei $d \in \mathbb{R}$. Finde ganzzahlige Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - (d + 1)x + d = 0$$

mit Hilfe des Satzes von Vieta.

49.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 49.29. (2 Punkte)

Berechne das Polynom

$$(3X^4 + 4X + 5) \cdot (2X^4 + 7X^3 + 10X^2 + 6X + 8) + 3X^2 \cdot (4X^2 + 5)$$

im Polynomring $\mathbb{Z}/(11)[X]$.

Aufgabe 49.30. (2 Punkte)

Löse die reelle quadratische Gleichung $\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{7}x - \frac{4}{5} = 0$ durch quadratisches Ergänzen.

Aufgabe 49.31. (1 Punkt)

Löse die quadratische Gleichung $2x^2 + 3x + 3 = 0$ über $\mathbb{Z}/(5)$.

Aufgabe 49.32. (3 Punkte)

Forme die Gleichung

$$x^3 - 7x^2 + 3x + 4 = 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^3 + b_1y + b_0 = 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Aufgabe 49.33. (1 Punkt)

Finde ganzzahlige Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 12x + 27 = 0$$

mit Hilfe des Satzes von Vieta.

Aufgabe 49.34. (8 Punkte)

Zwei Personen A und B spielen Polynome-Erraten. Dabei denkt sich A ein Polynom $P(x)$ aus, wobei alle Koeffizienten aus $\mathbb{N}$ sein müssen. Person B darf fragen, was der Wert $P(n_1), P(n_2), \dots, P(n_r)$ zu gewissen natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_r$ ist. Dabei darf B diese Zahlen beliebig wählen und dabei auch vorhergehende Antworten berücksichtigen. Ziel ist es, das Polynom zu erschließen.

Entwickle eine Fragestrategie für B , die immer zur Lösung führt und bei der die Anzahl der Fragen (unabhängig vom Polynom) beschränkt ist.

50. VORLESUNG - POLYNOMDIVISION

Durch starkes Denken kann
man ein Kamel zu Fall
bringen.

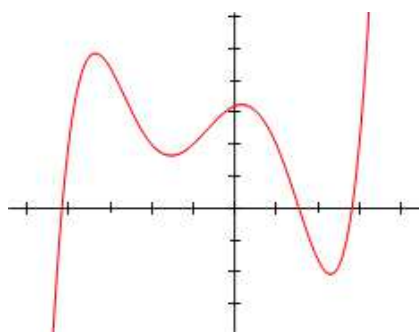
Ibn Sina

50.1. Polynomfunktionen.

In ein Polynom $P \in K[X]$ kann man ein Element $z \in K$ einsetzen, indem man die Variable X an jeder Stelle durch z ersetzt. Dies führt zu einer Abbildung

$$K \longrightarrow K, z \longmapsto P(z),$$

die die durch das Polynom definierte *Polynomfunktion* heißt.



Der Graph einer Polynomfunktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad 5.

Diese Abbildungen gehören zu den wichtigsten Funktionen. Die konstanten Polynome a_0 führen zu den konstanten Abbildungen mit dem Wert a_0 , lineare Polynome der Form $a_1X + a_0$ führen zu affin-linearen Funktionen, insbesondere entspricht die Variable der Identität. Quadratische Polynome $a_2X^2 + a_1X + a_0$ führen auf quadratische Funktionen, die Potenzen der Variablen, also X^k , führen auf die Potenzfunktionen $z \mapsto z^k$.

Lemma 50.1. *Es sei K ein Körper und $z \in K$ ein fixiertes Element. Dann ist die Abbildung*

$$K[X] \longrightarrow K,$$

die einem Polynom P die Einsetzung $P(z)$ zuordnet, ein Ringhomomorphismus. Für beliebige Polynome $P, Q \in K[X]$ gilt also

(1)

$$(P + Q)(z) = P(z) + Q(z).$$

(2)

$$(P \cdot Q)(z) = P(z) \cdot Q(z).$$

(3)

$$1(z) = 1.$$

Beweis. Es seien $P = \sum_i a_i X^i$ und $Q = \sum_j b_j X^j$.

(1) Es ist

$$P + Q = \sum_i (a_i + b_i) X^i$$

und somit ist unter Verwendung des Distributivgesetzes für K

$$\begin{aligned} (P + Q)(z) &= \left(\sum_i (a_i + b_i) X^i \right) (z) \\ &= \sum_i (a_i + b_i) z^i \\ &= \sum_i a_i z^i + \sum_i b_i z^i \\ &= \left(\sum_i a_i X^i \right) (z) + \left(\sum_i b_i X^i \right) (z) \\ &= P(z) + Q(z). \end{aligned}$$

(2) Es ist

$$P \cdot Q = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k$$

und somit ist unter Verwendung des Distributivgesetzes und der Potenzgesetze für K

$$\begin{aligned} (P \cdot Q)(z) &= \left(\sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \right) (z) \\ &= \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) z^k \\ &= \sum_{i,j} a_i \cdot b_j z^{i+j} \\ &= \left(\sum_i a_i z^i \right) \cdot \left(\sum_j b_j z^j \right) \\ &= \left(\sum_i a_i X^i \right) (z) \cdot \left(\sum_j b_j X^j \right) (z) \\ &= P(z) \cdot Q(z). \end{aligned}$$

(3) Für jedes konstante Polynom a_0 gilt $a_0(z) = a_0$, da nicht eingesetzt werden kann.

□

50.2. Die Division mit Rest für Polynome.

Definition 50.2. Es sei K ein Körper. Man sagt, dass ein Polynom $T \in K[X]$ ein Polynom $P \in K[X]$ *teilt*, wenn es ein Polynom $Q \in K[X]$ mit

$$P = TQ$$

gibt.

Wenn P von T geteilt wird, so sagt man auch, dass P ein Vielfaches von T ist. In $K[X]$ ist es, anders wie in einem Körper, aber ähnlich wie in $\mathbb{Z}$, nicht möglich, ein Element durch ein anderes Element $\neq 0$ zu teilen. Es gibt aber, wie bei $\mathbb{Z}$, einen wichtigen Ersatz dafür, die *Division mit Rest*.

Satz 50.3. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Es seien $P, T \in K[X]$ Polynome mit $T \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in K[X]$ mit

$$P = TQ + R \text{ und mit } \text{grad}(R) < \text{grad}(T) \text{ oder } R = 0.$$

Beweis. Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über den Grad von P . Wenn der Grad von T größer als der Grad von P ist, so ist $Q = 0$ und $R = P$ eine Lösung, so dass wir dies nicht weiter betrachten müssen. Bei $\text{grad}(P) = 0$ ist nach der Vorbemerkung auch $\text{grad}(TP) = 0$, also ist T ein konstantes Polynom, und damit ist (da $T \neq 0$ und K ein Körper ist) $Q = P/T$ und $R = 0$ eine Lösung. Sei nun $\text{grad}(P) = n$ und die Aussage für kleineren Grad schon bewiesen. Wir schreiben $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ und $T = b_k X^k + \dots + b_1 X + b_0$ mit $a_n, b_k \neq 0$, $k \leq n$. Dann gilt mit $H = \frac{a_n}{b_k} X^{n-k}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} P' &:= P - TH \\ &= 0X^n + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_k} b_{k-1}\right) X^{n-1} + \\ &\quad \dots + \left(a_{n-k} - \frac{a_n}{b_k} b_0\right) X^{n-k} + a_{n-k-1} X^{n-k-1} + \dots + a_0. \end{aligned}$$

Dieses Polynom P' hat einen Grad kleiner als n und darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h. es gibt Q' und R' mit

$$P' = TQ' + R' \text{ mit } \text{grad}(R') < \text{grad}(T) \text{ oder } R' = 0.$$

Daraus ergibt sich insgesamt

$$P = P' + TH = TQ' + TH + R' = T(Q' + H) + R',$$

so dass also $Q = Q' + H$ und $R = R'$ eine Lösung ist. Zur Eindeutigkeit sei $P = TQ + R = TQ' + R'$ mit den angegebenen Bedingungen. Dann ist $T(Q - Q') = R' - R$. Da die Differenz $R' - R$ einen Grad kleiner als $\text{grad}(T)$ besitzt, ist aufgrund der Gradeigenschaften diese Gleichung nur bei $R = R'$ und $Q = Q'$ lösbar. $\square$

Das Polynom T ist genau dann ein Teiler von P , wenn bei der Division mit Rest von P durch T der Rest gleich 0 ist. Der Beweis des Satzes ist konstruktiv, d.h. es wird in ihm ein Verfahren beschrieben, mit der man die Division mit Rest berechnen kann. Dazu muss man die Rechenoperationen des Grundkörpers beherrschen. Wir geben dazu drei Beispiele, zwei über den rationalen Zahlen und eines über einem endlichen Körper.

Beispiel 50.4. Wir führen die Polynomdivision

$$P = X^2 + X + 2 \text{ durch } T = X - 5$$

durch. Es wird also ein quadratisches Polynom durch ein lineares Polynom dividiert, d.h. der Quotient muss vom Grad 1 und der Rest muss vom Grad 0 sein. Im ersten Schritt überlegt man, mit welchem Term man T multiplizieren muss, damit das Produkt mit P im Leitterm übereinstimmt. Das ist offenbar X . Das Produkt ist

$$X(X - 5) = X^2 - 5X.$$

Die Differenz von P zu diesem Produkt ist

$$X^2 + X + 2 - (X^2 - 5X) = 6X + 2.$$

Mit diesem Polynom, nennen wir es P' , setzen wir die Division durch T fort. Um Übereinstimmung im Leitkoeffizienten zu erhalten, muss man T mit 6 multiplizieren, dies ergibt

$$6X - 30.$$

Die Differenz zu P' ist somit

$$6X + 2 - (6X - 30) = 32.$$

Dies ist das Restpolynom und somit ist insgesamt

$$X^2 + X + 2 = (X + 6)(X - 5) + 32.$$

Beispiel 50.5. Wir führen die Polynomdivision

$$P = 6X^3 + X + 1 \text{ durch } T = 3X^2 + 2X - 4$$

durch. Es wird also ein Polynom vom Grad 3 durch ein Polynom vom Grad 2 dividiert, d.h. dass der Quotient und auch der Rest (maximal) vom Grad 1 sind. Im ersten Schritt überlegt man, mit welchem Term man T multiplizieren muss, damit das Produkt mit P im Leitterm übereinstimmt. Das ist offenbar $2X$. Das Produkt ist

$$2X(3X^2 + 2X - 4) = 6X^3 + 4X^2 - 8X.$$

Die Differenz von P zu diesem Produkt ist

$$6X^3 + X + 1 - (6X^3 + 4X^2 - 8X) = -4X^2 + 9X + 1.$$

Mit diesem Polynom, nennen wir es P' , setzen wir die Division durch T fort. Um Übereinstimmung im Leitkoeffizienten zu erhalten, muss man T mit $-\frac{4}{3}$ multiplizieren. Dies ergibt

$$-\frac{4}{3}T = -\frac{4}{3}(3X^2 + 2X - 4) = -4X^2 - \frac{8}{3}X + \frac{16}{3}.$$

Die Differenz zu P' ist somit

$$-4X^2 + 9X + 1 - \left(-4X^2 - \frac{8}{3}X + \frac{16}{3}\right) = \frac{35}{3}X - \frac{13}{3}.$$

Dies ist das Restpolynom und somit ist insgesamt

$$6X^3 + X + 1 = (3X^2 + 2X - 4) \left(2X - \frac{4}{3}\right) + \frac{35}{3}X - \frac{13}{3}.$$

Beispiel 50.6. Wir führen im endlichen Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(7)$ die Polynomdivision

$$P = X^2 + 3X + 5 \text{ durch } T = 3X + 4$$

durch. Es wird also ein quadratisches Polynom durch ein lineares Polynom dividiert, d.h. der Quotient muss vom Grad 1 und der Rest muss vom Grad 0 sein. Im ersten Schritt überlegt man, mit welchem Term man T multiplizieren muss, damit das Produkt mit P im Leitterm übereinstimmt. Mit was muss man also 3 in $\mathbb{Z}/(7)$ multiplizieren, um 1 zu erhalten? Eine Schreibweise wie $\frac{1}{3}$ ist hier wenig hilfreich, es muss ein Element aus $\mathbb{Z}/(7)$ sein. Wegen $3 \cdot 5 = 15 = 1 \pmod{7}$ ist 5 das inverse Element, man muss also mit $5X$ multiplizieren. Das Produkt ist

$$5X(3X + 4) = X^2 + 6X.$$

Die Differenz von P zu diesem Produkt ist

$$X^2 + 3X + 5 - (X^2 + 6X) = 4X + 5.$$

Mit diesem Polynom, nennen wir es P' , setzen wir die Division durch T fort. Um Übereinstimmung im Leitkoeffizienten zu erhalten, muss man T mit 6 multiplizieren, da ja $3 \cdot 6 = 18 = 4 \pmod{7}$ ist. Dies ergibt

$$4X + 3.$$

Die Differenz zu P' ist somit

$$4X + 5 - (4X + 3) = 2.$$

Dies ist das Restpolynom und somit ist insgesamt

$$X^2 + 3X + 5 = (5X + 6)(3X + 4) + 2.$$

50.3. Nullstellen.

Unter einer Nullstelle eines Polynoms P versteht man ein $a \in K$ mit $P(a) = 0$. Ein Polynom muss keine Nullstellen besitzen, ferner hängt dies vom Grundkörper ab.

Lemma 50.7. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Dann ist a genau dann eine Nullstelle von P , wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.*

Beweis. Wenn P ein Vielfaches von $X - a$ ist, so kann man

$$P = (X - a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a) = (a - a)Q(a) = 0.$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund der Division mit Rest eine Darstellung

$$P = (X - a)Q + R,$$

wobei $R = 0$ oder aber den Grad 0 besitzt, also eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a) = R.$$

Wenn also $P(a) = 0$ ist, so muss der Rest $R = 0$ sein, und das bedeutet, dass $P = (X - a)Q$ ist. $\square$

Korollar 50.8. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Sei $P \in K[X]$ ein Polynom ($\neq 0$) vom Grad d . Dann besitzt P maximal d Nullstellen.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d . Für $d = 0, 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Sei also $d \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Sei a eine Nullstelle von P (falls P keine Nullstelle besitzt, sind wir direkt fertig), Dann ist $P = Q(X - a)$ nach Lemma 50.7 und Q hat den Grad $d - 1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d - 1$ Nullstellen. Für $b \in K$ gilt $P(b) = Q(b)(b - a)$. Dies kann nur dann 0 sein, wenn einer der Faktoren 0 ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P . $\square$

50.4. Der Interpolationssatz.

Der folgende Satz heißt *Interpolationssatz* und beschreibt die Interpolation von vorgegebenen Funktionswerten durch Polynome.

Satz 50.9. *Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \dots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \dots, b_n \in K$ gegeben. Dann gibt es ein eindeutiges Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n - 1$ derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.*

Beweis. Wir beweisen die Existenz und betrachten zuerst die Situation, wo $b_j = 0$ ist für alle $j \neq i$. Dann ist

$$(X - a_1) \cdots (X - a_{i-1})(X - a_{i+1}) \cdots (X - a_n)$$

ein Polynom vom Grad $n-1$, das an den Stellen $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ den Wert 0 hat. Das Polynom

$$\frac{b_i}{(a_i - a_1) \cdots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_n)} \\ (X - a_1) \cdots (X - a_{i-1})(X - a_{i+1}) \cdots (X - a_n)$$

hat an diesen Stellen ebenfalls eine Nullstelle, zusätzlich aber noch bei a_i den Wert b_i . Nennen wir dieses Polynom P_i . Dann ist

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

das gesuchte Polynom. An der Stelle a_i gilt ja

$$P_j(a_i) = 0$$

für $j \neq i$ und $P_i(a_i) = b_i$.

Die Eindeutigkeit folgt aus Korollar 50.8. □

Bemerkung 50.10. Wenn die Daten $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_n$ gegeben sind, so findet man das interpolierende Polynom P vom Grad $\leq n-1$, das es nach Satz 50.9 geben muss, folgendermaßen: Man macht den Ansatz

$$P = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \cdots + c_{n-2}X^{n-2} + c_{n-1}X^{n-1}$$

und versucht die unbekannten Koeffizienten $c_0, \dots, c_{n-1}$ zu bestimmen. Jeder Interpolationspunkt (a_i, b_i) führt zu einer linearen Gleichung

$$c_0 + c_1a_i + c_2a_i^2 + \cdots + c_{n-2}a_i^{n-2} + c_{n-1}a_i^{n-1} = b_i$$

über K . Das entstehende lineare Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung, die das Polynom bestimmt.

50.5. Rationale Funktionen.

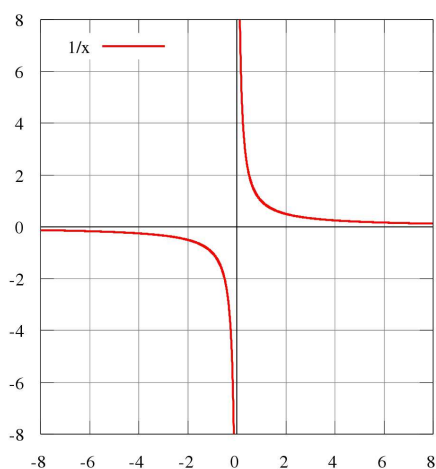
Der Polynomring $K[X]$ ist ein kommutativer Ring, aber kein Körper. Man kann aber mit Hilfe von formal-rationalen Funktionen einen Körper konstruieren, der den Polynomring enthält, ähnlich wie man aus $\mathbb{Z}$ die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruieren kann. Dazu definiert man

$$K(X) := \left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X], Q \neq 0 \right\},$$

wobei man wie bei $\mathbb{Q}$ zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ miteinander identifiziert, wenn

$$PQ' = P'Q$$

ist. Auf diese Weise entsteht der *Körper der rationalen Funktionen* (über K).



Man kann Brüche P/Q von Polynomen als Funktionen auffassen, die außerhalb der Nullstellen des Nenners definiert sind. Das Beispiel zeigt den Graphen der rationalen Funktion $1/X$.

Einen formalen Ausdruck P/Q kann man in folgender Weise wieder als eine Funktion auffassen.

Definition 50.11. Zu zwei Polynomen $P, Q \in K[X]$, $Q \neq 0$, heißt die Funktion

$$D \longrightarrow K, z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei $D \subseteq K$ das Komplement der Nullstellen von Q ist, eine *rationale Funktion*.

Die nach den Polynomfunktionen einfachsten Funktionen sind die rationalen Funktionen.

50. ARBEITSBLATT

50.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 50.1. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

50.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 50.2. Setze in das Polynom $2X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{2}{5}X + \frac{3}{4}$ die Zahl $\frac{2}{3}$ ein.

Aufgabe 50.3. Setze in das Polynom $2X^4 + X^3 - 3X^2 + X + 5$ die Zahl $\sqrt{2}$ ein.

Aufgabe 50.4. Schreibe das Polynom

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 4$$

in der neuen Variablen $U = X + 2$.

Aufgabe 50.5.*

(1) Berechne das Produkt

$$(2 - 3X + X^2) \cdot (-5 + 4X - 3X^2)$$

im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$.

(2) Berechne das Produkt

$$(2 - 3\sqrt{2} + \sqrt{2}^2) \cdot (-5 + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}^2)$$

in $\mathbb{R}$ auf zwei verschiedene Arten.

Aufgabe 50.6. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Es sei $a \in K$ ein fixiertes Element. Bestimme den Kern des Einsetzungshomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow K, X \longmapsto a.$$

Aufgabe 50.7.*

Man gebe ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ an, das nicht zu $\mathbb{Z}[X]$ gehört, aber die Eigenschaft besitzt, dass für jede ganze Zahl n gilt: $P(n) \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 50.8. Bestimme die Hintereinanderschaltungen $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ für die Abbildungen $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ und } \psi(x) = x^2 + 5x - 3$$

definiert sind.

Aufgabe 50.9. Bestimme die Hintereinanderschaltungen $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ für die Abbildungen $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

Aufgabe 50.10. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung (also das Einsetzen eines Polynoms in ein weiteres) von zwei Polynomen wieder ein Polynom ist.

Aufgabe 50.11.*

Es seien

$$f, g, h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen.

a) Zeige die Gleichheit

$$(h \cdot g) \circ f = (h \circ f) \cdot (g \circ f).$$

b) Zeige durch ein Beispiel, dass die Gleichheit

$$(h \circ g) \cdot f = (h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

nicht gelten muss.

Aufgabe 50.12. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$ eine Polynomfunktion. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x . Zeige durch Induktion über d , dass dann auch die durch

$$y_n := P(x_n)$$

definierte Folge konvergiert, und zwar gegen $P(x)$.

Aufgabe 50.13. a) Für welche reellen Polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ ist die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0, +), x \longmapsto P(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus?

b) Für welche reellen Polynome $Q \in \mathbb{R}[X]$ ist allenfalls 0 eine Nullstelle und die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}^\times, 1, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^\times, 1, \cdot), x \longmapsto Q(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus?

Aufgabe 50.14. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Aufgabe 50.15.*

Führe in $\mathbb{Z}/(5)[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = X^3 + 4X^2 + 3X + 4$ und $T = 3X^2 + 2X + 1$ durch.

Aufgabe 50.16. Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ folgende Polynomdivision aus.

$$X^4 + 5X^2 + 3 \text{ durch } 2X^2 + X + 6.$$

Aufgabe 50.17. Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = 5X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 3X + 6$ und $T = 3X^2 + 6X + 4$ durch.

Aufgabe 50.18. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und seien $P, T \in K[X]$ Polynome. Zeige, dass es für die Division mit Rest „ P durch T “ unerheblich ist, ob man sie in $K[X]$ oder in $L[X]$ durchführt.

Aufgabe 50.19. Vergleiche die Division mit Rest in $\mathbb{Z}$ und in $K[X]$ (K ein Körper).

Aufgabe 50.20.*

Zeige, dass

$$z = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}}$$

eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 3X + 2$$

ist.

Aufgabe 50.21.*

Es sei

$$P = X^3 + bX^2 + cX + d$$

ein normiertes Polynom über einem Körper K . Es seien u, v, w drei (verschiedene) Zahlen aus K . Zeige, dass diese drei Zahlen genau dann Nullstellen von P sind, wenn sie das Gleichungssystem

$$uvw = -d,$$

$$uv + uw + vw = c,$$

$$u + v + w = -b,$$

erfüllen.

Aufgabe 50.22.*

Bestimme die x -Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der beiden reellen Polynome

$$P = X^3 + 4X^2 - 7X + 1$$

und

$$Q = X^3 - 2X^2 + 5X + 3.$$

Aufgabe 50.23. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \dots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 50.24.*

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und sei $P \in K[X]$ ein Polynom, das eine Zerlegung in Linearfaktoren besitze. Es sei T ein Teiler von P . Zeige, dass T ebenfalls eine Zerlegung in Linearfaktoren besitzt, wobei die Vielfachheit eines Linearfaktors $X - a$ in T durch seine Vielfachheit in P beschränkt ist.

Aufgabe 50.25.*

Es seien P und Q verschiedene normierte Polynome vom Grad d über einem Körper K . Wie viele Schnittpunkte besitzen die beiden Graphen maximal?

Aufgabe 50.26.*

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 2, f(1) = 0, f(3) = 5.$$

Aufgabe 50.27. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 0, f(-1) = 1.$$

Aufgabe 50.28.*

(1) Bestimme ein Polynom P vom Grad ≤ 3 mit

$$P(-1) = -4,$$

$$P(0) = 2,$$

$$P(1) = 2$$

und

$$P(2) = 3$$

- (2) Bestimme ein normiertes Polynom Q vom Grad 3 mit

$$Q(0) = 1,$$

$$Q(2) = 3$$

und

$$Q(3) = 10.$$

- (3) Bestimme die Schnittpunkte der Graphen zu P und zu Q .

Aufgabe 50.29. Es sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K . Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X], Q \neq 0 \right\},$$

wobei zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ genau dann als gleich gelten, wenn $PQ' = P'Q$ ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Den in der vorstehenden Aufgabe eingeführten Körper nennt man den *Körper der rationalen Funktionen*.

Aufgabe 50.30. Es sei K ein angeordneter Körper, $K[X]$ der Polynomring und

$$Q = K(X)$$

der Körper der rationalen Funktionen über K . Zeige unter Verwendung von Aufgabe 49.8, dass man Q zu einem angeordneten Körper machen kann, der *nicht* archimedisch angeordnet ist.

Aufgabe 50.31. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

Aufgabe 50.32. Berechne die Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} \text{ und } g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}.$$

Aufgabe 50.33. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und seien $P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$ und $Q(x) = \sum_{i=0}^e b_i x^i$ Polynome mit $a_d, b_e \neq 0$. Man bestimme in Abhängigkeit von d und e , ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für n hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

50.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 50.34. (3 (1+2) Punkte)

- (1) Berechne das Produkt

$$\left(1 - \frac{5}{3}X + \frac{1}{2}X^2\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{3}X^2 - X^3\right)$$

im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$.

- (2) Berechne das Produkt

$$\left(1 - \frac{5}{3}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5}^2\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{3}\sqrt{5}^2 - \sqrt{5}^3\right)$$

in $\mathbb{R}$ auf zwei verschiedene Arten.

Aufgabe 50.35. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = 5X^4 - 6X^3 + \frac{3}{5}X^2 - \frac{1}{2}X + 5$ und $T = \frac{1}{7}X^2 + \frac{3}{7}X - 1$ durch.

Aufgabe 50.36. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = 6X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 5$ und $T = 5X^2 + 3X + 2$ durch.

Aufgabe 50.37. (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X + 1) (X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \dots + X^2 - X + 1)$$

für u ungerade.

Aufgabe 50.38. (4 Punkte)

Man finde ein Polynom f vom Grad ≤ 3 , für welches

$$f(0) = -1, f(-1) = -3, f(1) = 7, f(2) = 21$$

gilt.

51. VORLESUNG - STETIGKEIT

Umwege erhöhen die
Ortskenntnis

51.1. Stetige Funktionen.

Den Abstand zwischen zwei reellen Zahlen x und x' bezeichnen wir mit

$$d(x, x') := |x - x'|.$$

Bei einer Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

kann man sich fragen, inwiefern der Abstand in der Wertemenge durch den Abstand in der Definitionsmenge kontrollierbar ist. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $y = f(x)$ der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte x' , die „nahe“ an x sind, auch die Bildpunkte $f(x')$ „nahe“ an $f(x)$ sind. Schon lineare Funktionen mit unterschiedlicher Steigung zeigen, dass die „Nähe“ im Bildbereich nicht mit der „Nähe“ im Definitionsbereich direkt verglichen werden kann. Die Zielsetzung ist vielmehr, dass zu einer gewünschten Genauigkeit im Bildbereich überhaupt eine Ausgangsgenauigkeit gefunden werden kann, die sichert, dass die Funktionswerte innerhalb der gewünschten Genauigkeit beieinander liegen.

Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dieses ϵ repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit“. Die Frage ist dann, ob man ein $\delta > 0$ finden kann (eine „Startgenauigkeit“) mit der Eigenschaft, dass für alle x' mit $d(x, x') \leq \delta$ die Beziehung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Funktion.

Definition 51.1. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge,

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $x \in D$. Man sagt, dass f *stetig* im Punkt x ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle x' mit $|x - x'| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$ gilt. Man sagt, dass f *stetig* ist, wenn sie in jedem Punkt $x \in D$ stetig ist.

Bei D sollte man an den Definitionsbereich der Funktion denken. Typische Situationen sind, dass D ganz $\mathbb{R}$ ist, oder ein reelles Intervall, oder $\mathbb{R}$ ohne endlich viele Punkte und Ähnliches. Statt mit den nichtnegativen reellen Zahlen ϵ und δ kann man genauso gut mit Stammbrüchen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ oder mit inversen Zehnerpotenzen $\frac{1}{10^n}$ und $\frac{1}{10^m}$ arbeiten.

Beispiel 51.2. Eine konstante Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto c,$$

ist stetig. Zu jedem vorgegebenen ϵ kann man hier ein beliebiges δ wählen, da ja ohnehin

$$d(f(x), f(x')) = d(c, c) = 0 \leq \epsilon$$

gilt.

Eine lineare Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto cx,$$

mit einem Proportionalitätsfaktor $c \neq 0$ (bei $c = 0$ ist die Funktion konstant und somit auch stetig) ist ebenfalls stetig. Zu jedem vorgegebenen ϵ kann man unabhängig vom Punkt x hier $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ wählen: Wenn nämlich

$$d(x, x') \leq \delta = \frac{\epsilon}{c}$$

gilt, so ist

$$d(f(x), f(x')) = d(cx, cx') = cd(x, x') \leq c \cdot \delta = c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon.$$

Beispiel 51.3. Wir zeigen, dass das Quadrieren

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2,$$

an der Stelle 7 stetig ist. Sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben, das wir als $\epsilon \leq 1$ annehmen dürfen. Wir müssen ein $\delta > 0$ finden, das die Eigenschaft besitzt: Wenn

$$|x - 7| \leq \delta,$$

dann ist auch

$$|x^2 - 7^2| \leq \epsilon,$$

also wenn x und 7 δ -nahe beieinander sind, so sind die beiden Funktionswerte ϵ -nahe beieinander. Wenn man zu 7 eine Zahl δ hinzuaddiert, so ist der Funktionswert gleich

$$(7 + \delta)^2 = 7^2 + 14\delta + \delta^2,$$

und die Differenz zu 7^2 ist somit $14\delta + \delta^2$. Insbesondere muss diese Differenz kleinergleich dem vorgegebenen ϵ werden. Dies wird erreicht, wenn die beiden Summanden 14δ und δ^2 beide kleinergleich $\epsilon/2$ sind. Dies legt die Wahl

$$\delta := \frac{\epsilon}{28}$$

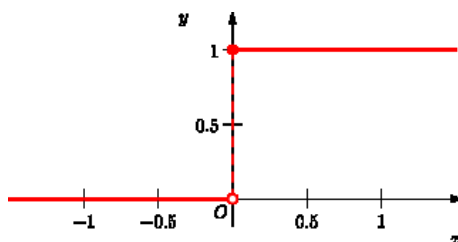
nahe. Es gelten dann in der Tat für

$$|x - 7| \leq \delta$$

die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |x^2 - 7^2| &= |x - 7| \cdot |x + 7| \\ &\leq \delta (14 + \delta) \\ &= 14\delta + \delta^2 \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Das vorhergehende Beispiel zeigt schon, dass im Allgemeinen das Auffinden eines geeigneten δ zu einem gegebenen ϵ recht mühsam sein kann. Wir werden aber gleich wichtige Sätze kennenlernen, mit denen man die Stetigkeit einer Vielzahl an wichtigen Funktionen sofort erhält.



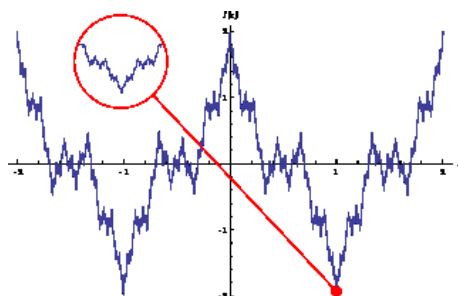
Beispiel 51.4. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ 1, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist im Nullpunkt 0 nicht stetig. Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ und jedes beliebige positive δ gibt es nämlich negative Zahlen x' mit $d(0, x') = |x'| \leq \delta$. Für diese ist aber $d(f(0), f(x')) = d(1, 0) = 1 \not\leq \frac{1}{2}$.



Nicht jede stetige Funktion kann man zeichnen, auch nicht nach beliebiger Vergrößerung. Gezeigt wird eine Approximation einer Weierstraß-Funktion, die stetig, aber nirgendwo differenzierbar ist. Bei einer stetigen Funktion kann man zwar die Größe der Schwankungen im Bildbereich durch Einschränkungen im Definitionsbereich kontrollieren, die Anzahl der Schwankungen (die Anzahl der Richtungswechsel des Graphen) kann man aber nicht kontrollieren.

Die folgende Aussage bringt die Stetigkeit mit konvergenten Folgen in Verbindung.

Lemma 51.5. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge,

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $x \in D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) f ist stetig im Punkt x .
- (2) Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.

Beweis. Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D , die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen (1) gibt es ein $\delta > 0$ mit der angegebenen Abschätzungseigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$d(x_n, x) \leq \delta$$

gilt. Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert. Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in D$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}_+$. D.h. für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es ein $x_n \in D$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x , aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2). $\square$

Lemma 51.6. *Es sei*

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Die Funktion f ist durch ihre Werte auf $\mathbb{Q}$ eindeutig festgelegt.
- (2) Der Funktionswert $f(a)$ ist durch die Funktionswerte $f(x)$, $x \neq a$, festgelegt.
- (3) Wenn für alle $x < a$ die Abschätzung

$$f(x) \leq c$$

gilt, so gilt auch

$$f(a) \leq c.$$

Beweis. (1) Nach Korollar 28.10 gibt es für jede reelle Zahl x eine Folge x_n von rationalen Zahlen (sogar von Dezimalbrüchen), die gegen x konvergiert. Wegen der Stetigkeit und Lemma 51.5 ist dann

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

(2) Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist

$$x_n = a - \frac{1}{n} < a.$$

Da die Folge der Stammbrüche eine Nullfolge ist, konvergiert diese Folge gegen a . Wegen der Stetigkeit und Lemma 51.5 ist wieder

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

(3) Dies folgt aus Teil (2) und Lemma 44.14. □

Die letzte Aussage gilt nicht, wenn man $\leq$ durch $<$ ersetzt.

51.2. Rechenregeln für stetige Funktionen.

Lemma 51.7. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und*

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$g: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) *Wenn f in $x \in D$ und g in $f(x)$ stetig sind, so ist auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ in x stetig.*
- (2) *Wenn f und g stetig sind, so ist auch $g \circ f$ stetig.*

Beweis. Die Aussage (1) ergibt sich direkt aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit. Daraus folgt auch (2). □

Satz 51.8. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien*

$$f, g: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g: D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g: D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) - g(x),$$

$$f \cdot g: D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) \cdot g(x),$$

stetig. Für eine Teilmenge $U \subseteq D$, auf der g keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion

$$f/g: U \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)/g(x),$$

stetig.

Beweis. Dies ergibt sich aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit und Lemma 44.11. $\square$

Korollar 51.9. *Polynomfunktionen*

$$P: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto P(x),$$

sind stetig.

Beweis. Aufgrund von Beispiel 51.2 und Satz 51.8 sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^n,$$

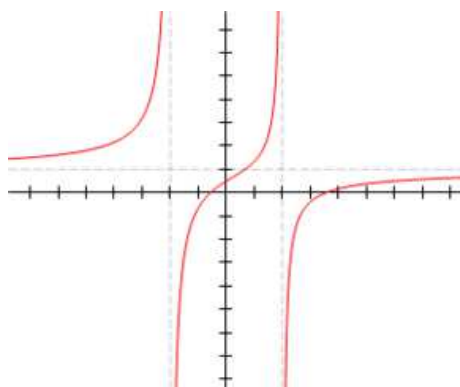
stetig. Daher sind auch für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto ax^n,$$

stetig und wiederum aufgrund von Satz 51.8 sind auch alle Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

stetig. $\square$



Eine rationale Funktion ist auf ihrer Definitionsmenge stetig.

Korollar 51.10. *Es seien $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ zwei Polynome und es sei $U := \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Dann ist die rationale Funktion*

$$U \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)},$$

stetig.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 51.9 und Satz 51.8. $\square$

51. ARBEITSBLATT

51.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 51.1. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (1) Negiere (durch Umwandlung der Quantoren) die Eigenschaft, dass f im Punkt x stetig ist.
- (2) Negiere die Eigenschaft, dass f stetig ist.

51.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 51.2. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) f ist stetig in a .
- (2) Zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}_+$ derart, dass aus

$$|x - a| \leq \frac{1}{m}$$

die Abschätzung

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{1}{n}$$

folgt.

- (3) Zu jedem $s \in \mathbb{N}$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ derart, dass aus

$$|x - a| \leq \frac{1}{10^r}$$

die Abschätzung

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{1}{10^s}$$

folgt.

Aufgabe 51.3. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto |x|,$$

stetig ist.

Aufgabe 51.4. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto \sqrt{x},$$

stetig ist.

Aufgabe 51.5. Bauer Ernst möchte ein quadratisches Melonenfeld anlegen. Das Feld sollte 100 Quadratmeter groß sein, er findet aber jede Größe zwischen 99 und 101 Quadratmetern noch akzeptabel. Welcher Fehler ist ungefähr für die Seitenlänge erlaubt, damit das entstehende Quadrat innerhalb der vorgegebenen Toleranz liegt?



Aufgabe 51.6.*

Es sei

$$f(x) = 2x^3 - 4x + 5.$$

Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Beziehung gilt: Wenn

$$|x - 3| \leq \frac{1}{800},$$

dann ist

$$|f(x) - f(3)| \leq \frac{1}{10}.$$

Aufgabe 51.7. Bestimme für die Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 6$$

im Punkt $a = 1$ für $\epsilon = \frac{1}{10}$ ein explizites $\delta > 0$ derart, dass aus

$$d(x, a) \leq \delta$$

die Abschätzung

$$d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$$

folgt.

Aufgabe 51.8. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in T$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ für alle $y \in T$ aus einem nichtleeren offenen Intervall $]x - \delta, x + \delta[$ gilt.

Aufgabe 51.9. Es seien $a < b < c$ reelle Zahlen und es seien

$$g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h: [b, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $g(b) = h(b)$. Zeige, dass dann die Funktion

$$f: [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(t) = g(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } f(t) = h(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 51.10. Zeige, dass es eine stetige Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass f auf jedem Intervall der Form $[0, \delta]$ mit $\delta > 0$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt.

Ist eine solche Funktion „zeichenbar“? Siehe auch Aufgabe 54.26.

Aufgabe 51.11. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Teilmenge und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f stetig ist.

Aufgabe 51.12.*

Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

nur im Nullpunkt stetig ist.

Aufgabe 51.13. Berechne den Grenzwert der Folge

$$x_n = 5 \left(\frac{2n+1}{n} \right)^3 - 4 \left(\frac{2n+1}{n} \right)^2 + 2 \left(\frac{2n+1}{n} \right) - 3$$

für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 51.14. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt{\frac{7n^2 - 4}{3n^2 - 5n + 2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 51.15. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $x_0 = 1$ und

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$$

definiert. Zeige, dass diese Folge konvergiert und berechne den Grenzwert.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 47.41 hilfreich.

Aufgabe 51.16. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine dichte Teilmenge. Zeige, dass eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Werte auf T eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 51.17. Beweise direkt die Rechenregeln aus Satz 51.8 (ohne Bezug auf das Folgenkriterium).

Aufgabe 51.18. Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{2x^7 - 3x|6x^3 - 11|}{|3x - 5| + |4x^3 - 5x + 1|},$$

stetig ist.

Aufgabe 51.19.*

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und seien

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit

$$f(a) > g(a).$$

Zeige, dass es ein $\delta > 0$ derart gibt, dass

$$f(x) > g(x)$$

für alle $x \in [a - \delta, a + \delta]$ gilt.

Aufgabe 51.20.*

Wir betrachten auf der Menge C aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ die folgende Relation: Es ist $f \sim g$, falls es eine nullstellenfreie stetige Funktion $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f = g \cdot \alpha$$

gibt.

- (1) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
- (2) Zeige, dass aus $f \sim g$ folgt, dass die Nullstellenmenge von f und von g übereinstimmen.

(3) Zeige, dass die beiden Funktionen

$$f(x) = x$$

und

$$g(x) = x^2$$

nicht zueinander äquivalent sind.

51.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 51.21. (3 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

im Punkt $a = 3$ für $\epsilon = \frac{1}{100}$ ein explizites $\delta > 0$ derart, dass aus

$$d(x, a) \leq \delta$$

die Abschätzung

$$d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$$

folgt.

Aufgabe 51.22. (4 Punkte)

Bestimme, für welche Punkte $x \in \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq -1, \\ x^2 & \text{für } -1 < x < 2, \\ -2x + 7 & \text{für } x \geq 2, \end{cases}$$

definierte Funktion stetig ist.

Aufgabe 51.23. (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 51.24. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$b_n = 2a_n^4 - 6a_n^3 + a_n^2 - 5a_n + 3,$$

definierten Folge, wobei

$$a_n = \frac{3n^3 - 5n^2 + 7}{4n^3 + 2n - 1}$$

ist.

Aufgabe 51.25. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

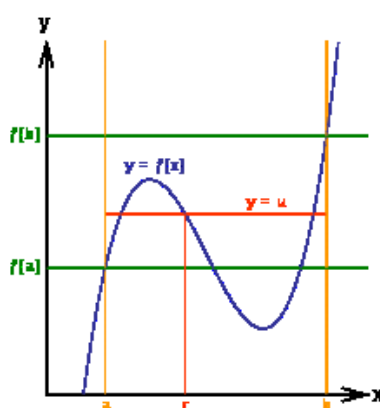
$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

52. VORLESUNG - ZWISCHENWERTSATZ

52.1. Der Zwischenwertsatz.

Eine weit verbreitete, aber (ziemlich) falsche Vorstellung besagt, dass stetige Funktionen diejenigen sind, deren Graphen man mit dem Stift ohne abzusetzen zeichnen kann. Eine allerdings richtige Schlussfolgerung aus dieser Vorstellung ist, dass wenn eine stetige Funktion sowohl negative als auch positive Werte annimmt, sie dann auch die x -Achse irgendwo durchstoßen muss und dass es daher eine Nullstelle geben muss. Dies ist der Inhalt des Zwischenwertsatzes.



Satz 52.1. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $u \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = u$.

Beweis. Wir beschränken uns auf die Situation $f(a) \leq u \leq f(b)$ und zeigen die Existenz von einem solchen c mit Hilfe einer Intervallhalbierung. Dazu setzt man $a_0 := a$ und $b_0 := b$, betrachtet die Intervallmitte $c_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$ und berechnet

$$f(c_0).$$

Bei $f(c_0) \leq u$ setzt man

$$a_1 := c_0 \text{ und } b_1 := b_0$$

und bei $f(c_0) < u$ setzt man

$$a_1 := a_0 \text{ und } b_1 := c_0.$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung $f(a_1) \leq u \leq f(b_1)$ erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Sei c die durch diese Intervallschachtelung definierte reelle Zahl. Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq u$ und das überträgt sich wegen der Stetigkeit nach dem Folgenkriterium auf den Grenzwert c , also $f(c) \leq u$. Für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq u$ und das überträgt sich ebenfalls auf c , also $f(c) \geq u$. Also ist $f(c) = u$. $\square$

Die in diesem Beweis beschriebene Methode ist konstruktiv und kann zu einem expliziten Verfahren ausgebaut werden.

Korollar 52.2. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ und mit $f(x) = 0$, d.h. f besitzt eine Nullstelle zwischen a und b .

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 52.1. $\square$

Verfahren 52.3. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Dann besitzt die Funktion aufgrund des Zwischenwertsatzes eine Nullstelle in diesem Intervall. Diese kann man wie im Beweis des Zwischenwertsatzes beschrieben durch eine *Intervallhalbierung* finden. Dazu setzt man $a_0 = a$ und $b_0 = b$ und betrachtet die Intervallmitte $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Man berechnet

$$f(x_0).$$

Bei $f(x_0) \leq 0$ setzt man

$$a_1 := x_0 \text{ und } b_1 := b_0$$

und bei $f(x_0) > 0$ setzt man

$$a_1 := a_0 \text{ und } b_1 := x_0.$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer

Intervallschachtelung. Die durch die Intervallschachtelung definierte reelle Zahl x ist eine Nullstelle der Funktion.

Beispiel 52.4. Wir wollen eine Nullstelle des Polynoms

$$f(x) = x^3 - 4x + 2$$

mit Hilfe von Verfahren 52.3 approximieren. Es ist $f(1) = -1$ und $f(2) = 2$, es muss also nach Korollar 52.2 eine Nullstelle im Intervall $[1, 2]$ geben. Wir berechnen den Funktionswert an der Intervallmitte $\frac{3}{2}$ und erhalten

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - 4 \cdot \frac{3}{2} + 2 = \frac{27 - 48 + 16}{8} = \frac{-5}{8} < 0.$$

Wir müssen also mit dem rechten Teilintervall $[\frac{3}{2}, 2]$ weitermachen. Dessen Intervallmitte ist $\frac{7}{4}$. Der Funktionswert an dieser Stelle ist

$$f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^3 - 4 \cdot \frac{7}{4} + 2 = \frac{343}{64} - 5 = \frac{343 - 320}{64} = \frac{23}{64} > 0.$$

Jetzt müssen wir mit dem linken Teilintervall $[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}]$ weitermachen, dessen Mitte ist $\frac{13}{8}$. Der Funktionswert an dieser Stelle ist

$$\begin{aligned} f\left(\frac{13}{8}\right) &= \left(\frac{13}{8}\right)^3 - 4 \cdot \frac{13}{8} + 2 \\ &= \frac{2197}{512} - \frac{13}{2} + 2 \\ &= \frac{2197 - 3328 + 1024}{512} \\ &= \frac{-107}{512} < 0. \end{aligned}$$

Somit wissen wir, dass es eine Nullstelle zwischen $\frac{13}{8}$ und $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$ gibt.

Mit der im Beweis des Zwischenwertsatzes verwendeten Intervallhalbierungsmethode kann man insbesondere auch Quadratwurzeln „ausrechnen“, also Folgen angeben, die gegen die Quadratwurzel konvergieren. Die Konvergenzgeschwindigkeit beim babylonischen Wurzelziehen ist aber deutlich höher.

Bemerkung 52.5. Mit dem Zwischenwertsatz erhält man einen neuen Beweis für die Existenz von beliebigen Wurzeln aus nichtnegativen reellen Zahlen. Sei $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Man betrachtet die Funktion

$$f(x) = x^k - c,$$

die nach Korollar 51.9 stetig ist. Es ist

$$f(0) = -c \leq 0$$

und für x_0 hinreichend groß (beispielsweise für $x_0 = \max(c, 1)$) ist

$$f(x_0) \geq 0.$$

Somit gibt es ein $x \in [0, x_0]$ mit

$$f(x) = 0,$$

also

$$x^k = c.$$

Beispiel 52.6. Ein regelmäßiger quadratischer Tisch mit vier Beinen A, B, C, D steht auf einem unebenen, aber stufenfreien Untergrund. Im Moment steht er auf den Beinen A, B, C und das Bein D ragt in die Höhe. Wir behaupten, dass man den Tisch durch eine (maximal Viertel)-Drehung um die eigene Achse (sagen wir gegen den Uhrzeigersinn) in eine Position bringen kann, wo er auf allen vier Beinen steht (wobei der Tisch nicht unbedingt genau horizontal stehen muss). Dazu betrachten wir die Funktion, die einem Drehwinkel (zwischen 0 und 90 Grad) die Höhe des Beines D über dem Grund zuordnet, wenn die drei übrigen Beine auf dem Boden stehen (würden). Dabei kann diese Höhe auch negativ werden (was sich bei einem sandigen Untergrund praktisch realisieren lässt; sonst denke man sich dies „virtuell“). Bei 0 Grad ist die Höhe positiv. Bei 90 Grad erhält man eine Situation, die symmetrisch zur Ausgangsposition ist. Wenn die Beine D, A, B auf dem Grund stehen, ragt C in die Höhe. Wenn also A, B, C auf dem Boden sein sollen, muss die Höhe von D negativ sein. Die Funktion hat also auf dem Intervall sowohl positive als auch negative Werte. Da sie wegen der Stufenfreiheit stetig ist, besitzt sie nach dem Zwischenwertsatz auch eine Nullstelle.

Beispiel 52.7. Die Abbildung

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, x \longmapsto x^2 - 2,$$

ist stetig, sie genügt aber nicht dem Zwischenwertsatz. Für $x = 0$ ist $f(0) = -2 < 0$ und für $x = 2$ ist $f(2) = 2 > 0$, es gibt aber kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$, da dafür $x^2 = 2$ sein muss, wofür es in $\mathbb{Q}$ keine Lösung gibt. Der Zwischenwertsatz funktioniert also nur für reelle Zahlen.

Bemerkung 52.8. Unter den reellen Zahlen sind manche von den ganzen oder rationalen Zahlen her besser erfassbar als andere. Die rationalen Zahlen sind als Brüche mit ganzen Zahlen als Zähler und Nenner erfassbar, und man kann sie als Lösungen von Gleichungen der Form $bx = a$ mit ganzzahligen Koeffizienten auffassen. Die Quadratwurzel $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl, die aber die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt, welche über den ganzen Zahlen formulierbar ist. Dies gilt für alle Zahlen der Form $\sqrt[k]{n}$ mit $k, n \in \mathbb{N}_+$, sie lösen die Gleichung $x^k = n$ bzw. sie sind eine Nullstelle des ganzzahligen Polynoms $x^k - n$. Auch Wurzeln aus rationalen Zahlen kann man als eine Nullstelle eines ganzzahligen (wo alle Koeffizienten zu $\mathbb{Z}$ gehören) Polynoms ansehen. Es ist nämlich $\sqrt[k]{\frac{a}{b}}$ eine Nullstelle von $bx^k - a$. Man kann nun die Teilmenge der reellen Zahlen

$$\mathbb{A}_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{Es gibt ein ganzzahliges Polynom } P \text{ mit } P(x) = 0\}$$

betrachten. Dazu gehören alle Wurzeln aus rationalen Zahlen, aber noch viele weitere Zahlen darüber hinaus. Sobald ein ganzzahliges Polynom sowohl negative als auch positive Werte annimmt, gibt es nach dem Zwischenwertsatz auch eine Nullstelle und diese gehört nach Definition zu $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$. Beispielsweise gehört die in Beispiel 52.4 approximierte Nullstelle (zwischen 1 und 2) von $x^3 - 4x + 2$ zu dieser Menge. Da diese Zahlen durch ganzzahlige Polynome erfassbar sind, spricht man von *reell-algebraischen Zahlen*. Diese Zahlen bilden sogar einen Körper, den Körper der reell-algebraischen Zahlen, was keineswegs selbstverständlich ist. Beispielsweise bilden die Quadratwurzeln keinen Körper, es ist $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ keine Quadratwurzel einer natürlichen Zahl, wohl aber eine reell-algebraische Zahl. Aufgrund von schwierigen Sätzen sind die Eulersche Zahl e und die Kreiszahl π nicht algebraisch, man spricht von *transzendenten Zahlen*.

Korollar 52.9. *Es sei I ein reelles Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch das Bild $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Sei $J = f(I)$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt sofort, dass wenn $y, z \in J$ sind und $u \in \mathbb{R}$ mit $y \leq u \leq z$ gegeben ist, auch $u \in J$ sein muss. Nach Aufgabe 48.6 ist J ein Intervall. $\square$

52.2. Stetige bijektive Funktionen und ihre Umkehrfunktion.

Für eine bijektive stetige Funktion auf einem reellen Intervall ist die Umkehrabbildung wieder stetig. Dies ist keineswegs selbstverständlich.

Satz 52.10. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, streng wachsende Funktion. Dann ist das Bild

$$J := f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$$

ebenfalls ein Intervall, und die Umkehrabbildung

$$f^{-1}: J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls stetig.

Beweis. Dass das Bild wieder ein Intervall ist folgt aus Korollar 52.9. Die Funktion f ist injektiv, da sie streng wachsend ist und damit ist die Abbildung

$$f: I \longrightarrow J$$

auf das Bild bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls streng wachsend. Sei $g := f^{-1}$ und $y := f(x)$ vorgegeben. Es sei zunächst y kein Randpunkt von J . Dann ist auch x kein Randpunkt

von I . Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben und ohne Einschränkung $[x - \epsilon, x + \epsilon] \subseteq I$ angenommen. Dann ist

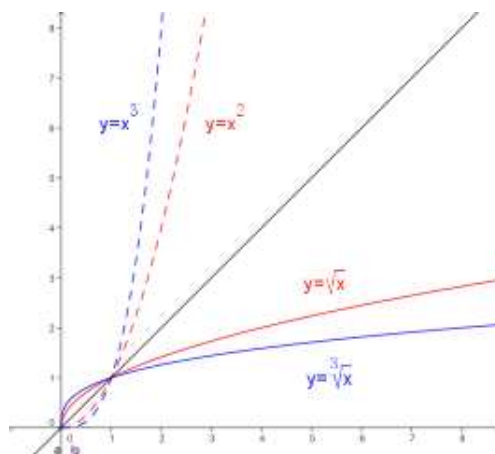
$$\delta := \min(y - f(x - \epsilon), f(x + \epsilon) - y) > 0$$

und für $y' \in [y - \delta, y + \delta]$ gilt wegen der Monotonie

$$g(y') \in [g(y - \delta), g(y + \delta)] \subseteq [x - \epsilon, x + \epsilon].$$

Also ist g stetig in y . Wenn y ein Randpunkt von J ist, so ist auch x ein Randpunkt von I , sagen wir der rechte Randpunkt. Dann ist zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ wieder $[x - \epsilon, x] \subseteq I$ und $\delta := y - f(x - \epsilon)$ erfüllt die geforderte Eigenschaft. $\square$

52.3. Stetigkeit der Wurzeln.



Satz 52.11. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Für n ungerade ist die Potenzfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^n,$$

stetig, streng wachsend, bijektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig. Für n gerade ist die Potenzfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto x^n,$$

stetig, streng wachsend, bijektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig.

Beweis. Die Stetigkeit ergibt sich aus Korollar 51.9. Das Wachstumsverhalten wurde für die Potenzfunktionen in Lemma 25.18 bewiesen. Für $x \geq 1$ ist $x^n \geq x$, woraus die Unbeschränktheit des Bildes nach oben folgt. Bei

n ungerade folgt ebenso die Unbeschränktheit des Bildes nach unten. Aufgrund des Zwischenwertsatzes ist das Bild daher $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Somit sind die angegebenen Potenzfunktionen surjektiv und die Umkehrfunktionen existieren. Das Wachstumsverhalten überträgt sich auf die Umkehrfunktionen. Die Stetigkeit der Umkehrfunktionen folgt aus Satz 52.10. $\square$

52. ARBEITSBLATT

52.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 52.1. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die genau zwei Werte annimmt.

52.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 52.2.*

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer dritten Potenz, vermindert um das Vierfache ihrer zweiten Potenz, gleich der Quadratwurzel von 42 ist?

Aufgabe 52.3.*

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer vierten Potenz, vermindert um das Doppelte ihrer dritten Potenz, gleich dem Negativen der Quadratwurzel von 42 ist?

Aufgabe 52.4. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 52.5.*

Zeige, dass der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ nicht gelten muss.

Aufgabe 52.6.*

Es seien

$$f, g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f(b) \leq g(b)$. Zeige, dass es einen Punkt $c \in [a, b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

Aufgabe 52.7. Finde für die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^2 + x - 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/100$.

Aufgabe 52.8. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 + 4x^2 - x + 3.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[-5, -4]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Aufgabe 52.9.*

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 - 3x + 1.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[0, 1]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Aufgabe 52.10.*

Fridolin sagt:

„Irgendwas kann am Zwischenwertsatz nicht stimmen. Für die stetige Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x},$$

gilt $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz müsste es also eine Nullstelle zwischen -1 und 1 geben, also eine Zahl $x \in [-1, 1]$ mit $f(x) = 0$. Es ist doch aber stets $\frac{1}{x} \neq 0$.“

Wo liegt der Fehler in dieser Argumentation?

Aufgabe 52.11.*

Zeige, dass die reelle Zahl $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^4 - 20X^2 + 16$ ist.

Aufgabe 52.12.*

Es sei $z \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) Es gibt ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$, mit ganzzahligen Koeffizienten und mit $P(z) = 0$.

- (2) Es gibt ein Polynom $Q \in \mathbb{Q}[X]$, $Q \neq 0$, mit $Q(z) = 0$.
 (3) Es gibt ein normiertes Polynom $R \in \mathbb{Q}[X]$ mit $R(z) = 0$.

Aufgabe 52.13. Es sei $K \subset \mathbb{R}$ ein Unterkörper. Zeige, dass für K der Zwischenwertsatz nicht gilt.

Aufgabe 52.14. Es sei (A, B) ein Dedekindscher Schnitt und sei

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in A, \\ 1, & \text{falls } x \in B, \end{cases}$$

definiert. Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn (A, B) eine irrationale Zahl beschreibt.

Aufgabe 52.15. Zeige, dass das Bild eines abgeschlossenen Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 52.16. Zeige, dass das Bild eines offenen Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht offen sein muss.

Aufgabe 52.17. Zeige, dass das Bild eines beschränkten Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht beschränkt sein muss.

Aufgabe 52.18. Es sei I ein reelles Intervall und

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R},$$

eine stetige, injektive Funktion. Zeige, dass f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 52.19. Es sei

$$f: I \longrightarrow J$$

eine bijektive stetige Funktion zwischen den reellen Intervallen I und J . Zeige, dass f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 52.20. Zeige, dass durch

$$f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$$

eine stetige, streng wachsende, bijektive Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$$

gegeben wird, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 52.21.*

- (1) Bestimme diejenigen reellen Polynomfunktionen, die bijektiv sind und für die die Umkehrfunktion ebenfalls polynomial ist.
- (2) Man gebe ein Beispiel für eine bijektive reelle Polynomfunktion, für die die Umkehrfunktion kein Polynom ist.
- (3) Zeige, dass durch das Polynom X^5 eine bijektive Abbildung

$$\mathbb{Z}/(7) \longrightarrow \mathbb{Z}/(7), x \longmapsto x^5,$$

gegeben ist. Ist die Umkehrabbildung polynomial?

Aufgabe 52.22. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt[3]{\frac{27n^3 + 13n^2 + n}{8n^3 - 7n + 10}}, n \in \mathbb{N}.$$

Die nächsten Aufgaben verwenden den folgenden Begriff.

Es sei M eine Menge und

$$f: M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

Aufgabe 52.23. Bestimme die Fixpunkte der Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2.$$

Aufgabe 52.24. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad d , $P \neq X$. Zeige, dass P maximal d Fixpunkte besitzt.

Aufgabe 52.25. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gebe $x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \leq x$$

und

$$f(y) \geq y.$$

Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 52.26.*

- (1) Skizziere die Graphen der Funktionen

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x - 1,$$

und

$$g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x},$$

- (2) Bestimme die Schnittpunkte der beiden Graphen.

Aufgabe 52.27. Zeige, dass es zu jeder reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ eine stetige Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass a die einzige Nullstelle von f ist.

Aufgabe 52.28. Zeige, dass es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine stetige Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass x die einzige Nullstelle von f ist und dass für jede rationale Zahl q auch $f(q)$ rational ist.

Aufgabe 52.29. Zeige, dass es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine streng wachsende stetige Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass x die einzige Nullstelle von f ist und dass für jede rationale Zahl q auch $f(q)$ rational ist.

52.3. Aufgaben zum Abgeben.**Aufgabe 52.30.** (4 Punkte)

Finde für die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/200$.

Aufgabe 52.31. (3 Punkte)

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass das Bild von f sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt ist. Zeige, dass f surjektiv ist.

Aufgabe 52.32. (4 Punkte)

Zeige, dass ein reelles Polynom von ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 52.33. (4 Punkte)

Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

eine stetige Funktion des Intervalls $[a, b]$ in sich. Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.

53. VORLESUNG - EXPONENTIALFUNKTIONEN

53.1. Die rationalen Exponentialfunktionen.

Zu einer positiven Zahl $b \in K$ aus einem angeordneten Körper K haben wir in der 27. Vorlesung die ganzzahlige Exponentialfunktion $\mathbb{Z} \rightarrow K$, zur Basis b besprochen, die einer ganzen Zahl n den Wert b^n zuordnet. Die entscheidende Gesetzmäßigkeit ist dabei (vergleiche Lemma 27.8 (4))

$$b^{m+n} = b^m \cdot b^n.$$

Für den Fall $K = \mathbb{R}$ kann man den Definitionsbereich wesentlich erweitern, und zwar in zwei Schritten. Wir besprechen zunächst die Ausdehnung von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$ und anschließend die Ausdehnung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$. Ausgangspunkt ist die Bezeichnungsweise $b^{1/2}$ für $\sqrt{b}$, die auf den ersten Blick willkürlich erscheinen mag, die sich aber durch die Beziehung

$$b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = b = b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

überzeugend rechtfertigen lässt.

Definition 53.1. Zu $b \in \mathbb{R}_+$ und $q \in \mathbb{Q}$ mit $q = \frac{r}{s}$ ($s > 0$) setzt man

$$b^q = b^{\frac{r}{s}} := \sqrt[s]{b^r}.$$

Insbesondere setzt man

$$b^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{b}.$$

Bei $s = 1$ stimmt diese Schreibweise mit den früher gemachten Festlegungen überein. Die Existenz und Eindeutigkeit der Zahlen $\sqrt[s]{b^r}$ (wenn also Zähler und Nenner fixiert sind) ist durch Satz 48.7 gesichert (insbesondere sind dies stets positive Zahlen). Auf dieser Eindeutigkeit beruht auch das Potenzprinzip, das wir in der 48. Vorlesung erwähnt haben: Zwei positive reelle Zahlen stimmen bereits dann überein, wenn eine gewisse gleichnamige Potenz von

ihnen übereinstimmt. Eine weitere Anwendung dieses Prinzips ist die Wohldefiniertheit der Definition von b^q . Man muss sich nämlich noch klar machen, dass bei verschiedenen Bruchdarstellungen

$$q = \frac{r}{s} = \frac{t}{u}$$

das gleiche herauskommt. Dies ergibt sich aus

$$\sqrt[s]{b^r} = \sqrt[su]{b^{ru}} = \sqrt[su]{b^{st}} = \sqrt[u]{b^t}.$$

Dabei gilt die erste Gleichung, da die su -te Potenz (nach Lemma 11.8 (2)) auch links b^{ru} ergibt (entsprechend für die rechte Gleichung).

Statt mit $\sqrt[s]{b^r}$ kann man genauso gut mit $\left(\sqrt[s]{b}\right)^r$ arbeiten. Die s -te Potenz von $\sqrt[s]{b^r}$ ist natürlich b^r . Es ist aber nach Lemma 23.13 (4) auch

$$\left(\left(\sqrt[s]{b}\right)^r\right)^s = \left(\sqrt[s]{b}\right)^{r \cdot s} = \left(\left(\sqrt[s]{b}\right)^s\right)^r = b^r.$$

Lemma 53.2. *Es sei b eine positive reelle Zahl. Dann besitzt die Funktion*

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, q \longmapsto b^q,$$

folgende Eigenschaften.

- (1) *Es ist $b^{q+q'} = b^q \cdot b^{q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
- (2) *Es ist $b^{-q} = \frac{1}{b^q}$.*
- (3) *Für $b > 1$ und $q > 0$ ist $b^q > 1$.*
- (4) *Für $b < 1$ und $q > 0$ ist $b^q < 1$.*
- (5) *Für $b > 1$ ist f streng wachsend.*
- (6) *Für $b < 1$ ist f streng fallend.*
- (7) *Es ist $(b^q)^{q'} = b^{q \cdot q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
- (8) *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^q = a^q \cdot b^q$.*

Beweis. (1) Wir können annehmen, dass die Exponenten mit einem gemeinsamen Nenner vorliegen, also $q = \frac{r}{s}$ und $q' = \frac{t}{s}$. Dann ist unter Verwendung von Lemma 27.8 (4) (angewendet für die Basis $\sqrt[s]{b}$ und die ganzzahligen Exponenten r und t)

$$\begin{aligned} b^q \cdot b^{q'} &= b^{\frac{r}{s}} \cdot b^{\frac{t}{s}} \\ &= \left(\sqrt[s]{b}\right)^r \left(\sqrt[s]{b}\right)^t \\ &= \left(\sqrt[s]{b}\right)^{r+t} \\ &= b^{\frac{r+t}{s}} \\ &= b^{q+q'}. \end{aligned}$$

- (2) Sei $q = \frac{r}{s}$. Dann ist unter Verwendung von Lemma 27.8 (5)

$$b^{-q} = b^{-\frac{r}{s}} = \left(\sqrt[s]{b}\right)^{-r} = \frac{1}{\left(\sqrt[s]{b}\right)^r} = \frac{1}{b^{\frac{r}{s}}} = \frac{1}{b^q}.$$

(3) Sei

$$q = \frac{r}{s} > 0,$$

also $r, s \geq 1$. Mit $b > 1$ ist nach Lemma 19.13 (8) auch $b^r > 1$ und davon ist auch die s -te Wurzel > 1 .

(4) Wird ähnlich wie (3) begründet.

(5) Dies folgt aus (1) und (3). Sei nämlich $q' > q$. Dann ist

$$q' = q + u$$

mit $u > 0$. Dann ist

$$b^{q'} = b^{q+u} = b^q b^u > b^q.$$

(6) Wird ähnlich wie (5) begründet.

(7) Sei $q = \frac{r}{s}$ und $q' = \frac{t}{u}$. Dann ist unter Verwendung von Lemma 23.13 (4) und Lemma 48.8 (1)

$$\begin{aligned} (b^q)^{q'} &= \left(b^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{t}{u}} \\ &= \left(\sqrt[s]{b^r}\right)^{\frac{t}{u}} \\ &= \sqrt[u]{\left(\sqrt[s]{b^r}\right)^t} \\ &= \sqrt[u]{\sqrt[s]{b^{rt}}} \\ &= \sqrt[u]{\sqrt[s]{b^{rt}}} \\ &= \sqrt[us]{b^{rt}} \\ &= b^{\frac{rt}{us}} \\ &= b^{qq'}. \end{aligned}$$

(8) Mit

$$q = \frac{r}{s}$$

ist unter Verwendung von Lemma 48.8 (2) und Lemma 23.13 (5)

$$\begin{aligned} (ab)^q &= (ab)^{\frac{r}{s}} \\ &= \left(\sqrt[s]{ab}\right)^r \\ &= \left(\sqrt[s]{a}\sqrt[s]{b}\right)^r \\ &= \sqrt[s]{a^r}\sqrt[s]{b^r} \\ &= a^q b^q. \end{aligned}$$

□

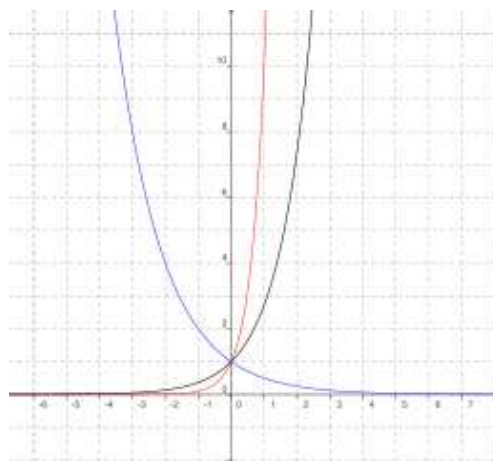
Diese Eigenschaften sind für ganzzahlige Argumente aus Lemma 27.8 und aus Lemma 27.9 vertraut. Die erste Eigenschaft nennt man auch die *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion*. Sie bedeutet, dass zu jedem $b \in \mathbb{R}_+$

ein Gruppenhomomorphismus

$$(\mathbb{Q}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot, 1), q \longmapsto b^q,$$

vorliegt. Für $b \neq 1$ sind diese nach Lemma 53.2 (6) bzw. Lemma 53.2 (7) und Lemma 25.15 injektiv.

53.2. Die reellen Exponentialfunktionen.



Die Exponentialfunktionen für die Basen $b = 10, \frac{1}{2}$ und e .

Die oben auf den rationalen Zahlen definierten Exponentialfunktionen besitzen eine Fortsetzung auf die reellen Zahlen, die entsprechend mit

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto b^x,$$

bezeichnet wird. Wie ist diese zu definieren, welche Bedeutung soll beispielsweise der Ausdruck

$$2^{\sqrt{3}}$$

bekommen? Die richtige Idee ist hier, den Exponenten $\sqrt{3}$ durch eine rationale Folge q_n zu approximieren (etwa durch die Dezimalbruchfolge oder eine Heron-Folge) und dann die Folge 2^{q_n} von Potenzen mit rationalen Exponenten zu betrachten, die wir im ersten Teil der Vorlesung eingeführt haben. Wenn diese Folge konvergiert, so hat man einen sinnvollen Kandidaten für $2^{\sqrt{3}}$. Dieser Ansatz erfordert aber, dass man zeigen kann, dass dieser Grenzwert unabhängig von der gewählten Folge q_n ist. Dazu dient das folgende Lemma.

Lemma 53.3. *Es sei*

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion. Dann ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jede rationale streng wachsende Folge $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n \leq x$, die gegen x konvergiert, die Folge $f(x_n)$ konvergent mit einem nur von x abhängigen Grenzwert.

Beweis. Ohne Einschränkung sei f wachsend. Es sei x_n eine rationale streng wachsende Folge, die gegen x konvergiert. Dann ist auch $f(x_n)$ eine wachsende Folge. Es sei $z \in \mathbb{Q}$ mit $z \geq x \geq x_n$. Dann ist auch

$$f(z) \geq f(x_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Bildfolge ist also wachsend und nach oben beschränkt, daher besitzt sie nach Korollar 47.3 einen Grenzwert in $\mathbb{R}$. Es sei y_n eine weitere rationale streng wachsende Folge, die gegen x konvergiert. Dann gibt es zu jedem n ein m mit

$$x_n \leq y_m.$$

Wegen der Monotonie von f überträgt sich dies auf die Bildfolgen, d.h. es ist

$$f(x_n) \leq f(y_m)$$

Somit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$$

und wegen der Symmetrie der Situation konvergieren beide Folgen gegen den gleichen Grenzwert. $\square$

Die vorstehende Situation bedeutet, dass man für Zahlen x durch die Festlegung

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

mit einer beliebigen rationalen streng wachsenden Folge x_n , die gegen x konvergiert, eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion erhält. Da wir für f nicht die Stetigkeit voraussetzen, kann sich für rationale Zahlen x der Funktionswert bei dieser Konstruktion sogar ändern.

Dieses Fortsetzungsverfahren wenden wir auf die Exponentialfunktion an, d.h. für x ist

$$b^x := \lim_{n \rightarrow \infty} b^{x_n}$$

mit einer beliebigen streng wachsenden Folge aus rationalen Zahlen x_n , die gegen x konvergiert. Für rationale Zahlen ändert sich dabei der Wert nicht, da die rationalen Exponentialfunktionen stetig sind. Dies ergibt sich genau so wie die Stetigkeit der auf $\mathbb{R}$ definierten Exponentialfunktionen weiter unten aus der Funktionalgleichung und der Monotonie, siehe Aufgabe 53.5.

Definition 53.4. Sei b eine positive reelle Zahl. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto b^x,$$

heißt *Exponentialfunktion* zur *Basis* b .

Die in Lemma 53.2 gezeigten Eigenschaften übertragen sich auf die reellen Zahlen.

Lemma 53.5. *Es sei b eine positive reelle Zahl. Dann besitzt die Exponentialfunktion*

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften.

- (1) *Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
- (2) *Es ist $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$.*
- (3) *Für $b > 1$ und $x > 0$ ist $b^x > 1$.*
- (4) *Für $b < 1$ und $x > 0$ ist $b^x < 1$.*
- (5) *Für $b > 1$ ist f streng wachsend.*
- (6) *Für $b < 1$ ist f streng fallend.*
- (7) *Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
- (8) *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.*

Beweis. Wir beweisen (1), die anderen Eigenschaften ergeben sich ähnlich, siehe Aufgabe 53.16. Es sei x_n eine wachsende rationale Folge, die gegen x konvergiert, und y_n eine wachsende Folge, die gegen x' konvergiert. Dann ist nach Lemma 44.11 (1) die Folge $x_n + y_n$ eine wachsende rationale Folge, die gegen $x + x'$ konvergiert. Somit ist unter Verwendung der rationalen Funktionalgleichung und von Lemma 44.11 (2)

$$\begin{aligned} b^{x+x'} &= \lim_{n \rightarrow \infty} b^{x_n + y_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (b^{x_n} \cdot b^{y_n}) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b^{x_n} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b^{y_n} \right) \\ &= b^x b^{x'}. \end{aligned}$$

□

Satz 53.6. *Es sei b eine positive reelle Zahl. Dann ist die Exponentialfunktion*

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto b^x,$$

stetig.

Beweis. Sei $b > 1$. Wir zeigen zuerst die Stetigkeit im Nullpunkt. Da nach Aufgabe 48.19 die Folge $\sqrt[n]{b}$, $n \in \mathbb{N}$, gegen 1 konvergiert, und da die Exponentialfunktion wachsend ist, gibt es zu jedem positiven ϵ ein positives δ mit der Eigenschaft, dass aus

$$|x| \leq \delta$$

die Abschätzung

$$|1 - b^x| \leq \epsilon$$

folgt. Sei nun x beliebig und ϵ vorgegeben. Wir betrachten ein δ , das zu

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{b^x}$$

die Stetigkeit im Nullpunkt sichert. Dann gilt unter Verwendung von Lemma 53.5 (1) für x' mit

$$|x' - x| \leq \delta$$

die Abschätzung

$$|b^x - b^{x'}| = |b^x (1 - b^{x'-x})| = |b^x| \cdot |1 - b^{x'-x}| \leq b^x \cdot \frac{\epsilon}{b^x} = \epsilon.$$

□

Satz 53.7. *Es sei $b \neq 1$ eine positive reelle Zahl. Dann ist die Exponentialfunktion*

$$f: (\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot, 1), x \longmapsto b^x,$$

ein bijektiver Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Die Homomorphieeigenschaft folgt direkt aus der Funktionalgleichung, die Injektivität folgt aus der Monotonieeigenschaft in Zusammenhang mit Lemma 25.15. Zum Nachweis der Surjektivität sei $y \in \mathbb{R}_+$ vorgegeben. Nach Lemma 27.10 gibt es ganze Zahlen n, m mit

$$b^n \leq y \leq b^m.$$

Aufgrund des Zwischenwertsatzes, den wir wegen der in Satz 53.6 bewiesenen Stetigkeit der Exponentialfunktionen anwenden können, gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$b^x = y,$$

was die Surjektivität bedeutet. □

Eine besonders wichtige Exponentialfunktion ergibt sich, wenn man als Basis die Eulersche Zahl e nimmt, die wir als

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

eingeführt haben. In Bemerkung 48.12 haben wir erwähnt, dass diese Zahl mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

übereinstimmt. Für diese Exponentialfunktion gibt es ebenfalls eine weitere Darstellung, die sich an dieser Reihe orientiert, die Darstellung als Potenzreihe. Diese Übereinstimmung können wir hier nicht beweisen.

Satz 53.8. *Für die Exponentialfunktion zur Basis e gilt die Darstellung*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Eine Besonderheit dieser Funktion ist, dass sie mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Die Steigung der Tangenten an einem Punkt des Graphen stimmt also stets mit dem Funktionswert überein. Der Satz bedeutet insbesondere, dass die Reihe für jedes x konvergiert, wobei diese Konvergenz im Allgemeinen recht schnell ist.

53.3. Logarithmen.

Zu $b \neq 1$ sind die reellen Exponentialfunktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto b^x,$$

stetig, streng wachsend oder streng fallend und bijektiv. Wir betrachten die Umkehrfunktionen dazu.

Definition 53.9. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$, $b \neq 1$, wird der *Logarithmus zur Basis b* als Umkehrfunktion zur reellen Exponentialfunktion zur Basis b definiert. Der Wert dieser Funktion an der Stelle $x \in \mathbb{R}_+$ wird mit

$$\log_b x$$

bezeichnet.

Aus der Umkehreigenschaft ergeben sich direkt die Beziehungen

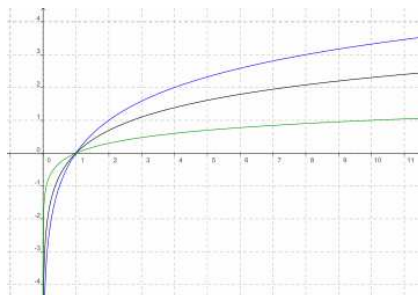
$$\log_b b^x = x$$

und

$$b^{\log_b y} = y.$$

Der Logarithmus zur Basis e wird auch als *natürlicher Logarithmus*, geschrieben $\ln x$, bezeichnet. Die Logarithmen sind nach Satz 53.6 und Satz 52.10 stetige, bijektive Abbildungen

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \log_b x.$$



Logarithmen zu verschiedenen Basen

Die folgenden Regeln ergeben sich direkt aus der Definition der Logarithmen als Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen.

Lemma 53.10. *Die Logarithmen zur Basis b erfüllen die folgenden Rechenregeln.*

- (1) *Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$.*
- (2) *Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.*
- (3) *Es gilt*

$$\log_a y = \log_a (b^{\log_b y}) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 53.27. □



Ein Rechenschieber kann eine Multiplikation durch eine vektorielle Addition (verschieben) ausführen, da die Zahlen logarithmisch angeordnet sind.

Bemerkung 53.11. Das Prinzip des Rechenschiebers beruht auf den Logarithmen. Man möchte die reellen Zahlen x und y miteinander multiplizieren. Man berechnet zu einer fixierten Basis b die zugehörigen Logarithmen, also $r = \log_b x$ und $s = \log_b y$. Dann addiert man $r + s$ und berechnet davon den Wert der Exponentialfunktion zur Basis b . Dies ist nach Lemma 53.10 (1) gleich

$$b^{r+s} = b^{\log_b x + \log_b y} = b^{\log_b xy} = xy,$$

also das gesuchte Produkt. Die Berechnungen des Logarithmus und der Exponentialfunktion können dabei durch hinreichend genaue Wertetabellen oder eben durch eine logarithmische Skala auf dem Rechenschieber ersetzt werden. Die Addition der Logarithmen wird dabei mechanisch durch das Verschieben der beweglichen Skala bewerkstelligt. Auf einer logarithmischen Skala werden die Zahlen zwischen 1 und 10 auf einer Strecke so angeordnet, dass die (auf der üblichen Skala) Stelle $\log_{10} y$ mit y bezeichnet wird. Die Skala ergibt sich auch, wenn man auf dem Graphen des Logarithmus die Werte an den Stellen zwischen 1 und 10 markiert und diese Punkte auf die y -Achse projiziert.

Rationale Zahlen

53. ARBEITSBLATT

53.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 53.1. Berechne

$$5^{\frac{2}{3}}$$

bis auf einen Fehler von 1.

53.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 53.2. Es sei b eine positive reelle Zahl und $q = n/m \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass die durch

$$b^q := (b^n)^{1/m}$$

definierte Zahl unabhängig von der Bruchdarstellung für q ist.

Aufgabe 53.3.*

Berechne

$$2^{\frac{9}{10}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 53.4. Berechne

$$5^{\frac{3}{7}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 53.5.*

Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, q \longmapsto b^q,$$

stetig ist.

Aufgabe 53.6.*

Es sei $q \in \mathbb{Q}$ fixiert. Zeige, dass die Potenzfunktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^q,$$

stetig ist.

Aufgabe 53.7.*

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{5n^{\frac{3}{2}} + 4n^{\frac{4}{3}} + n}{7n^{\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}}}$$

(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 53.8.*

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{3n^{\frac{5}{4}} - 2n^{\frac{4}{3}} + n}{4n^{\frac{7}{5}} + 5n^{\frac{1}{2}} + 1}$$

(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 53.9. Zeige, dass der einzige Gruppenhomomorphismus

$$(\mathbb{Q}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{Q}_+, \cdot, 1)$$

die konstante Abbildung auf 1 ist.

Aufgabe 53.10. Es sei

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion und es sei

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die dazu in Lemma 53.3 definierte Funktion. Zeige, dass g auf $\mathbb{Q}$ nicht unbedingt mit f übereinstimmen muss.

Aufgabe 53.11. Es sei

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion und es sei

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die dazu in Lemma 53.3 definierte Funktion. Zeige, dass g ebenfalls monoton ist.

Aufgabe 53.12. Es sei

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige monotone Funktion und es sei

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die dazu in Lemma 53.3 definierte Funktion. Zeige, dass g auf $\mathbb{Q}$ mit f übereinstimmt.

Aufgabe 53.13.*

Vergleiche die beiden Zahlen

$$\sqrt{3}^{-\frac{9}{4}} \text{ und } \sqrt{3}^{-\sqrt{5}}.$$

Aufgabe 53.14. Vergleiche die drei Zahlen

$$2^{\sqrt{3}}, 4, 3^{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe 53.15. Berechne

$$\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 53.16. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

- (1) Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
- (2) Es ist $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$.
- (3) Für $b > 1$ und $x > 0$ ist $b^x > 1$.
- (4) Für $b < 1$ und $x > 0$ ist $b^x < 1$.
- (5) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
- (6) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
- (7) Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
- (8) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Aufgabe 53.17.*

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ mit $f(x) = b^x$ gibt.

Aufgabe 53.18. Zeige, dass eine Exponentialfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto b^x,$$

aus einem arithmetischen Mittel ein geometrisches Mittel macht.

Aufgabe 53.19.*

Es sei

$$f(x) = a^x$$

eine Exponentialfunktion mit $a \neq 1$. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ definiert die Gerade durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x+1, f(x+1))$ einen Schnittpunkt mit der x -Achse, den wir mit $s(x)$ bezeichnen. Zeige

$$s(x+1) = s(x) + 1.$$

Skizziere die Situation.

Aufgabe 53.20.*

Es sei b eine positive reelle Zahl und

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto b^x,$$

die zugehörige Exponentialfunktion. Zeige

$$(b^x)^{x'} = b^{xx'}$$

für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ unter Bezug auf die entsprechende Gleichung für rationale Argumente.

Aufgabe 53.21. Skizziere die Graphen zu den Funktionen

$$f_k(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

für $n = 2, 3, 4, 5, 6$ auf $[-3, 3]$.

Aufgabe 53.22.*

Ordne die Zahlen

$$\exp(0,6), \exp(0,7) \text{ und } 2$$

gemäß ihrer Größe.

Aufgabe 53.23. Wir betrachten die Exponentialreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Zeige, dass die Ableitung von f mit f übereinstimmt. Verwende dabei, dass in diesem Fall die Ableitung einer unendlichen Summe von Polynomen gleich der Summe der einzelnen Ableitungen ist.

Aufgabe 53.24. Man gebe ein Beispiel einer stetigen, streng wachsenden Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

mit $f(0) = 1$ und mit $f(x+1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die von 2^x verschieden ist.

Aufgabe 53.25. Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

Aufgabe 53.26. Man bastle einen *Rechenschieber*, der die Multiplikation von positiven reellen Zahlen ausführt.

Aufgabe 53.27. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis b die folgenden Rechenregeln erfüllen.

- (1) Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$.
- (2) Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.
- (3) Es gilt

$$\log_a y = \log_a (b^{\log_b y}) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

Aufgabe 53.28.*

Es sei $u \in \mathbb{R}$ fixiert. Zeige, dass die Potenzfunktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^u,$$

stetig ist.

53.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 53.29. (4 Punkte)

Berechne

$$3^{\frac{4}{5}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 53.30. (2 Punkte)

Vergleiche

$$5^{-\frac{4}{7}} \text{ und } 5^{-\frac{5}{9}}.$$

Aufgabe 53.31. (4 Punkte)

Finde eine rationale Zahl zwischen den beiden Zahlen $2^{\sqrt{5}}$ und $3^{\sqrt[3]{2}}$ folgere daraus, welche größer ist.

Aufgabe 53.32. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass es keine stetige Funktion

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, die auf $\mathbb{Q}$ mit f übereinstimmt.

Aufgabe 53.33. (5 Punkte)

Es sei

$$f: (\mathbb{Q}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot, 1)$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein reelles $b > 0$ mit $f(x) = b^x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ gibt.

Aufgabe 53.34. (4 Punkte)

Berechne e^3 mit der Exponentialreihe bis auf einen Fehler von $\frac{1}{1000}$.

54. VORLESUNG - TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

54.1. Der Einheitskreis.

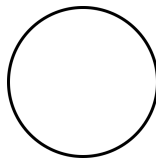
Im $\mathbb{R}^2$ ist der Abstand zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^2$ eine positive reelle Zahl (bzw. gleich 0, falls die Punkte zusammenfallen). Wenn die beiden Punkte in Koordinaten gegeben sind, also $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$, so ist der Abstand gleich

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Diese Gleichung beruht auf dem Satz des Pythagoras. Speziell besitzt jeder Punkt $P = (x, y)$ zum Nullpunkt $(0, 0)$ den Abstand

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Weil die Koordinaten reelle Zahlen sind, so sind auch die Abstände reelle Zahlen (auch wenn man mit rationalen Koordinaten startet, ergeben sich über die Quadratwurzel auch irrationale Zahlen). Wenn ein Punkt M und eine positive reelle Zahl r fixiert sind, so nennt man die Menge aller Punkte der Ebene, die zu M den Abstand r besitzen, den Kreis um M mit Radius r . In Koordinaten sieht die Definition folgendermaßen aus.



Definition 54.1. Es sei $M = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_+$. Dann nennt man die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$$

den *Kreis* (oder die *Kreislinie* oder die *1-Sphäre*) mit dem *Mittelpunkt* M und dem *Radius* r .

Von Kreislinie spricht man, um zu betonen, dass man nicht den Vollkreis (die Kreisscheibe) meint, sondern nur den Rand. Alle Kreise sind wesensgleich, es kommt für die wichtigsten Eigenschaften des Kreises nicht auf den Mittelpunkt und nicht auf den Radius an. Von daher ist der Einheitskreis der einfachste Kreis, der alle Kreise repräsentiert.

Definition 54.2. Die Menge

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

heißt der *Einheitskreis*.

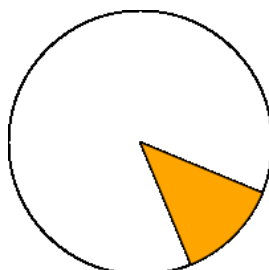
Es ist bekannt, dass der Kreisbogen des Einheitskreises die Länge 2π und den Flächeninhalt π besitzt. Dies sind nichttriviale Aussagen, und zwar sowohl strategisch als auch mathematisch. Das strategische Problem ist hier, was man als Definition nimmt und was man dann unter Bezug auf die Definitionen beweisen kann und wie. Sowohl die Länge einer gekrümmten Kurve als auch der Flächeninhalt sind zwar intuitiv zugängliche, aber letztlich doch recht schwer zu fundierende Begriffe. Dasselbe trifft auf den Winkelbegriff zu. Wir werden hier mit einem naiv-intuitiven Begriff von Kurvenlänge arbeiten und darauf aufbauend den Winkel und die trigonometrischen Funktionen einführen.

Definition 54.3. Unter der Zahl π versteht man die Hälfte des Kreisumfanges des Einheitskreises.

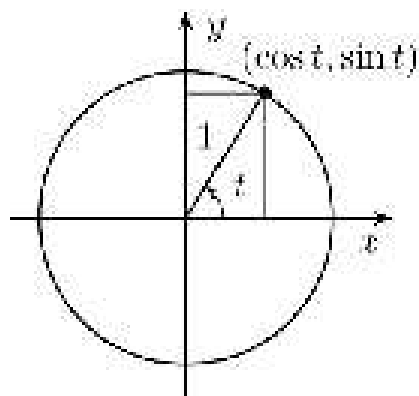
Der numerische Wert von π ist etwa

Es handelt sich um eine transzendente Zahl, also keine algebraische Zahl (und erst recht keine rationale Zahl).

Mit dem Begriff des Winkels ist die Vorstellung verbunden, dass man einen Vollkreis gleichmäßig in Sektoren bzw. die Kreislinie gleichmäßig in Abschnitte (des Kreisbogens) unterteilen kann. Diese Vorstellung ist mit der Vorstellung verwandt, dass man das Einheitsintervall $[0, 1]$ in n gleichlange Stücke unterteilen kann. Allerdings kann man letzteres aufgrund der Strahlensätze durch eine einfache geometrische Konstruktion für jedes $n \in \mathbb{N}$ durchführen (siehe die 24. Vorlesung), für den Kreisbogen hingegen nur für einige wenige $n \in \mathbb{N}_+$. Bei der Kreisunterteilung in 360 Grad zerlegt man den Kreis in 360 gleichgroße Sektoren. Im *Bogenmaß* nimmt man die Länge des gebogenen Kreisabschnittes als Winkelmaß. D.h. der volle Kreis entspricht 2π gemäß der Definition der Kreiszahl π , der Halbkreis (die beiden Sektorengrenzen liegen auf einer Geraden) entspricht π , der Viertelkreis entspricht $\frac{\pi}{2}$, der Achtelkreis entspricht $\frac{\pi}{4}$.



Definition 54.4. Der durch einen Kreisbogen der Länge $\alpha \in [0, 2\pi]$ definierte Winkel heißt *Winkel im Bogenmaß*.



Ein Winkel definiert einen eindeutigen Punkt auf dem Einheitskreis, wenn man von $(1, 0)$ aus startet und gegen den Uhrzeigersinn den Kreisbogen entlang geht.

Ein Winkel, also die Länge eines zusammenhängenden Kreisbogenstücks, kann man grundsätzlich überall an den Kreisbogen anlegen. Wenn man Winkel untereinander vergleichen und studieren möchte, so wählt man den Punkt $(1, 0)$ (also die 1 auf der x -Achse) als Startpunkt und läuft den als Bogenmaßlänge α gegebenen Winkel gegen den Uhrzeigersinn entlang bis zu einem Punkt $P(\alpha)$ mit der Eigenschaft, dass die Bogenlänge von $(1, 0)$ bis $P(\alpha)$ genau α ist.

Definition 54.5. Zu einem Winkel α (im Bogenmaß) nennt man denjenigen Punkt auf dem Einheitskreis, den man erreicht, wenn man sich auf dem Kreis in $(1, 0)$ startend gegen der Uhrzeigersinn auf dem Kreisbogen α lange bewegt, den *trigonometrischen Punkt* $P(\alpha)$ zu diesem Winkel.

Diesen Punkt $P(\alpha)$ nennen wir auch den *Standardpunkt zum Winkel* α . Durch ihn wird der *Standardkreisbogen zum Winkel* α , nämlich der Kreisbogen von $(1, 0)$ bis $P(\alpha)$, der *Standardstrahl zum Winkel* α , nämlich die Halbgerade durch den Nullpunkt und den Standardpunkt, und der *Standardsektor zum Winkel* α , nämlich der durch die x -Achse und den Standardstrahl gegebene Sektor, festgelegt. Diese Zuordnung kann man von $\alpha \in [0, 2\pi[$ (worauf sie bijektiv ist) auf ganz $\mathbb{R}$ ausdehnen. Die Zahl α gibt einfach vor, welche Strecke man auf dem Einheitskreis durchlaufen muss. Bei negativem α läuft man mit dem Uhrzeigersinn los.

Zu einem Winkel α mit dem zugehörigen trigonometrischen Punkt $P(\alpha)$ zu α kann man das (senkrechte) Lot auf die x -Achse fallen und erhält dadurch ein rechtwinkliges Dreieck mit der Verbindungsstrecke zwischen Nullpunkt und trigonometrischem Punkt als Hypotenuse und mit einer Kathete auf der x -Achse. Man nennt dies das *trigonometrische Dreieck* zum Winkel α . Die am Nullpunkt anliegende Kathete nennt man auch die *Ankathete* zu α und die gegenüberliegende Kathete nennt man die *Gegenkathete* zu α (diese Bezeichnungen sind nur bei Winkeln bis $\pi/2$ passend). Die (eventuell negativ

genommenen) Längen dieser Katheten sind zugleich die Koordinaten des trigonometrischen Punktes. Mit den trigonometrischen Funktionen untersucht man die Abhängigkeit dieser Koordinaten vom Winkel (im Bogenmaß).

Definition 54.6. Zu einem Winkel α versteht man unter $\cos \alpha$ die erste Koordinate des trigonometrischen Punktes $P(\alpha)$.

Definition 54.7. Zu einem Winkel α versteht man unter $\sin \alpha$ die zweite Koordinate des trigonometrischen Punktes $P(\alpha)$.

Somit besitzt der trigonometrische Punkt $P(\alpha)$ die Koordinaten

$$P(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Wenn α sämtliche Winkel durchläuft, durchläuft $P(\alpha)$ den Einheitskreis. Die Zuordnung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \alpha \longmapsto (\cos \alpha, \sin \alpha),$$

bildet also eine „Parametrisierung“ des Einheitskreises, die auf $\mathbb{R}$ definiert ist, für den Nullwinkel $\alpha = 0$ im Einspunkt $(1, 0)$ startet und sich bei $\alpha = 2\pi$ erstmalig wieder in diesem Punkt befindet.

54.3. Die trigonometrischen Funktionen.

Wir besprechen die wichtigsten Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

Satz 54.8. *Die Funktionen*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \alpha \longmapsto \cos \alpha,$$

und

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \alpha \longmapsto \sin \alpha,$$

besitzen für $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften.

(1) *Es gilt*

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) *Es ist*

$$-1 \leq \cos \alpha, \sin \alpha \leq 1.$$

(3) *Es ist $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ und $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.*

Beweis. (1) Die erste Eigenschaft ist klar, da

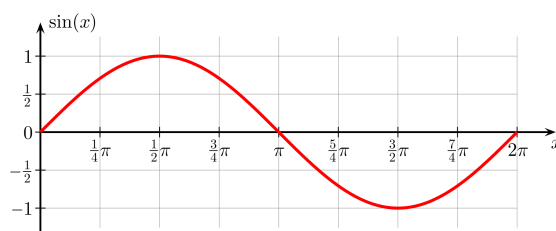
$$P(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

nach Definition ein Punkt auf dem Einheitskreis ist.

(2) Folgt aus (1).

- (3) Ein negativer Winkel ist so zu verstehen, dass man vom Punkt $(1, 0)$ aus startend mit dem Uhrzeigersinn entlang des Kreisbogens läuft. Somit ergibt sich die (Kreisbogen)-Bewegung zu $-\alpha$, wenn man die Bewegung zu α an der x -Achse spiegelt. Da der Kosinus die x -Koordinate von $P(\alpha)$ ist, ändert er sich nicht bei Spiegelung an der x -Achse, und da der Sinus die y -Koordinate von $P(\alpha)$ ist, wird daraus bei dieser Spiegelung das Negative.

□



Der Graph des Sinus. Der qualitative Verlauf ist von der naiven Definition her klar. Mit der unten folgenden analytischen Definition über Reihen kann man die Funktionswerte beliebig genau ausrechnen.

Satz 54.9. *Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion erfüllen in $\mathbb{R}$ folgende Periodizitätseigenschaften.*

- (1) *Es ist $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$ und $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.*
- (2) *Es ist $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ und $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.*
- (3) *Es ist $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin \alpha$ und $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos \alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.*
- (4) *Es ist $\cos 0 = 1$, $\cos \pi/2 = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos 3\pi/2 = 0$ und $\cos 2\pi = 1$.*
- (5) *Es ist $\sin 0 = 0$, $\sin \pi/2 = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin 3\pi/2 = -1$ und $\sin 2\pi = 0$.*

Beweis. (1) Die ersten Eigenschaften folgen unmittelbar aus

$$P(\alpha + 2\pi) = P(\alpha),$$

da 2π nach Definition von π eine Volldrehung beschreibt.

- (2) Wenn man zu einem Winkel den Winkel π hinzuaddiert, so bedeutet dies, eine Halbdrehung um den Nullpunkt bzw. eine Punktspiegelung am Nullpunkt durchzuführen. Dabei werden die Koordinaten von $P(\alpha)$ in ihr Negatives umgewandelt.
- (3) Eine Winkeladdition von $\pi/2$ bedeutet eine Vierteldrehung von $P(\alpha)$ gegen den Uhrzeigersinn. Wegen der schon gezeigten Aussagen genügt es, diese Aussage für Winkel zwischen 0 und $\pi/2$ zu zeigen. Die trigonometrischen Dreiecke zu α und zu $\alpha + \pi/2$ sind kongruent, und zwar ist der am Nullpunkt anliegende Winkel des zweiten Dreiecks

gleich $\pi/2 - \alpha$. Somit ist die Ankathete des zweiten Dreiecks, die auf der negativen x -Achse liegt, gleich der Gegenkathete des ersten Dreiecks.

- (4) Dies sind einfach die Koordinaten nach einer Viertel-, Halb- und Dreivierteldrehung.
- (5) Ebenso.

□

Satz 54.10. *Die reelle Sinusfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion*

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1],$$

und die reelle Kosinusfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1].$$

Beweis. Für α zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ liegt $P(\alpha)$ auf der rechten Kreishälfte. Diese Punkte stehen in Bijektion zu diesen Winkeln und in Bijektion zum Wert der (senkrechten) Projektion auf die y -Achse, also zum Sinus von α . □

54.4. Drehungen, Additionstheoreme und Stetigkeit.

Eine Drehung der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn bildet den ersten Standardvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf den trigonometrischen Punkt

$$P(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

und den zweiten Standardvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$ ab. Da es sich um lineare Abbildungen handelt, werden ebene Drehungen durch die folgenden Drehmatrizen beschrieben.

Definition 54.11. Eine lineare Abbildung

$$D(\alpha): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die durch eine *Drehmatrix* $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ (mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$) gegeben ist, heißt *Drehung*.

Satz 54.12. *Für die trigonometrischen Funktionen*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \cos x,$$

und

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sin x,$$

gelten die Additionstheoreme

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

und

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y.$$

Beweis. Die Hintereinanderschaltung der Drehung um den Winkel x und der Drehung um den Winkel y ist die Drehung um den Winkel $x + y$. Nach Satz 35.15 wird diese Hintereinanderschaltung durch das Matrixprodukt der beiden Drehmatrizen beschrieben. Somit ist aufgrund einer einfachen Matrizenmultiplikation

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(x + y) & -\sin(x + y) \\ \sin(x + y) & \cos(x + y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y & -\cos x \cdot \sin y - \sin x \cdot \cos y \\ \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y & \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Betrachten der Komponenten in der ersten Spalte ergibt die Behauptung. $\square$

Mit den Additionstheoremen können wir die Stetigkeit der trigonometrischen Funktionen beweisen.

Satz 54.13. *Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus sind stetig.*

Beweis. Wegen Satz 54.9 (3) genügt es, die Aussage für den Sinus zu zeigen. Wir zeigen zuerst die Stetigkeit des Sinus im Nullpunkt. Nach Aufgabe 54.16 ist

$$|\sin x| \leq |x|.$$

Daraus folgt direkt die Stetigkeit im Nullpunkt. Aufgrund von Satz 54.8 (1) folgt daraus auch die Stetigkeit des Kosinus im Nullpunkt. Zum Nachweis der Stetigkeit des Sinus in einem beliebigen Punkt $x \in \mathbb{R}$ verwenden wir das Folgenkriterium. Es sei also x_n eine gegen x konvergente Folge, die wir als

$$x_n = x + z_n$$

mit einer Nullfolge z_n schreiben. Aufgrund des Additionstheorems für den Sinus gilt

$$\sin(x + z_n) = \sin x \cdot \cos z_n + \cos x \cdot \sin z_n.$$

Aufgrund der Vorüberlegung und den Rechenregeln für konvergente Folgen konvergiert dieser Ausdruck gegen $\sin x$. $\square$

Wir erwähnen abschließend noch die analytischen Ausdrücke für die trigonometrischen Funktionen Kosinus und Sinus.

Definition 54.14. Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

die *Kosinusreihe* und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die *Sinusreihe* zu x .

In einem streng-analytischen Aufbau der trigonometrischen Funktionen und von π , der auf geometrische Intuition verzichtet, fängt man mit diesen Definitionen an und erarbeitet sich dann die Beziehung zum Einheitskreis. Man muss zunächst zeigen, dass diese Reihen konvergieren. Mit diesem Zugang erhält man dann insbesondere, dass die trigonometrischen Funktionen nicht nur stetig, sondern auch differenzierbar sind.

54. ARBEITSBLATT

54.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 54.1. Erstelle eine Kreisgleichung für den Kreis im $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(4, -1)$, der durch den Punkt $(-2, 5)$ läuft.

54.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 54.2. Wir betrachten den rationalen Einheitskreis

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

und die Gerade

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x + y = 0\}.$$

- (1) Bestimme die Schnittpunkte $E \cap G$.
- (2) Wie sieht es aus, wenn man statt $\mathbb{Q}$ die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nimmt?
- (3) Kann man einen Kreis erst dann verstehen, wenn man die reellen Zahlen verstanden hat?
- (4) Welche Beziehung besteht zum Zwischenwertsatz?

Aufgabe 54.3. Welche Punkte kennen Sie auf dem rationalen Einheitskreis

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}?$$

Aufgabe 54.4.*

Erstelle eine Kreisgleichung für den Kreis im $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(-5, 5)$, der durch den Punkt $(-4, -1)$ läuft.

Aufgabe 54.5. Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden G und des Kreises K , wobei G durch die Gleichung $2y - 3x + 1 = 0$ und K durch den Mittelpunkt $(2, 2)$ und den Radius 5 gegeben ist.

Aufgabe 54.6.*

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der Geraden, die durch die beiden Punkte $(-1, 1)$ und $(4, -2)$ verläuft.

Aufgabe 54.7.*

Berechne die Schnittpunkte der beiden Kreise K_1 und K_2 , wobei K_1 den Mittelpunkt $(3, 4)$ und den Radius 6 und K_2 den Mittelpunkt $(-8, 1)$ und den Radius 7 besitzt.

Aufgabe 54.8.*

Bestimme die Schnittpunkte der beiden Ellipsen

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + 3y^2 = 3\} \text{ und } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - xy + y^2 = 4\} .$$

Aufgabe 54.9. Beschreibe die obere Hälfte des Einheitskreises und die untere Hälfte des Einheitskreises als den Graphen einer Funktion.

Aufgabe 54.10. Es seien $a, b, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, und sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$$

der Kreis mit dem Mittelpunkt $M = (a, b)$ und dem Radius r . Es sei G eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass es auf G mindestens einen Punkt P gibt mit $d(M, P) \leq r$. Zeige, dass $K \cap G \neq \emptyset$ ist.

Aufgabe 54.11.*

Es sei

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

die Standardparabel und K der Kreis mit dem Mittelpunkt $(0, 1)$ und dem Radius 1.

- (1) Skizziere P und K .
- (2) Erstelle eine Gleichung für K .
- (3) Bestimme die Schnittpunkte

$$P \cap K .$$

- (4) Beschreibe die untere Kreisbogenhälfte als Graph einer Funktion von $[-1, 1]$ nach $\mathbb{R}$.

- (5) Bestimme, wie die Parabel relativ zum unteren Kreisbogen verläuft.

Aufgabe 54.12. Bestimme alle Lösungen der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

für die Körper $K = \mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(3)$, $\mathbb{Z}/(5)$ und $\mathbb{Z}/(7)$.

Aufgabe 54.13. (1) Skizziere einen Kreis mit einem bestimmten Radius.

- (2) Trage auf einem Faden den Radius als Einheitsstrecke und Vielfache davon ein.
- (3) Bestimme mit dem Faden den ungefähren Wert des Kreisumfanges.
- (4) Lege einen Startpunkt auf dem Kreis fest (der Kreismittelpunkt als Nullpunkt $(0, 0)$ und der Startpunkt als $(1, 0)$ legen ein Koordinatensystem fest).
- (5) Finde zu verschiedenen Punkten (etwa Einheitsstrecke, halbe Einheitsstrecke, doppelte Einheitsstrecke) auf dem Faden den zugehörigen trigonometrischen Punkt. Schätze seine Koordinaten jeweils ab.
- (6) Finde zu verschiedenen Punkten auf dem Kreis den zugehörigen Punkt auf dem Faden.

Aufgabe 54.14.*

Ergänze die folgende Tabelle, in der Winkel in verschiedenen Maßeinheiten miteinander in Bezug gesetzt werden. Die Prozentangabe bezieht sich auf den Vollkreis.

	Grad	Bogenmaß	Prozent
			100%
	270°		
		$\frac{\pi}{10}$	
	60°		
		π	
			1%

Aufgabe 54.15. Skizziere die trigonometrischen Dreiecke zu den Winkeln

- (1) $2\pi/3$,
- (2) $5\pi/4$,
- (3) $7\pi/4$.

Aufgabe 54.16. Begründe die Abschätzung

$$\sin x \leq x$$

für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Aufgabe 54.17.*

Zeige, dass die Sinus- bzw. die Kosinusfunktion die folgenden Werte besitzt.

a)

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b)

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe 54.18. Wir betrachten eine Uhr mit Minuten- und Sekundenzeiger, die sich beide kontinuierlich bewegen. Bestimme eine Formel, die aus der Winkelstellung des Minutenzeigers die Winkelstellung des Sekundenzeigers (jeweils ausgehend von der 12-Uhr-Stellung im Uhrzeigersinn gemessen) berechnet.

Aufgabe 54.19. Wie hoch muss ein Spiegel mindestens sein, damit man sich in ihm vollständig sehen kann (ohne sich zu verrenken)?

Aufgabe 54.20.*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

Aufgabe 54.21. Zeige, dass die Folge

$$x_n := \sin n$$

nicht konvergiert.

Aufgabe 54.22.*

Zu einem Startwert $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sei eine Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} := \sin x_n$$

definiert. Entscheide, ob $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Mit einem Ausdruck der Form $\sin^n x$ meint man $(\sin(x))^n$.

Aufgabe 54.23.*

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3 \sin^4 n - 7n^3 + 11n}{5n^3 - 4n^2 - \cos n}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 54.24.*

Ordne die folgenden Funktionen den Bildern zu (man schreibe ohne Begründung hinter den Funktionsausdruck den Buchstaben des zugehörigen Bildes; nur für vollständig richtige Antworten gibt es Punkte).

(1)

$$\frac{1}{3} \sin \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) - 1,$$

(2)

$$\frac{1}{3} \sin \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) - 1,$$

(3)

$$\frac{1}{2} \sin \left(\frac{1}{3}x + 1 \right) - 1,$$

(4)

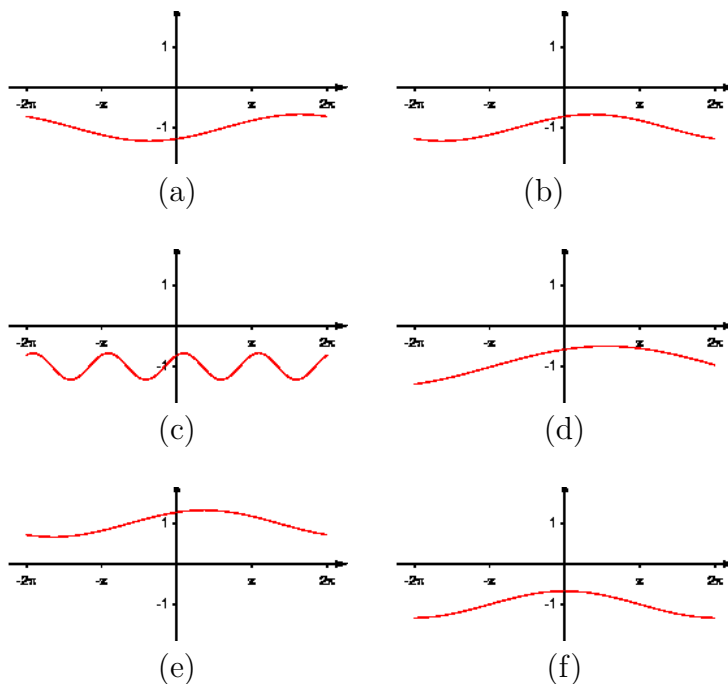
$$\frac{1}{3} \sin \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) + 1,$$

(5)

$$\frac{1}{3} \sin (2x + 1) - 1,$$

(6)

$$\frac{1}{3} \sin \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right) - 1.$$



Aufgabe 54.25. Skizziere die Funktion

$$g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sin \frac{1}{x}.$$

Aufgabe 54.26. Zeige, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist. Ist der Graph dieser Funktion „zeichenbar“?

Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch im Sinne der folgenden Definition.

Eine Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *periodisch* mit *Periode* $L > 0$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(x + L)$$

gilt.

Aufgabe 54.27. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion und

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine beliebige Funktion.

- a) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ wieder periodisch ist.
- b) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $f \circ g$ nicht periodisch sein muss.

Aufgabe 54.28. Es seien

$$f_1, f_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

periodische Funktionen mit den Periodenlängen L_1 bzw. L_2 . Der Quotient L_1/L_2 sei eine rationale Zahl. Zeige, dass auch $f_1 + f_2$ eine periodische Funktion ist.

Die nächsten Aufgaben verwendet den Begriff der geraden und der ungeraden Funktion.

Eine Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(-x)$$

gilt.

Eine Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt.

Aufgabe 54.29. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Woran erkennt man am Graphen von f , ob f eine gerade Funktion ist?

Aufgabe 54.30. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Woran erkennt man am Graphen von f , ob f eine ungerade Funktion ist?

Aufgabe 54.31. Zeige, dass der Betrag

$$|\cdot|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto |x|,$$

eine gerade Funktion ist.

Aufgabe 54.32. Zeige, dass eine lineare Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto ax,$$

eine ungerade Funktion ist.

Aufgabe 54.33. Es sei $P = \sum_{k=0}^d a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom. Zeige, dass P genau dann eine gerade Funktion definiert, wenn $a_k = 0$ für alle ungeraden Indizes ist.

Aufgabe 54.34. Es sei $P = \sum_{k=0}^d a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom. Zeige, dass P genau dann eine ungerade Funktion definiert, wenn $a_k = 0$ für alle geraden Indizes ist.

Aufgabe 54.35. Erstelle die Drehmatrizen zu den Winkeln

$$\alpha = 0, \pi, \pi/2, \pi/3, \pi/6, \pi/4.$$

Aufgabe 54.36. Es sei

$$\mathcal{D} = \{D(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller Drehmatrizen mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung.

- (1) Zeige, dass $(\mathcal{D}, \circ, E_2)$ eine Gruppe ist.
- (2) Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{D}, \alpha \longmapsto D(\alpha),$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

- (3) Zeige, dass $2\pi\mathbb{Z}$ der Kern der Abbildung $\alpha \mapsto D(\alpha)$ ist.
- (4) Zeige die Gruppenisomorphie

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathcal{D}.$$

Aufgabe 54.37. Beweise die Formel

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

aus den Additionstheoremen für die trigonometrischen Funktionen.

Aufgabe 54.38. Berechne

$$\left(1 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{24}X^4\right)^2 + \left(X - \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{120}X^5\right)^2.$$

Was fällt dabei auf und wie kann man es erklären?

Aufgabe 54.39.*

Es sei

$$P = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + 1.$$

- (1) Bestimme die kleinste positive Nullstelle von P .
- (2) Besteht ein Zusammenhang zwischen dieser Nullstelle und $\frac{\pi}{2}$?

Aufgabe 54.40. Bestimme die „Ableitung“ der Sinusreihe unter der (in diesem Fall richtigen) Annahme, dass man bei einer unendlichen Summe von Funktionen gliedweise ableiten darf.

54.3. Aufgaben zum Abgeben.**Aufgabe 54.41.** (3 Punkte)

Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden G und des Kreises K , wobei G durch die Gleichung $3y - 4x + 2 = 0$ und K durch den Mittelpunkt $(2, 5)$ und den Radius 7 gegeben ist.

Aufgabe 54.42. (5 Punkte)

Berechne die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der beiden Kreise K und L , wobei K den Mittelpunkt $(2, 3)$ und den Radius 4 und L den Mittelpunkt $(5, -1)$ und den Radius 7 besitzt.

Aufgabe 54.43. (5 Punkte)

Bestimme die Schnittpunkte der beiden Ellipsen

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 3xy + 2y^2 = 7\} \text{ und } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 4xy + 5y^2 = 8\}.$$

Aufgabe 54.44. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{5 \sin^3 n - 6n^4 + 13n^2 + (\sin n) (\cos(n^2))}{7n^4 - 5n^3 + n^2 \sin(n^3) - \cos n}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 54.45. (4 Punkte)

Zeige, dass man jede stetige Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$f = g + h$$

mit einer stetigen geraden Funktion g und einer stetigen ungeraden Funktion h schreiben kann.

55. VORLESUNG - ENDLICHE WAHRSCHEINLICHKEITSRÄUME

55.1. Endliche Wahrscheinlichkeitsräume.

Zum Abschluss dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit Wahrscheinlichkeitstheorie, und zwar mit diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie. Mit diskret ist gemeint, dass die möglichen Werte (Ausgänge) eines „zufälligen Experimentes“ in einer endlichen Menge liegen und Wahrscheinlichkeiten prinzipiell durch ein „gewichtetes Zählen“ erhalten werden können. Insofern geht es um elementare Kombinatorik, aber doch unter neuen Gesichtspunkten und mit neuen Sprechweisen. Wenn man eine Münze wirft, so kann Kopf oder Zahl fallen, und es gibt keinen Grund, warum das eine häufiger als das andere eintreten sollte. Bei einem einzelnen Wurf kann natürlich nur ein Ereignis eintreten. Wenn man den Münzwurf oft wiederholt, so kann man im Allgemeinen beobachten, dass die Anzahl der Kopfwürfe in der Nähe der Anzahl der Zahlwürfe liegt. Aber schon die Präzisierung dieser Aussage ist nicht unmittelbar klar. Wenn man beispielsweise 100-mal wirft, und es tritt 47-mal Kopf ein, was heißt das? Die Abweichung von Kopfwürfen zu Zahlwürfen ist immerhin

$$53 - 47 = 6,$$

also jedenfalls größer als bei einem Wurf. Ein sinnvolles Vergleichsmaß ist

$$\frac{47}{100},$$

also der Quotient aus der Anzahl der Kopfwürfe und der Gesamtzahl der Durchführungen (Würfe). Dieser Quotient heißt *relative Häufigkeit* und ist relativ nah an $\frac{1}{2}$. Es ist eine Erfahrungstatsache, dass diese relative Häufigkeit bei wachsender Durchführungsanzahl gegen $\frac{1}{2}$ „strebt“. Diese Aussage ist aber vage und keine Konvergenzaussage. Dennoch ist diese Vorstellung die Motivation für die folgende Begriffsbildung, mit der man wiederum das Verhalten bei oft durchgeführten vom *Zufall* abhängigen Experimenten erklären und quantitativ erfassen kann.

Definition 55.1. Zu einer endlichen Menge M nennt man eine Abbildung

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto f(x),$$

mit

$$\sum_{x \in M} f(x) = 1$$

eine (diskrete) *Wahrscheinlichkeitsdichte* auf M .

Diese Benennung verwendet man eigentlich nur, wenn man eine Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation beabsichtigt. Statt diskrete Wahrscheinlichkeitsdichte sagt man auch *Zähldichte*. Unter M sollte man sich die möglichen Ausgänge eines Experimentes vorstellen, wobei $f(x)$ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass bei dem Experiment der Ausgang gleich x ist. Das Ereignis x tritt also mit Wahrscheinlichkeit $f(x)$ ein. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird also durch eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 ausgedrückt, bei Wahrscheinlichkeit 0 spricht man von einem *unmöglichen Ereignis* und bei Wahrscheinlichkeit 1 von einem *sicheren Ereignis*. Gelegentlich drückt man Wahrscheinlichkeiten auch mit Prozentzahlen aus.

Definition 55.2. Auf einer endlichen Menge M sei eine diskrete Wahrscheinlichkeitsdichte $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$ gegeben. Dann nennt man jede Teilmenge $E \subseteq M$ ein *Ereignis* und man nennt

$$\mu_f(E) := \sum_{x \in E} f(x)$$

die *Wahrscheinlichkeit* von E .

Ein Element $x \in M$ nennt man auch ein *Elementarereignis*.

Definition 55.3. Eine endliche Menge M zusammen mit einer fixierten diskreten Wahrscheinlichkeitsdichte $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und mit der Potenzmenge aller Ereignisse nennt man einen *endlichen Wahrscheinlichkeitsraum*.

Definition 55.4. Auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (M, f) heißt die Abbildung

$$\mu_f: \mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, E \longmapsto \mu_f(E) = \sum_{x \in E} f(x),$$

ein *endliches Wahrscheinlichkeitsmaß*.

Man spricht manchmal auch von einer *Verteilung* statt von einem Wahrscheinlichkeitsmaß.

Bemerkung 55.5. Auf einer endlichen Menge sind eine Wahrscheinlichkeitsdichte und ein Wahrscheinlichkeitsmaß äquivalente mathematische Objekte. Die Dichte definiert für jedes Ereignis $E \subseteq M$ das Maß

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x)$$

und umgekehrt ist durch das Maß über

$$f(x) = \mu(\{x\})$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte festgelegt.

Beispiel 55.6. Wir betrachten die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(a) = \frac{1}{12}, f(b) = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}, f(c) = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}, f(d) = \frac{1}{2} = \frac{6}{12}.$$

Es gibt 16 Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{b, c\}$ ist beispielsweise

$$\mu_f(\{b, c\}) = f(b) + f(c) = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12},$$

die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{a, b, d\}$ ist

$$\mu_f(\{a, b, d\}) = f(a) + f(b) + f(d) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{6}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Eine leere Menge kann kein Wahrscheinlichkeitsraum sein, bei einer einelementigen Menge muss der einzige Punkt die Wahrscheinlichkeit 1 besitzen. Bei einer zweielementigen Menge spricht man von einer Bernoulli-Verteilung.

Definition 55.7. Sei $p \in [0, 1]$. Die endliche Wahrscheinlichkeitsdichte f_p auf $M = \{0, 1\}$ mit

$$f_p(1) = p$$

und

$$f_p(0) = 1 - p$$

heißt *Bernoulli-Verteilung*.

Lemma 55.8. Es sei (M, μ) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Es ist $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(M) = 1$.
- (2) Für Teilmengen $F \subseteq E$ ist $\mu(F) \leq \mu(E)$.
- (3) Für (paarweise) disjunkte Ereignisse $E_i, i \in I$, ist

$$\mu\left(\biguplus_{i \in I} E_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(E_i).$$

- (4) Für das komplementäre Ereignis $M \setminus E$ zu einem Ereignis E gilt

$$\mu(M \setminus E) = 1 - \mu(E).$$

- (5) Für zwei Ereignisse E und F ist

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) - \mu(E \cap F).$$

Beweis. Es sei f die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte.

- (1) Die leere Summe ist gleich 0, die zweite Eigenschaft gehört zur Definition einer endlichen Wahrscheinlichkeitsdichte.
- (2) Ist klar, da die Werte der Dichte nichtnegativ sind.

(3) Es ist

$$\mu\left(\biguplus_{i \in I} E_i\right) = \sum_{x \in \biguplus_{i \in I} E_i} f(x) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{x \in E_i} f(x) \right) = \sum_{i \in I} \mu(E_i).$$

(4) Folgt aus (3).

(5) Folgt aus (3), da man $E \cup F$ disjunkt in die drei Mengen $E \cap (M \setminus F)$, $F \cap (M \setminus E)$ und $E \cap F$ zerlegen kann und somit

$$\begin{aligned} \mu(E \cup F) &= \mu(E \cap (M \setminus F)) + \mu(F \cap (M \setminus E)) + \mu(E \cap F) \\ &= \mu(E) - \mu(E \cap F) + \mu(F) - \mu(E \cap F) + \mu(E \cap F) \\ &= \mu(E) + \mu(F) - \mu(E \cap F) \end{aligned}$$

ist.

□

Die Eigenschaft (2) heißt die *Monotonie* und die Eigenschaft (3) heißt die *Additivität* eines Wahrscheinlichkeitsmaßes.

55.2. Laplace-Räume.

Definition 55.9. Es sei M eine endliche Menge. Dann nennt man die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\lambda: M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

die jedem Element $x \in M$ den konstanten Wert $\frac{1}{\#(M)}$ zuweist, die *Laplace-Dichte* auf M . Die Menge M versehen mit dieser Dichte heißt *Laplace-Raum*.

Bei einem Laplace-Raum sind alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich, deshalb spricht man auch von der *Gleichverteilung*. Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß, das auch *Laplace-Maß* genannt wird, ist besonders einfach, es ist

$$\mu(E) = \frac{\#(E)}{\#(M)},$$

d.h., es wird einfach der relative Anteil von E an M gemessen. Insofern wird hier das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten auf das Zählen von Teilmengen zurückgeführt. Bei Formulierungen wie „man wählt zufällig ein Element“ aus einer endlichen Menge M setzt man M als Laplace-Raum an.

Beispiel 55.10. Der Laplace-Raum zum einfachen Münzwurf besteht aus zwei Elementen, Kopf und Zahl, also

$$M = \{K, Z\},$$

und die Laplace-Dichte ist konstant gleich $\frac{1}{2}$, also

$$f(K) = f(Z) = \frac{1}{2}.$$

Beide Elementarereignisse sind also gleichwahrscheinlich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Es gibt nur vier Ereignisse, nämlich $\emptyset$, $\{K\}$, $\{Z\}$ und die Gesamtmenge $\{K, Z\}$, die leere Menge hat Wahrscheinlichkeit 0, die Gesamtmenge hat Wahrscheinlichkeit 1.

Ein Münzwurf ist zugleich eine Bernoulli-Verteilung und ein Laplace-Experiment.

Beispiel 55.11. Der Laplace-Raum zu einem einfachen Würfelwurf mit einem fairen Würfel besteht aus sechs Elementen, die den Seiten des Würfels entsprechen, und werden üblicherweise mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 durchnummeriert, es ist also

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Die Laplace-Dichte ist konstant gleich $\frac{1}{6}$, also

$$f(i) = \frac{1}{6}$$

für alle i . Die Elementarereignisse sind also gleichwahrscheinlich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Es gibt

$$2^6 = 64,$$

also 64 Ereignisse. Beispielsweise sind

$$\emptyset, \{2\}, \{6\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{x \in M \mid x \text{ ist gerade}\}, \{x \in M \mid x \geq 5\}$$

Ereignisse. Ihre Wahrscheinlichkeiten sind einfach zu berechnen, beispielsweise ist

$$\mu(\{2, 5\}) = \frac{\#(\{2, 5\})}{\#(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Beispiel 55.12. In Beispiel 13.9 haben wir die Anzahl der Möglichkeiten berechnet, 6 Kugeln aus 49 Kugeln zu ziehen, und zwar gibt es

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$$

Teilmengen. Diese haben alle die gleiche Wahrscheinlichkeit, somit liegt ein Laplace-Raum vor, wobei die einzelnen Elementarereignisse, also eine bestimmte Ziehung, die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{13983816}$$

besitzen.

Wenn man sich für die Wahrscheinlichkeit interessiert, dass die 11 gezogen wird, so muss man alle sechselementigen Teilmengen zählen, in denen die 11 vorkommt. Da die 11 festgelegt ist, geht es um die Anzahl der fünfelementigen Teilmengen der Menge $\{1, 2, \dots, 49\} \setminus \{11\}$, diese Anzahl ist durch $\binom{48}{5}$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeit ist also

$$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{\frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{6}{49},$$

was man sich auch so klar machen kann: Die Wahrscheinlichkeit, dass die zuerst gezogene Zahl eine 11 ist, beträgt $\frac{1}{49}$, die Wahrscheinlichkeit, dass die als zweite gezogene Zahl eine 11 ist, beträgt ebenfalls $\frac{1}{49}$, u.s.w., und aufsummieren der disjunkten Ereignisse liefert auch $\frac{6}{49}$.

Wenn man sich für die Wahrscheinlichkeit interessiert, dass sowohl die 11 als auch die 37 gezogen werden, so muss man alle sechselementigen Teilmengen zählen, in denen die 11 und die 37 vorkommen. Dies ergibt die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\binom{47}{4}}{\binom{49}{6}} = \frac{\frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{6 \cdot 5}{49 \cdot 48} = \frac{5}{49 \cdot 8} = \frac{5}{392}.$$

Bemerkung 55.13. Die Ziehung der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 beim Zahlenlotto ist gleichwahrscheinlich wie die Ziehung der Zahlen 3, 11, 19, 28, 33, 45. Dennoch scheint das zweite Ergebnis typischer als das erste zu sein. Das ist aber allein eine psychologisch bedingte Sichtweise. Bei einem zufälligen Experiment erwartet man einen chaotischen Ausgang ohne irgendeine Regelmäßigkeit, man erwartet nicht, im Ergebnis ein Muster zu erkennen. Man muss auch die Formulierung ernst nehmen. Es wird gesagt, dass die Ziehung von 1, 2, 3, 4, 5, 6 genau so wahrscheinlich ist wie die Ziehung von genau den sechs konkreten Zahlen 3, 11, 19, 28, 33, 45. Es wird nicht gesagt, dass die Ziehung von (etwas wie) 1, 2, 3, 4, 5, 6 gleichwahrscheinlich ist mit der Ziehung „von etwas wie“ 3, 11, 19, 28, 33, 45. Es gibt natürlich nur 44 mögliche Ziehungen (von 1, 2, 3, 4, 5, 6 über 2, 3, 4, 5, 6, 7 bis 44, 45, 46, 47, 48, 49), bei denen sechs hintereinanderliegende Zahlen gezogen werden, dieses Ereignis ist also sehr unwahrscheinlich.

Es ist ziemlich schwer, genau zu charakterisieren, was man unter „etwas wie 3, 11, 19, 28, 33, 45“ verstehen soll, oder was man unter einer typischen „chaotischen musterfreien Ziehung“. Betrachtet man 3, 11, 12, 28, 33, 45 ebenfalls als musterfrei, oder hält man das für ein außergewöhnliches Ergebnis, da immerhin zwei aufeinanderfolgende Zahlen gezogen wurden? Es ist jedenfalls erstaunlich, wie oft man im Zufälligen doch noch eine kleine Beobachtung des scheinbar Besonderen machen kann. In 3, 11, 19, 28, 33, 45 ist beispielsweise die Differenz der ersten drei Zahlen konstant gleich 8.

Beispiel 55.14. Beim Skat wird mit 32 Karten gespielt, wobei drei Spieler je zehn Karten bekommen und zwei Karten in den „Skat“ gehen. Unter den Karten spielen die vier Buben eine besondere Rolle. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A sämtliche Buben bekommt? Die Anzahl der möglichen „Hände“, die Spieler A bekommen kann, beträgt $\binom{32}{10}$. Die Anzahl der Hände, die alle vier Buben umfassen, sind $\binom{28}{6}$. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, alle Buben zu bekommen, gleich

$$\frac{\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} = \frac{\frac{28 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 23}{6 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1}}{\frac{32 \cdot 31 \cdot \dots \cdot 23}{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 31 \cdot 29} = \frac{21}{3596}.$$

Das sind ungefähr 0,58%.

Beispiel 55.15. Mit Lemma 55.8 lässt sich häufig die Wahrscheinlichkeit einfacher berechnen, insbesondere die unscheinbare Komplementregel ist hilfreich. Wenn man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit wissen möchte, dass in einer Lottoziehung die gezogenen Zahlen *nicht* alle in einer Reihe liegen, so könnte man ins Grübeln kommen, wie man diese Ereignismenge geschickt abzählt. Dagegen ist das Komplement einfach zu erfassen, davon gibt es nämlich 44 Stück und die Wahrscheinlichkeit davon ist somit $\frac{44}{13983816}$. Die komplementäre Wahrscheinlichkeit ist also

$$1 - \frac{44}{13983816} = \frac{13983816 - 44}{13983816} = \frac{13983772}{13983816}.$$

55. ARBEITSBLATT

55.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 55.1. Man werfe zehnmal mit einer Münze und notiere, wie oft Kopf und wie oft Zahl gefallen ist.

55.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 55.2. Wir betrachten den endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $\{a, b, c, d\}$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(a) = \frac{1}{20}, f(b) = \frac{1}{5} = \frac{4}{20}, f(c) = \frac{1}{4} = \frac{5}{20}, f(d) = \frac{1}{2} = \frac{10}{20}.$$

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- (1) $\{b, c\}$,
- (2) $\{a, b, c\}$,
- (3) $\{a, b, d\}$.

Aufgabe 55.3.*

Wir betrachten den endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $\{a, b, c, d, e\}$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(a) = \frac{1}{100}, f(b) = \frac{1}{25} = \frac{4}{100}, f(c) = \frac{1}{5} = \frac{20}{100},$$

$$f(d) = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}, f(e) = \frac{1}{2} = \frac{50}{100}.$$

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- (1) $\{a, e\}$,
- (2) $\{b, c, e\}$,
- (3) $\{a, c, d\}$,

(4) $\{a, b, d, e\}$.

Aufgabe 55.4. Es sei $\{a, b, c\}$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß μ . Die folgenden Beziehungen seien bekannt: $\mu(\{a\}) = \mu(\{b, c\})$, $\mu(\{a, c\}) = \frac{4}{5}$. Bestimme $\mu(\{x\})$ für jedes Elementarereignis.

Aufgabe 55.5. Es sei eine Bernoulli-Verteilung auf $\{0, 1\}$ gegeben. Das Ereignis 1 sei fünfmal so wahrscheinlich wie das Ereignis 0. Bestimme die Wahrscheinlichkeit von 0 in Prozent.

Aufgabe 55.6. In einem Laplace-Raum trete ein Elementarereignis mit der Wahrscheinlichkeit $3, \overline{3}\%$ ein. Wie viele Elemente besitzt der Raum?

Aufgabe 55.7. Lucy Sonnenschein wählt aus ihren Sommerkleidern zufällig eines aus. Sie besitzt vier gelbe, sieben rote, fünf blaue, zwei weiße und drei grüne Sommerkleider. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein grünes Kleid auswählt? Wie lautet die Wahrscheinlichkeit in Prozent?

Aufgabe 55.8. In der Klasse von Frau Maier-Sengupta gibt es 30 Schüler(innen). An jedem Tag kontrolliert sie von drei Schülern die Hausaufgaben. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass von Mustafa Müller heute die Hausaufgaben kontrolliert werden?

Aufgabe 55.9. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass beim Zahlenlotto ausschließlich Quadratzahlen gezogen werden.

Aufgabe 55.10.*

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass beim Zahlenlotto Zahlen gezogen werden, deren Summe 25 ergibt.

Aufgabe 55.11. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Zahlenlotto (genau) drei Richtige, vier Richtige oder fünf Richtige hat.

Aufgabe 55.12.*

Skat wird mit 32 Karten gespielt, dabei gibt es vier Könige und vier Damen (die Buben werden in dieser Aufgabe als Kinder betrachtet). Der „Skat“ besteht aus zwei zufälligen Karten und spielt eine besondere Rolle.

- (1) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Skat zwei Könige sind?
- (2) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Skat ein gleichgeschlechtliches Paar ist?
- (3) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Skat ein gemischtgeschlechtliches Paar ist?

Aufgabe 55.13.*

Mustafa Müller darf zu seinem n -ten Geburtstag aus seiner Klasse n Kinder einladen. Heute wird er 8, in seiner Klasse gibt es neben ihm 30 Kinder. Da alle Kinder nett sind, wählt er zufällig aus. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die 7 Kinder vom letztjährigen Geburtstag wieder eingeladen werden.

Die folgende Aussage wurden schon in Aufgabe 24.13 angesprochen. Man begründe sie algebraisch, geometrisch und stochastisch.

Aufgabe 55.14. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}_+$. Zeige

$$\min\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \max\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right).$$

Aufgabe 55.15. Aus den Zahlen $\{1, \dots, 100\}$ wird zufällig eine Zahl ausgewählt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Zahl

- (1) eine Quadratzahl,
- (2) eine Primzahl,
- (3) eine Schnapszahl,
- (4) eine durch 7 teilbare Zahl,

ist?

Aufgabe 55.16. Aus den Zahlen $\{1, \dots, 10\}$ werden zufällig drei Zahlen gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Maximum der Zahlen zumindest 8 ist.

Aufgabe 55.17. Aus den Zahlen $\{1, \dots, 10\}$ werden zufällig vier Zahlen gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es unter den gezogenen Zahlen keine Teilbarkeitsbeziehung gibt.

Aufgabe 55.18.*

Aus den Zahlen $\{1, \dots, n\}$ wird zufällig eine Zahl ausgewählt.

- (1) Erstelle in Abhängigkeit von n eine Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Zahl eine Quadratzahl ist.

- (2) Ist die Folge der Wahrscheinlichkeiten monoton?
- (3) Konvergiert diese Wahrscheinlichkeit, wenn n gegen unendlich geht?

Aufgabe 55.19. Aus den Zahlen $\{1, \dots, n\}$ wird zufällig eine Zahl ausgewählt. Es sei $p(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Primzahl gewählt wird.

- (1) Zeige, dass für n hinreichend groß

$$p(n) \leq \frac{1}{2}$$

ist.

- (2) Zeige, dass für n hinreichend groß

$$p(n) \leq \frac{1}{3}$$

ist.

55.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 55.20. (3 Punkte)

Wir betrachten den endlichen Wahrscheinlichkeitsraum

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\psi(a) = \frac{1}{945}, \psi(b) = \frac{1}{105} = \frac{9}{945}, \psi(c) = \frac{1}{45} = \frac{21}{945}, \psi(d) = \frac{1}{35} = \frac{27}{945},$$

$$\psi(e) = \frac{1}{27} = \frac{35}{945}, \psi(f) = \frac{1}{21} = \frac{45}{945}, \psi(g) = \frac{1}{15} = \frac{63}{945}, \psi(h) = \frac{1}{9} = \frac{105}{945},$$

$$\psi(i) = \frac{1}{7} = \frac{135}{945}, \psi(j) = \frac{1}{5} = \frac{189}{945}, \psi(k) = \frac{1}{3} = \frac{315}{945}.$$

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- (1) $\{a, f, j\}$,
- (2) $\{b, c, h, i, k\}$,
- (3) $\{a, c, d, g, i, k\}$,
- (4) $\{a, b, d, e, f, g\}$,
- (5) $\{c, d, e, g, h, i, k\}$,
- (6) $\{a, b, c, d, f, g, h, j, k\}$.

Aufgabe 55.21. (2 Punkte)

Es sei $\{a, b, c, d\}$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß μ . Die folgenden Werte seien bekannt:

$$\mu(\{a, b\}) = \frac{7}{12}, \mu(\{a, c\}) = \frac{8}{15}, \mu(\{b, c\}) = \frac{9}{20}.$$

Bestimme $\mu(\{x\})$ für jedes Elementarereignis.

Aufgabe 55.22. (2 Punkte)

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass beim Zahlenlotto ausschließlich Primzahlen gezogen werden.

Aufgabe 55.23. (3 Punkte)

Im Brötchenkorb befinden sich 5 normale Brötchen, 4 Laugenbrötchen, 2 Roggenbrötchen, 3 Körnerbrötchen und ein Sesambrötchen. Mustafa Müller wählt zum Frühstück zufällig zwei davon aus. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwei gleiche Brötchen auswählt?

Aufgabe 55.24. (5 Punkte)

Aus den Zahlen $\{1, \dots, 100\}$ werden zufällig fünf Zahlen gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Maximum der Zahlen zumindest 95 ist.

Aufgabe 55.25. (5 (1+2+2) Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}_+$ fixiert. Aus den Zahlen $\{1, \dots, n\}$ wird zufällig eine Zahl ausgewählt. Es sei $p(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Vielfaches von d gewählt wird.

- (1) Man gebe eine Formel für $p(n)$.
- (2) Ist die Folge dieser Wahrscheinlichkeiten monoton?
- (3) Zeige, dass $p(n)$ gegen $\frac{1}{d}$ konvergiert.

56. VORLESUNG - PRODUKTRÄUME

56.1. Produkte von endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen.

Beispiel 56.1. Eine Münze wird zweimal unabhängig voneinander hintereinander geworfen, und wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, wie oft dabei Zahl fällt. Die Möglichkeiten sind 0, 1, 2. Diese sind aber nicht gleichwahrscheinlich, sondern die 1 ist deutlich wahrscheinlicher als die 0 und die 2. Wenn man das Ereignis mit der möglichen Wertemenge $\{0, 1, 2\}$ beschreibt, so liegt kein Laplace-Raum vor. Es ist besser, die Gesamtsituation durch den Produktraum $\{K, Z\} \times \{K, Z\}$ zu beschreiben, wobei die Paare daraus die

möglichen Ausgänge des Gesamtexperimentes bezeichnen, bei dem das Ergebnis beim ersten Wurf an erster und das Ergebnis beim zweiten Wurf an zweiter Stelle notiert wird. Die möglichen Ergebnisse sind somit

$$(Z, Z), (Z, K), (K, Z), (K, K).$$

Diese Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich, d.h. mit diesem Produktraum wird das Gesamtexperiment durch einen Laplace-Raum beschrieben, bei dem jedes Elementarereignis die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ besitzt. Die ursprüngliche Frage nach der Wahrscheinlichkeit, wie oft insgesamt Zahl geworfen wird, wird mit Hilfe dieses Produktraumes dadurch beantwortet, dass man zählt, wie viele der Elementarereignisse zur Summenanzahl 0, 1, 2 führen. Somit besitzt keinmal Zahl die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$, einmal Zahl die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und zweimal Zahl die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$.

Die mehrfache Hintereinanderausführung eines Experimentes wird durch die Produktmenge, die Produktdichte und das Produktmaß mathematisch realisiert.

Definition 56.2. Es seien $(M_1, \mu_1), \dots, (M_n, \mu_n)$ endliche Wahrscheinlichkeitsräume mit zugehörigen Dichten f_i . Dann nennt man die Produktmenge $M_1 \times \dots \times M_n$ zusammen mit der durch

$$f(x_1, \dots, x_n) := f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichte den *Produktraum* der Wahrscheinlichkeitsräume.

Häufig nimmt man in jeder Komponente den gleichen Wahrscheinlichkeitsraum M , etwa, wenn man die n -fache Hintereinanderausführung eines Experimentes untersuchen möchte. Für den Produktraum schreibt man dann kurz M^n .

Beispiel 56.3. Es soll zehnmal mit einer Münze hintereinander geworfen werden. Mit dem Grundraum

$$M = \{K, Z\}$$

wird dies dann mit dem Produktraum

$$N = M^{10}$$

beschrieben, die Elemente im Produktraum dokumentieren einen möglichen Ausgang des Gesamtexperimentes, es handelt sich um sämtliche Kombinationen der Länge 10 aus K oder Z , „typische“ Elemente sind

$$(Z, Z, K, Z, K, K, Z, K, K, Z), (K, K, Z, K, K, K, Z, K, Z, K), \\ (Z, Z, Z, Z, Z, Z, Z, Z, Z, Z).$$

Diese haben alle die Wahrscheinlichkeit

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{2^{10}}.$$

Lemma 56.4. *Es seien $(M_1, \mu_1), \dots, (M_n, \mu_n)$ endliche Wahrscheinlichkeitsräume und*

$$M = M_1 \times \dots \times M_n$$

der Produktraum. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) *Der Produktraum ist in der Tat ein Wahrscheinlichkeitsraum.*
- (2) *Für Teilmengen $T_1 \subseteq M_1, \dots, T_n \subseteq M_n$ ist*

$$\mu(T_1 \times \dots \times T_n) = \mu_1(T_1) \cdots \mu_n(T_n).$$

Beweis. Es seien f_i die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten.

- (1) Unter Verwendung des allgemeinen Distributivgesetzes in der Form von Aufgabe 11.8 gilt

$$\begin{aligned} \sum_{x \in M} f(x) &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in M_1 \times \dots \times M_n} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \\ &= \left(\sum_{x_1 \in M_1} f_1(x_1) \right) \cdots \left(\sum_{x_n \in M_n} f_n(x_n) \right) \\ &= 1 \cdots 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

- (2) Es ist entsprechend

$$\begin{aligned} \mu(T_1 \times \dots \times T_n) &= \sum_{x \in T_1 \times \dots \times T_n} f(x) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in T_1 \times \dots \times T_n} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \\ &= \left(\sum_{x_1 \in T_1} f_1(x_1) \right) \cdots \left(\sum_{x_n \in T_n} f_n(x_n) \right) \\ &= \mu_1(T_1) \cdots \mu_n(T_n). \end{aligned}$$

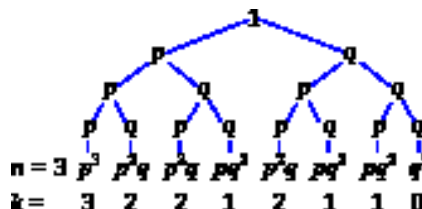
□

Bemerkung 56.5. Zu Laplace-Räumen $(M_1, \mu_1), \dots, (M_n, \mu_n)$ mit

$$\#(M_i) = k_i$$

ist der Produktraum $M_1 \times \dots \times M_n$ ebenfalls ein Laplace-Raum mit $k_1 \cdots k_n$ Elementen. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Produktraumes und aus Satz 9.6.

56.2. Die Binomialverteilung.



Definition 56.6. Sei $p \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Die endliche Wahrscheinlichkeitsdichte $B_{p,n}$ auf $M = \{0, 1, \dots, n\}$ mit

$$B_{p,n}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

heißt *Binomialverteilung* zur Stichprobenlänge n und zur Erfolgswahrscheinlichkeit p .

Lemma 56.7. Die Binomialverteilung zu $p \in [0, 1]$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\{0, 1, \dots, n\}$.

Beweis. Wir müssen lediglich nachweisen, dass

$$\sum_{k=0}^n B_{p,n}(k) = 1$$

ist. Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$\begin{aligned}
 1 &= 1^n \\
 &= (p + (1-p))^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n B_{p,n}(k),
 \end{aligned}$$

was die Behauptung bestätigt. □

Lemma 56.8. Es sei $M = \{0, 1\}$ mit der Bernoulli-Verteilung zur Wahrscheinlichkeit p versehen und es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei

$$N = M^n$$

das n -fache Produkt von M mit sich selbst. Dann besitzt zu $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ das Ereignis

$$E_k = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = k \right\}$$

die Wahrscheinlichkeit

$$B_{p,n}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Beweis. Da jedes x_i nur den Wert 0 oder 1 haben kann, gilt $\sum_{i=1}^n x_i = k$ genau dann, wenn in

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

genau k -fach eine 1 (und $n-k$ -fach eine 0 steht). Diese Tupel entsprechen den k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$, davon gibt es nach Satz 13.6 $\binom{n}{k}$ Stück. Die Wahrscheinlichkeit für ein solches einzelnes Tupel von diesem Typ ist nach der Definition der Produktwahrscheinlichkeit gleich $p^k(1-p)^{n-k}$. Somit ist die Gesamtwahrscheinlichkeit von E_k gleich

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

□

Satz 56.9. *Es sei ein Experiment gegeben, das nur die Werte 0 und 1 annehmen kann und bei dem der Wert 1 die Wahrscheinlichkeit p besitzt. Dann ist die Verteilung auf $\{0, 1, \dots, n\}$, die die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass bei der n -fachen (unabhängigen) Hintereinanderausführung des Experimentes k -fach das Ereignis 1 eintritt, durch die Binomialverteilung zur Stichprobenlänge n und zur Erfolgswahrscheinlichkeit p gegeben.*

Beweis. Das Experiment wird durch die Bernoulli-Verteilung auf $M = \{0, 1\}$ mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p beschrieben. Die n -fache Hintereinanderausführung wird somit durch den Produktraum M^n beschrieben. Das Ereignis

$$E_k \subseteq M^n,$$

das beschreibt, dass genau k -fach 1 eintritt, besitzt nach Lemma 56.8 die Wahrscheinlichkeit

$$B_{p,n}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

□

Korollar 56.10. *Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem n -fachen Münzwurf genau k -fach Kopf fällt, beträgt*

$$B_{\frac{1}{2},n}(k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 56.9, da bei $p = \frac{1}{2}$ die Gleichheit

$$p^k(1-p)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

gilt.

□

56.3. Das Gesetz der großen Zahlen.



Jakob Bernoulli (1655-1705) bewies erstmals das Gesetz der großen Zahlen für den Münzwurf.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie interessiert man sich häufig für asymptotische Aussagen. Dass bei einem einzelnen Münzwurf Kopf und Zahl gleichwahrscheinlich ist, ist eine plausible Definition, aber selbst noch nicht sehr aussagestark. Eine gehaltvolle Aussage wird erst dann daraus, wenn man zeigen kann, dass bei einer häufigen Wiederholung des Experimentes die relative Häufigkeit, wie oft Kopf fällt, sich in der Nähe von $\frac{1}{2}n$ befindet, wenn n die Anzahl der Wiederholungen bezeichnet. In diesem Kontext ist es zunächst wichtig, sich klar zu machen, was eine sinnvolle Formulierung sein könnte und wie hier „in der Nähe von“ zu verstehen ist. Insbesondere muss man sich klar machen, was zu viel erwartet wäre. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem n -fachen Münzwurf (mit n gerade) genau $n/2$ -oft Kopf fällt, gleich $\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n}$ nach Korollar 56.10. Dies ist wahrscheinlicher als jedes andere Ergebnis für die Anzahl der Kopfwürfe. Wenn aber n gegen unendlich strebt, so wird diese Wahrscheinlichkeit beliebig klein, sie konvergiert gegen 0. Auch wenn man einen gewissen Abstand zu der Mitte $n/2$ fixiert, wie wenn man sagt, dass die Anzahl der Kopfwürfe zwischen $n/2 - 10$ und $n/2 + 10$ liegen soll, so geht die Wahrscheinlichkeit dafür gegen 0 für n gegen unendlich. Dies klingt einleuchtend, wenn man sich ein großes n betrachtet. Dass bei einer Million an Münzwürfen die Kopfanzahl im (relativ gesehen kleinen) Intervall $[499990, 5000010]$ liegen soll, ist doch nicht zu erwarten. Anders sieht es aus, wenn man „in der Nähe von“ anteilig bzw. prozentual versteht. Wenn man sich Intervalle der Form

$$\left[\frac{n}{2} - \frac{n}{10}, \frac{n}{2} + \frac{n}{10}\right]$$

anschaut, so sind dies für einige Zehnerpotenzen die Intervalle $[4, 6]$, $[40, 60]$, $[400, 600]$, $[400000, 600000]$, und unser stochastisches Gefühl sagt uns, dass die Wahrscheinlichkeiten zunehmend größer werden, dass die Anzahlen der Kopfwürfe in diesen Intervallen liegen. Diese Beobachtung wird durch das

Gesetz der großen Zahlen präzisiert. Es gibt eine ganze Reihe von Aussagen unter diesem Namen, wir beschränken uns auf den Fall eines Münzwurfes. Das folgende Lemma beinhaltet die entscheidenden Abschätzungen, um das Gesetz der großen Zahlen für den Münzwurf zu beweisen. Zur Orientierung: Im zuletzt erwähnten Beispiel muss man $\beta = 0,1$ nehmen, es ist $n = 1000000$ und $\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor = 400000$. Der Beweis liefert eine Abschätzung nach oben dafür, dass bei einem millionenfachen Münzwurf höchstens 400000-mal Zahl geworfen wird.

Lemma 56.11. *Es sei $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$, fixiert und $n \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es ist $\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.*

(2) *Es ist*

$$\binom{n}{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor} \leq \left(\left(\frac{1}{1 + 2\beta} \right)^\beta \right)^n \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}.$$

(3) *Es ist*

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor} \binom{n}{k} \leq \left(\frac{n}{2} + 1 - \lfloor \beta n \rfloor \right) \cdot \left(\left(\frac{1}{1 + 2\beta} \right)^\beta \right)^n \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}.$$

(4) *Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert der Ausdruck*

$$\frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor} \binom{n}{k} \right)$$

gegen 0.

Beweis. (1) Siehe Aufgabe 56.18.

(2) Nach Aufgabe 13.18 ist

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}.$$

Somit besteht zwischen $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ und $\binom{n}{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor}$ der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \binom{n}{\frac{n}{2}} &= \frac{\frac{n}{2} + 1}{\frac{n}{2}} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2} - 1} \\ &= \frac{\frac{n}{2} + 1}{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\frac{n}{2} + 2}{\frac{n}{2} - 1} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2} - 2} \\ &= \frac{\frac{n}{2} + 1}{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\frac{n}{2} + 2}{\frac{n}{2} - 1} \cdots \frac{\frac{n}{2} + \lfloor \beta n \rfloor + 1}{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet umgekehrt

$$\binom{n}{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor} = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2} + 1} \cdot \frac{\frac{n}{2} - 1}{\frac{n}{2} + 2} \cdots \frac{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor}{\frac{n}{2} + \lfloor \beta n \rfloor + 1} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}$$

$$= \frac{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor}{\frac{n}{2} + 1} \cdot \frac{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor + 1}{\frac{n}{2} + 2} \cdots \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2} + \lfloor \beta n \rfloor + 1} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}.$$

Die Faktoren sind alle von der Form

$$\frac{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor - 1 + i}{\frac{n}{2} + i}$$

mit $i = 1, \dots, \lfloor \beta n \rfloor + 1$. Sie sind alle < 1 und für das maximale i , also für $\lfloor \beta n \rfloor + 1$, am größten. Da es $\lfloor \beta n \rfloor + 1$ viele Faktoren gibt, kann man das Produkt unter Verwendung von Lemma 25.18 (1), Lemma 53.5 (6) und Lemma 53.5 (8) durch

$$\begin{aligned} \left(\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2} + \lfloor \beta n \rfloor + 1} \right)^{\lfloor \beta n \rfloor + 1} &\leq \left(\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2} + \beta n} \right)^{\lfloor \beta n \rfloor + 1} \\ &\leq \left(\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2} + \beta n} \right)^{\beta n} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \beta} \right)^{\beta n} \\ &= \left(\left(\frac{1}{1 + 2\beta} \right)^{\beta} \right)^n \end{aligned}$$

nach oben abschätzen. Also ist

$$\binom{n}{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor} \leq \left(\left(\frac{1}{1 + 2\beta} \right)^{\beta} \right)^n \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}.$$

- (3) Dies folgt aus (2), da die Binomialkoeffizienten in diesem Bereich wachsend sind und da es $\left(\frac{n}{2} + 1 - \lfloor \beta n \rfloor\right)$ Summanden gibt.
- (4) Nach (1) konvergiert $\frac{\binom{n/2}{n/2}}{2^n}$ gegen 0. Nach (3) genügt es daher, zu zeigen, dass

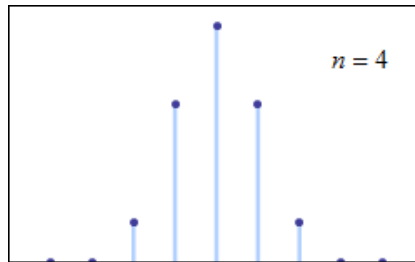
$$\left(\frac{n}{2} + 1 - \lfloor \beta n \rfloor \right) \left(\left(\frac{1}{1 + 2\beta} \right)^{\beta} \right)^n$$

gegen 0 konvergiert. Dieser Ausdruck ist aber (beschränkt durch) von der Form

$$n \cdot \gamma^n$$

mit $\gamma < 1$, also nach Satz 27.2 konvergent gegen 0.

□



Die geeignet normierte Binomialverteilung zu $\frac{1}{2}$ „konvergiert“ gegen die sogenannte Normalverteilung.

Satz 56.12. Zu jedem $\alpha < \frac{1}{2}$ konvergiert die Folge

$$\frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \alpha n \rfloor} B_{\frac{1}{2}, n}(k) \right)$$

gegen 0. Das bedeutet, dass die relative Häufigkeit bei einem n -fach wiederholten Bernoulli-Experiment zur Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ bei n hinreichend groß mit beliebig hoher Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\alpha n, (1 - \alpha)n]$ liegt.

Beweis. Wir schreiben

$$\beta = \frac{1}{2} - \alpha > 0.$$

Somit ergibt sich die Aussage direkt aus Lemma 56.11 (4). □

56. ARBEITSBLATT

56.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 56.1. Eine faire Münze werde zehnmal hintereinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei genau einmal ein Wechsel von Kopf nach Zahl oder umgekehrt eintritt?

56.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 56.2. Eine faire Münze werde zehnmal hintereinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Münzseite mit jedem Wurf ändert?

Aufgabe 56.3.*

Was ist wahrscheinlicher: Ein Lottogewinn mit sechs Richtigen oder, dass bei einem 24-fachen Münzwurf stets Kopf fällt?

Aufgabe 56.4. Im Brötchenkorb der Familie Ngolo befinden sich drei Laugenbrötchen, zwei normale Brötchen, eine Brezel und zwei Scheiben Graubrot. Im Marmeladenkorb befindet sich Himbeermarmelade, Erdbeermarmelade, Quittenmarmelade und Waldrandhonig. Folgende Kombinationen machen Heinz Ngolo am Morgen glücklich:

- Laugenbrötchen mit Himbeermarmelade.
- Ein normales Brötchen mit Waldrandhonig.
- Eine Brezel mit beliebigem Aufstrich außer Quittenmarmelade.
- Erdbeermarmelade, außer mit Graubrot.

Heinz wählt zufällig aus den beiden Körben eine Backware und einen Aufstrich aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sein Tag glücklich anfängt?

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Aufgabe 56.5. Ein Würfel werde zweimal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Augensumme gleich $2, 3, \dots, 12$ ist.

Aufgabe 56.6. Ein Würfel werde zweimal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass das Produkt der Augenzahlen gleich $1, 2, 3, \dots, 36$ ist.

Aufgabe 56.7. Ein Würfel werde zweimal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Augensumme mindestens so groß wie das Produkt der Augenzahlen ist.

Aufgabe 56.8. Ein fairer Würfel werde sechsmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich dabei keine Augenzahl wiederholt?

Aufgabe 56.9.*

Wir betrachten die Produktmenge $\{K, Z\} \times \{K, Z\}$ und ihre Teilmengen. Fridolin sagt:

„Jede Teilmenge der Produktmenge ist selbst ein Produkt von Teilmengen. Die Menge $\{K, Z\}$ hat nämlich zwei Elemente, deshalb besitzt ihre Potenzmenge $2^2 = 4$ Elemente. Eine Produktmenge zu zwei Teilmengen besitzt die Form $E_1 \times E_2$. Da hier jede Kombination erlaubt ist, muss es $4 \cdot 4 = 16$ Teilmengen geben, die selbst Produktmengen sind. Die Produktmenge $\{K, Z\} \times \{K, Z\}$ besitzt 4 Elemente, somit besitzt ihre Potenzmenge 16 Elemente. Somit gibt es überhaupt 16 Ereignisse in der Produktmenge und 16 Produktereignisse, also ist jedes Ereignis ein Produktereignis“.

- (1) Ist diese Aussage korrekt?
- (2) Ist diese Argumentation korrekt?

Aufgabe 56.10. Es seien $M_1, \dots, M_n$ endliche Wahrscheinlichkeitsräume und es sei der Produktraum $M_1 \times \dots \times M_n$ ein Laplace-Raum. Zeige, dass jeder M_i ein Laplace-Raum ist.

Aufgabe 56.11. Eine Münze werde achtmal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten, dass dabei keinmal, einmal, zweimal, dreimal, ..., achtmal eine Zahl geworfen wird.

Aufgabe 56.12. Durch langjährige Beobachtungen weiß man, dass Heinz in einer Mathearbeit mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ eine Zwei oder besser schreibt. Im Schuljahr werden vier Arbeiten geschrieben. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Heinz keinmal, einmal, zweimal, dreimal, viermal eine Zwei oder besser hat?

Die folgende Aufgabe ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe 8.30. Die Formel wird *Siebformel* genannt.

Aufgabe 56.13. Es sei G eine Menge und es seien $M_i \subseteq G$, $i = 1, \dots, n$, endliche Teilmengen. Für eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ sei

$$M_J = \bigcap_{i \in J} M_i.$$

Beweise die Anzahlformel

$$\# \left(\bigcup_{i=1}^n M_i \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{J \subseteq \{1, \dots, n\}, \#(J)=k} \#(M_J) \right).$$

Aufgabe 56.14. Es sei (M, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $E_i \subseteq M$, $i = 1, \dots, n$, Ereignisse in M . Für eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ sei

$$E_J = \bigcap_{i \in J} E_i.$$

Beweise die folgende Formel für die Wahrscheinlichkeit

$$P \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{J \subseteq \{1, \dots, n\}, \#(J)=k} P(E_J) \right).$$

Aufgabe 56.15.*

Es sei $K = \mathbb{Z}/(11)$ der Körper mit elf Elementen. Im Vektorraum K^2 werden zufällig drei Punkte ausgewählt, wobei Wiederholungen erlaubt sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen?

Aufgabe 56.16. Eine faire Münze werde sechsmal hintereinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei viermal hintereinander Kopf geworfen wird?

Aufgabe 56.17.*

Eine faire Münze werde zehnmal geworfen. Wir interessieren uns für die Anzahl, wie oft Kopf geworfen wurde.

- (1) In welchem minimalen Bereich der Form $\{5 - k, \dots, 5 + k\}$ liegt die Anzahl der Kopfwürfe mit einer Wahrscheinlichkeit von $\geq 0,9$.
- (2) In welchem minimalen Bereich der Form $\{5 - k, \dots, 5 + k\}$ liegt die Anzahl der Kopfwürfe mit einer Wahrscheinlichkeit von $\geq 0,6$.
- (3) In welchem minimalen Bereich der Form $\{5 - k, \dots, 5 + k\}$ liegt die Anzahl der Kopfwürfe mit einer Wahrscheinlichkeit von $\geq 25\%$.

Aufgabe 56.18. Zeige, dass die Folge

$$x_n = \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot 2^{-n}$$

für n gerade gegen 0 konvergiert.

Tipp: Betrachte den Faktor zwischen x_n und x_{n+1} . Dann hilft Aufgabe 47.20.

Aufgabe 56.19. Man gebe eine hinreichend große Zehnerpotenz $n = 10^k$ derart an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem n -fachen Münzwurf die Anzahl der Kopfwürfe zwischen $\frac{n}{2} - 10$ und $\frac{n}{2} + 10$ liegt, kleiner als $\frac{1}{10}$ ist.

Aufgabe 56.20.*

Zeige durch Induktion, dass für die Fakultät für $n \geq 3$ die Abschätzung

$$n! \leq \left(\frac{3}{4}n\right)^n$$

gilt.

Aufgabe 56.21. Zeige durch Induktion, dass für die Fakultät die Abschätzung

$$n! \geq \left(\frac{1}{3}n\right)^n$$

gilt.

Aufgabe 56.22.*

Es sei α eine rationale Zahl mit

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Zeige

$$\alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha} < \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 56.23.*

Es sei A das Ereignis, dass bei einem zehnfachen Münzwurf keinmal Kopf fällt, und es sei B das Ereignis, dass bei einem hundertfachen Münzwurf höchstens zehnmal Kopf fällt. Welches Ereignis ist wahrscheinlicher?

Aufgabe 56.24.*

Wir betrachten, analog zum Pascalschen Dreieck, die folgende Rekursionsvorschrift und das dadurch erzeugte Dreieck. Rekursionsanfang: In der nullten Zeile steht an der mittleren Stelle eine 1 (alle Zeilen kann man sich durch beliebig viele Nullen nach links und nach rechts aufgefüllt denken). Rekursionsschritt: Aus einer Zeile ergibt sich die nächste Zeile, indem man aus zwei benachbarten Zahlen der Zeile das arithmetische Mittel bildet und dieses in der nächsten Zeile unterhalb der beiden Zahlen hinschreibt.

- (1) Bestimme die ersten fünf Zeilen (also Zeile 0 bis Zeile 4).
- (2) Begründe induktiv, dass in jeder Zeile die Summe aller Einträge gleich 1 ist.
- (3) Zeige, dass in der n -ten Zeile die Zahlen $B_{\frac{1}{2},n}(k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, der Binomialverteilung stehen.

56.3. Aufgaben zum Abgeben.**Aufgabe 56.25.** (2 Punkte)

Lucy Sonnenschein besitzt einen blauen, einen grünen und zwei rote Hüte, ferner besitzt sie drei blaue Blusen, zwei gelbe Blusen, eine grüne Bluse, vier rote Blusen und eine weiße Bluse, ferner besitzt sie drei rote Röcke, zwei grüne Röcke, einen schwarzen Rock und drei blaue Röcke. Für heute wählt sie zufällig einen Hut, eine Bluse und einen Rock aus. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie heute einfarbig in die Schule geht?

Aufgabe 56.26. (5 Punkte)

Eine faire Münze werde zehnmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei siebenmal hintereinander Kopf geworfen wird?

Aufgabe 56.27. (4 (2+2) Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei M die Menge aller Abbildungen von $\{1, \dots, n\}$ nach $\{1, \dots, n\}$. Es wird zufällig eine Abbildung ausgewählt.

- (1) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Abbildung bijektiv ist?
- (2) Es sei $p(n)$ diese Wahrscheinlichkeit. Kann man eine Konvergenzaussage für diese Folge machen?

Aufgabe 56.28. (4 Punkte)

Gabi Hochster, Heinz Ngolo, Lucy Sonnenschein, Mustafa Müller und Conchita Cauchy wollen untereinander wichteln. Jede Person soll also genau von

einer Person ein Geschenk bekommen, aber natürlich nicht von sich selbst. Sie ziehen zufällig aus Lucys Hut die Namen, wenn jemand seinen eigenen Namen zieht, fangen sie nochmal von vorne an. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Namensziehung wickelkonform ist?

Aufgabe 56.29. (4 Punkte)

Eine faire Münze werde zwanzigmal geworfen. Wir interessieren uns für die Anzahl, wie oft Kopf geworfen wurde. In welchem minimalen Bereich der Form $\{10 - k, \dots, 10 + k\}$ liegt die Anzahl der Kopfwürfe mit einer Wahrscheinlichkeit von $\geq 0,9$?

57. VORLESUNG - UNABHÄNGIGKEIT

57.1. Unabhängige Ereignisse.

Definition 57.1. Zwei Ereignisse E und F in einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (M, P) heißen *unabhängig*, wenn

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$$

ist.

Man spricht auch von *stochastischer Unabhängigkeit*. Wenn die Ereignisse nicht unabhängig sind, werden sie abhängig genannt.

Lemma 57.2. *Es sei (M, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.*

- (1) *Jedes Ereignis ist zu $\emptyset$ und zu M unabhängig.*
- (2) *Wenn die Ereignisse E und F unabhängig sind, so sind auch E und $M \setminus F$ unabhängig.*
- (3) *Wenn ein Ereignis E zu sich selbst unabhängig ist, so ist*

$$P(E) = 0 \text{ oder } 1.$$

Beweis. (1) Für die leere Menge gilt

$$P(E \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(E) \cdot P(\emptyset)$$

und für die Gesamtmenge ist

$$P(E \cap M) = P(E) = P(E) \cdot 1 = P(E) \cdot P(M).$$

- (2) Seien E und F unabhängig. Dann ist nach Lemma 55.8 (3)

$$\begin{aligned} P(E \cap (M \setminus F)) &= P(E \setminus E \cap F) \\ &= P(E) - P(E \cap F) \\ &= P(E) - P(E) \cdot P(F) \\ &= P(E)(1 - P(F)) \\ &= P(E)P(M \setminus F), \end{aligned}$$

was die behauptete Unabhängigkeit bedeutet.

(3) Die Unabhängigkeit von E mit sich selbst bedeutet

$$P(E) = P(E \cap E) = P(E) \cdot P(E) = P(E)^2,$$

diese Gleichung erfüllen nur die Zahlen 0 und 1.

□

Beispiel 57.3. Wir betrachten einen Würfelwurf mit dem Laplace-Raum $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und dabei die Ereignisse

$$G = \{2, 4, 6\},$$

$$U = \{1, 3, 5\}$$

und

$$E = \{1, 2\}.$$

Die Ereignisse E und G sind unabhängig, da

$$E \cap G = \{2\}$$

und somit

$$P(E \cap G) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(E) \cdot P(G).$$

Ebenso sind E und U unabhängig (dies folgt auch aus Lemma 57.2 (2)). Dagegen sind G und U nicht unabhängig, da

$$G \cap U = \emptyset$$

ist, aber beide Ereignisse eine positive Wahrscheinlichkeit haben.



Beispiel 57.4. In einem Papageienhaus sind die beiden Geschlechter gleichmäßig verteilt und ebenso sind die Farben rot, gelb und grün gleichmäßig und unabhängig vom Geschlecht verteilt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Papagei ein rotes Weibchen ist, gleich

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Beispiel 57.5. Wir betrachten die Ziehung der Lottozahlen. Sind die Ereignisse, dass zwei bestimmte Zahlen gezogen werden, unabhängig voneinander? Dazu müssen wir die relevanten Wahrscheinlichkeiten berechnen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zahl, sagen wir die 17 gezogen wird, ist, wie in Beispiel 55.12 berechnet, gleich $\frac{6}{49}$. Diese Wahrscheinlichkeit ist für jede Zahl gleich. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Zahlen gezogen werden, sagen wir die 17 und die 31, ist, ebenfalls wie in Beispiel 55.12 berechnet, gleich

$$\frac{5}{392} = 0,012755102....$$

Die Produktwahrscheinlichkeit der beiden einzelnen Ereignisse ist hingegen

$$\frac{6}{49} \cdot \frac{6}{49} = \frac{36}{2401} = 0,014993753....$$

Die Ereignisse sind also nicht unabhängig.

Beispiel 57.6. Es sei ein Laplace-Raum M gegeben, dessen Anzahl eine Primzahl p ist. Dann sind zwei Ereignisse $E, F \subseteq M$ nur dann unabhängig, wenn einer von ihnen leer oder gleich M ist. Die Unabhängigkeitsbedingung bedeutet ja für einen Laplaceraum

$$\frac{\#(E \cap F)}{p} = \frac{\#(E)}{p} \cdot \frac{\#(F)}{p}.$$

Dies bedeutet

$$p \cdot \#(E \cap F) = \#(E) \cdot \#(F).$$

Somit teilt die Primzahl p das Produkt $\#(E) \cdot \#(F)$. Nach dem Lemma von Euklid kann das nur sein, wenn p einen der Faktoren teilt. Dann muss aber die Anzahl eines Faktors, sagen wir von $\#(E)$, gleich 0 oder p sein, was $E = \emptyset$ oder $E = M$ bedeutet.

Zu einer Produktmenge $M_1 \times \cdots \times M_n$ und zu $i \in \{1, \dots, n\}$ heißt die Abbildung

$$q_i: M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow M_i, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i,$$

die i -te *Projektion*. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M_i$ nennen wir das Urbild

$$q_i^{-1}(T) = M_1 \times \cdots \times M_{i-1} \times T \times M_{i+1} \times \cdots \times M_n$$

auch den *Zylinder* über T .

Lemma 57.7. *Es seien $(M_1, P_1), \dots, (M_n, P_n)$ endliche Wahrscheinlichkeitsräume und*

$$M = M_1 \times \cdots \times M_n$$

der Produktraum. Dann sind zu Ereignissen $E_i \subseteq M_i$ und $E_j \subseteq M_j$ mit $i \neq j$ die Zylindermengen $q_i^{-1}(E_i)$ und $q_j^{-1}(E_j)$ unabhängig.

Beweis. Es ist (sagen wir $i < j$)

$$\begin{aligned} & q_i^{-1}(E_i) \cap q_j^{-1}(E_j) \\ = & (M_1 \times \cdots \times M_{i-1} \times E_i \times M_{i+1} \times \cdots \times M_n) \\ & \cap (M_1 \times \cdots \times M_{j-1} \times E_j \times M_{j+1} \times \cdots \times M_n) \\ = & M_1 \times \cdots \times M_{i-1} \times E_i \times M_{i+1} \times \cdots \times M_{j-1} \times E_j \times M_{j+1} \times \cdots \times M_n, \end{aligned}$$

somit folgt die Aussage aus Lemma 56.4 (2). $\square$

Diese Aussage bedeutet beispielsweise, dass bei der Hintereinanderausführung von Münzwürfen der i -te Münzwurf vom j -ten Münzwurf ($i \neq j$) unabhängig ist. Dies ist natürlich intuitiv klar, die vorstehende Aussage ist eine Bestätigung dafür, dass die Modellierung eines wiederholten Experimentes durch einen Produktraum und das oben formulierte Konzept der Unabhängigkeit sinnvoll sind.

Definition 57.8. Es sei ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum (M, P) gegeben. Die Ereignisse

$$E_1, \dots, E_k \subseteq M$$

heißen *paarweise unabhängig*, wenn

$$P(E_i \cap E_j) = P(E_i) \cdot P(E_j)$$

für alle $i \neq j$ ist.

Das bedeutet einfach, dass je zwei Mengen der E_i unabhängig sind.

Definition 57.9. Es sei ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum (M, P) gegeben. Die Ereignisse $E_1, \dots, E_k \subseteq M$ heißen *vollständig unabhängig*, wenn für jedes r , $2 \leq r \leq k$, und jede r -elementige Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ die Gleichheit

$$P\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) = \prod_{i \in I} P(E_i)$$

gilt.

Da insbesondere für zweielementige Teilmengen diese Gleichung gelten muss, impliziert die vollständige Unabhängigkeit die paarweise Unabhängigkeit. Wenn I die Form

$$I = \{i_1, \dots, i_r\}$$

hat, so bedeutet die Unabhängigkeit einfach

$$P(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_r}) = P(E_{i_1}) \cdots P(E_{i_r}).$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass die vollständige Unabhängigkeit echt stärker als die paarweise Unabhängigkeit ist.

Beispiel 57.10. Wir betrachten einen dreifachen Münzwurf, also den Wahrscheinlichkeitsraum $\{Z, K\}^3$ mit $p = \frac{1}{2}$. Das Ereignis, dass bei den ersten beiden Würfeln das gleiche Ergebnis herauskommt (also beide Mal Kopf oder beidemal Zahl), sei mit E bezeichnet, das Ereignis, dass beim ersten und

beim dritten Wurf das gleiche Ergebnis herauskommt, sei mit F bezeichnet, und das Ereignis, dass beim zweiten und beim dritten Wurf das gleiche Ergebnis herauskommt, sei mit G bezeichnet. Wir behaupten, dass diese Ereignisse paarweise unabhängig sind, aber nicht vollständig unabhängig. Zu E gehören genau die Elementarereignisse der Form (K, K, X) und (Z, Z, X) , das sind vier Stück. Somit ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse E, F, G stets $\frac{1}{2}$. Das Ereignis E und F tritt genau dann ein, wenn alle drei Münzwürfe das gleiche Ergebnis haben, also nur bei (K, K, K) oder (Z, Z, Z) . Die Wahrscheinlichkeit davon ist also

$$P(E \cap F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(E) \cdot P(F).$$

Entsprechendes gilt für die Paare E und G und F und G . Wenn man dagegen alle drei Ereignisse miteinander schneidet, so ist

$$E \cap F \cap G = \{(K, K, K), (Z, Z, Z)\} = E \cap F = E \cap G = F \cap G.$$

Die Wahrscheinlichkeit davon ist nach wie vor $\frac{1}{4}$, aber das Produkt der drei Einzelwahrscheinlichkeiten ist

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Beispiel 57.11. Es werde eine Münze n -mal hintereinander geworfen. Wir interessieren uns für die Ereignisse E_i , dass sich das Ergebnis vom $i-1$ -ten zum i -ten Wurf ändert ($i = 2, \dots, n$). Sind diese Ereignisse vollständig unabhängig? Das ist nicht so unmittelbar klar, da ja E_i und E_{i+1} beide auf den i -ten Wurf Bezug nehmen. Trotzdem sind diese Ereignisse vollständig unabhängig. Sei dazu $2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$ fixiert. Ein Wechsel an der i -ten Stelle (verglichen zum Vorgängerwurf) hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Wenn E_i gelten soll, so ist der i -te Würfelwurf durch das Ergebnis des $(i-1)$ -ten Würfelwurfs festgelegt. Wenn das Ereignis $E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_r}$ gelten soll, so gibt es keinerlei Bedingung an den Stellen i mit $i \neq i_j$ für alle j , während dadurch an den Stellen i_j alles fixiert ist. Somit gibt es 2^{n-r} günstige Kombinationen für dieses Durchschnittsereignis. Seine Wahrscheinlichkeit ist somit

$$\frac{2^{n-r}}{2^n} = \frac{1}{2^r} = \left(\frac{1}{2}\right)^r,$$

was mit dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten übereinstimmt.

Lemma 57.12. Es seien $(M_1, P_1), \dots, (M_n, P_n)$ endliche Wahrscheinlichkeitsräume und

$$M = M_1 \times \dots \times M_n$$

der Produktraum. Es seien Ereignisse $E_1 \subseteq M_1, E_2 \subseteq M_2, \dots, E_n \subseteq M_n$ gegeben und es seien $\tilde{E}_i$ die zugehörigen Zylindermengen im Produktraum, also

$$\tilde{E}_i = M_1 \times \dots \times M_{i-1} \times E_i \times M_{i+1} \times \dots \times M_n = q_i^{-1}(E_i).$$

Dann sind die Ereignisse $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n$ vollständig unabhängig.

Beweis. Es sei $I \subseteq \{1, \dots, n\}$. Dann ist

$$\bigcap_{i \in I} \tilde{E}_i = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n,$$

wobei

$$F_i = E_i$$

ist, falls $i \in I$ ist, und andernfalls

$$F_i = M_i.$$

Nach Lemma 56.4 (2) ist

$$P\left(\bigcap_{i \in I} \tilde{E}_i\right) = \prod_{i=1}^n P_i(F_i) = \prod_{i \in I} P_i(E_i) = \prod_{i \in I} P(\tilde{E}_i),$$

was die vollständige Unabhängigkeit bedeutet. $\square$

57. ARBEITSBLATT

57.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 57.1. Man gebe ein Beispiel für einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (M, P) und Ereignisse $E, F_1, F_2 \subseteq M$ derart, dass E zu F_1 und zu F_2 unabhängig ist, aber nicht zu $F_1 \cap F_2$.

57.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 57.2. Die Lieblingseisorten von Lucy Sonnenschein sind Himbeereis, Heidelbeereis und Erdbeereis, die sie stets mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ auswählt. Sie steht am Eisstand und wählt hintereinander und unabhängig voneinander drei Kugeln aus. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass jede ihrer Lieblingssorte in ihrem Becher vertreten ist.

Aufgabe 57.3. Es sei (M, P) ein Laplace-Raum mit n Elementen und seien $E, F \subseteq M$ Ereignisse.

- (1) Zeige, dass E und F genau dann unabhängig sind, wenn

$$n \cdot \#(E \cap F) = \#(E) \cdot \#(F)$$

gilt.

- (2) Zeige durch ein Beispiel, dass nichtleere Ereignisse unabhängig sein können, ohne dass ihre Anzahlen Teiler von n sind.
- (3) Es seien r, s natürliche Zahlen mit $0 \leq r, s \leq n$ und derart, dass n ein Teiler von rs ist. Zeige, dass es unabhängige Ereignisse in M gibt, deren Anzahlen gleich r bzw. s sind.

Aufgabe 57.4. Es seien $E, F \subseteq M$ Ereignisse in einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum M mit positiven Wahrscheinlichkeiten und mit

$$E \cap F = \emptyset.$$

Zeige, dass E und F nicht unabhängig sein können.

Aufgabe 57.5. Es seien $M = \{a, b, c\}$ und $N = \{r, s\}$ Laplace-Räume und $M \times N$ der Produktraum. Bestimme, welche der folgenden Ereignisse in $M \times N$ zueinander unabhängig sind.

$$E = \{a, b\} \times \{r\}, F = \{a, c\} \times N, G = \{(b, r)\}, H = \{(b, r), (c, s)\}, \\ I = M \times \{r\}, J = \{(b, r), (b, s)\}.$$

Aufgabe 57.6.*

- (1) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zwei aufeinander folgenden Lottoziehungen die gleichen Zahlen gezogen werden?
- (2) Bauer Ernst spielt jede Woche Lotto. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zweimal hintereinander sechs Richtige hat?

Aufgabe 57.7. Es wird fünfmal eine faire Münze geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse und ob es sich um unabhängige Ereignisse handelt.

A = der dritte Wurf ergibt Kopf,

B = es gibt insgesamt zumindest vier Kopfwürfe,

C = unter den ersten drei Würfeln gibt es zumindest zwei Kopfwürfe,

D = der vierte Wurf ergibt Zahl,

E = der erste, der dritte und der fünfte Wurf haben das gleiche Ergebnis.

Aufgabe 57.8. Es wird zwanzig Mal eine faire Münze geworfen. Bei den ersten zehn Würfeln lautet das Ergebnis sechsmal Kopf, bei den zweiten zehn Würfeln lautet das Ergebnis viermal Kopf. Sind diese Ereignisse unabhängig?

Aufgabe 57.9.*

Lucy Sonnenschein befindet sich im Punkt $(0, 0)$. Sie führt hintereinander und unabhängig voneinander drei Sprünge aus, die jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links, nach rechts, nach vorne oder nach hinten gehen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zum Schluss von ihrem Ausgangspunkt einen Abstand von zumindest 3 besitzt?

Aufgabe 57.10.*

Lucy Sonnenschein befindet sich im Punkt $(0,0)$. Sie führt hintereinander und unabhängig voneinander vier Sprünge aus, die jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links, nach rechts, nach vorne oder nach hinten gehen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zum Schluss von ihrem Ausgangspunkt einen Abstand von zumindest 3 besitzt?

Aufgabe 57.11.*

Lucy Sonnenschein und ihre kleine Schwester Veronika befinden sich auf der Zahlengeraden im Punkt 0. Beide führen unabhängig voneinander fünf Sprünge aus, wobei die Sprünge von Lucy mit gleicher Wahrscheinlichkeit zwei Einheiten nach rechts oder nach links und die Sprünge von Veronika mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Einheit nach links oder nach rechts gehen.

- (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lucy sich zum Schluss in der Position 6 befindet?
- (2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Veronika sich zum Schluss in einer Position befindet, die vom Nullpunkt den Abstand 5 besitzt?
- (3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lucy und Veronika sich zum Schluss in der gleichen Position befinden?

Aufgabe 57.12. Es sei ein Kreis mit sechs (äquidistanten) Knoten gegeben, die mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet seien. Bei einem Bewegungsprozess seien die Wahrscheinlichkeiten, stehen zu bleiben oder zu dem linken oder rechten Nachbarn zu wechseln, konstant gleich $\frac{1}{3}$.

- (1) Der Bewegungsprozess wird zweimal unabhängig voneinander durchgeführt. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten, mit denen man zu den verschiedenen Positionen gelangt.
- (2) Der Bewegungsprozess wird dreimal unabhängig voneinander durchgeführt. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten, mit denen man zu den verschiedenen Positionen gelangt.
- (3) Der Bewegungsprozess wird viermal unabhängig voneinander durchgeführt. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten, dass man danach wieder in der Ausgangsposition ist.

Aufgabe 57.13.*

Es werden unabhängig voneinander zwei Zahlen x, y aus $\{1, 2, \dots, 10\}$ gezogen (mit Zurücklegen). Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass

$$xy \geq 50$$

ist.

Aufgabe 57.14.*

Es werden unabhängig voneinander zwei Zahlen x, y aus $\{1, 2, \dots, 10\}$ gezogen (mit Zurücklegen). Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass xy eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 57.15. Es werden unabhängig voneinander zwei Zahlen x, y aus $\{1, 2, \dots, 10\}$ gezogen (mit Zurücklegen). Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass xy eine Primzahl ist.

Aufgabe 57.16. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Es sei F_i das Ereignis, dass beim ersten Wurf i geworfen wird, es sei G_j das Ereignis, dass beim zweiten Wurf j geworfen wird, und es sei E das Ereignis, dass das Ergebnis beim zweiten Wurf um eins größer als beim ersten Wurf ist. Welche dieser Ereignisse sind unabhängig, welche nicht?

Aufgabe 57.17. Ein Würfel wird dreimal geworfen. Es sei E das Ereignis, dass das Ergebnis beim zweiten Wurf um eins größer als beim ersten Wurf ist, und es sei F das Ereignis, dass das Ergebnis beim dritten Wurf um eins größer als beim zweiten Wurf ist. Sind diese Ereignisse unabhängig?

Aufgabe 57.18.*

Es seien $p_1, \dots, p_k$ verschiedene Primzahlen und n ihr Produkt. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $M = \{1, \dots, n\}$ mit der Laplace-Dichte. Es sei E_i das Ereignis, dass eine Zahl aus M ein Vielfaches von p_i ist. Zeige, dass die E_i vollständig unabhängig sind.

57.3. Aufgaben zum Abgeben.**Aufgabe 57.19.** (4 Punkte)

Es sei G das Ereignis, dass bei einer Lottoziehung mindestens eine gerade Zahl gezogen wird. Es sei U das Ereignis, dass bei einer Lottoziehung mindestens eine ungerade Zahl gezogen wird. Sind diese Ereignisse unabhängig voneinander?

Aufgabe 57.20. (3 Punkte)

Es seien $M = \{a, b, c, d\}$ und $N = \{x, y, z\}$ Laplace-Räume und $M \times N$ der Produktraum. Bestimme, welche der folgenden Ereignisse in $M \times N$ zueinander unabhängig sind.

$$E = \{a, b, d\} \times \{y, z\}, F = \{a, c\} \times N, G = \{(b, y)\}, H = \{(b, y), (d, z)\},$$

$$I = M \times \{z\}, J = \{(b, x), (b, y), (b, z)\}, K = \{a\} \times N, L = M \times \{x, y\},$$

Aufgabe 57.21. (5 Punkte)

Lucy Sonnenschein befindet sich im Punkt $(0, 0)$. Sie führt hintereinander und unabhängig voneinander vier Sprünge aus, die jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links, nach rechts, nach vorne oder nach hinten gehen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich zum Schluss wieder in ihrem Ausgangspunkt befindet?

Aufgabe 57.22. (4 Punkte)

Es werden unabhängig voneinander zwei Zahlen x, y aus $\{1, 2, \dots, 10\}$ gezogen (mit Zurücklegen). Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass

$$xy \leq 32$$

ist.

58. VORLESUNG - BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

58.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit.

Es kommt manchmal vor, dass man bei der Berechnung oder Abschätzung für eine Wahrscheinlichkeit zusätzliche Informationen zur Verfügung hat. Dadurch ändert sich die Grundmenge, da Ereignisse, die der Information nicht entsprechen, nicht weiter betrachtet werden müssen. Wenn beispielsweise jemand einen Würfel wirft und man wissen möchte, ob das Ergebnis gerade oder ungerade ist, so sind beide Möglichkeiten gleichwahrscheinlich. Wenn man aber zusätzlich die Information hat, dass die geworfene Augenzahl mindestens 4 ist, so verbleiben die Möglichkeiten 4, 5, 6, die man untereinander als gleichwahrscheinlich ansehen kann, und die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade Augenzahl geworfen wird, ist - unter dieser Information bzw. Bedingung - gleich $\frac{2}{3}$. Diese Beobachtung führt zum Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Definition 58.1. Es sei (M, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $B \subseteq M$ eine Teilmenge mit positiver Wahrscheinlichkeit. Dann nennt man zu jedem Ereignis $E \subseteq M$ die Zahl

$$P(E|B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von E unter der Bedingung B .

Die Bedingungsmenge B muss positive Wahrscheinlichkeit besitzen, da man sonst dadurch nicht dividieren könnte. Eine direkte Umstellung liefert

$$P(E \cap B) = P(B) \cdot P(E|B).$$

Wenn man von bedingten Wahrscheinlichkeiten spricht, so nennt man die unbedingte Wahrscheinlichkeit von E auch die *totale Wahrscheinlichkeit*. Bei der Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit liegt die Hauptschwierigkeit oft darin, das Durchschnittsereignis $E \cap B$ zu analysieren und seine Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Wenn $E \subseteq B$ ist, so ist natürlich $E \cap B = E$ und somit ist in diesem Fall $P(E|B) = \frac{P(E)}{P(B)}$, doch ist dies eher eine Ausnahme. Für ein Elementarereignis $E = \{x\}$ gibt es für die bedingte Wahrscheinlichkeit nur zwei Möglichkeiten: Bei $x \in B$ ist

$$P(x|B) = \frac{P(x)}{P(B)}$$

und bei $x \notin B$ ist

$$P(x|B) = 0.$$

Beispiel 58.2. Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit, dass beim Zahlenlotto eine bestimmte Zahl, sagen wir die 31, unter der Bedingung gezogen wird, dass auch eine bestimmte andere Zahl, sagen wir die 17 gezogen wird. Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{P(17, 31)}{P(17)} = \frac{\frac{5}{392}}{\frac{6}{49}} = \frac{245}{2352} = \frac{5}{48} = 0,1041666\dots,$$

wobei die Wahrscheinlichkeitsberechnungen in Beispiel 55.12 durchgeführt wurden. Dies ist kleiner als

$$\frac{6}{49} = 0,12244897\dots$$

Wenn man also weiß, dass eine bestimmte Zahl gezogen wird, so reduziert sich die Wahrscheinlichkeit, dass zugleich eine bestimmte andere Zahl gezogen wird.

Beispiel 58.3. Die drei Freunde Fritz, Fredo und Fitzgerald spielen Skat. Spieler Fredo hat von den bereits an ihn verteilten zehn Karten die ersten drei aufgenommen und alles sind Buben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er auch noch den vierten Buben bekommt? Die einzige Information, die er hat, ist, dass unter den unbekannten $32 - 3 = 29$ Karten noch ein Bube ist. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass er auch den vierten Buben bekommt, gleich $\frac{7}{29}$. Dies kann man auch als eine bedingte Wahrscheinlichkeit berechnen. Sei B das Ereignis, dass die ersten drei aufgedeckten Karten alle Buben sind, und A das Ereignis, dass Fredo alle Buben bekommt. Die Wahrscheinlichkeit von A ist nach Beispiel 55.14 gleich

$$\frac{\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} = \frac{21}{3596}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für B ist

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{1}{4 \cdot 31 \cdot 10} = \frac{1}{1240}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für $A \cap B$ kann man auf unterschiedliche Arten ausrechnen, nämlich als (Wahrscheinlichkeit, dass die ersten drei Karten nur Buben sind, mal Wahrscheinlichkeit, dass dann noch der vierte Bube kommt)

$$\frac{1}{1240} \cdot \frac{7}{29} = \frac{7}{35960}$$

oder als (Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Buben bei einem Spieler landen, mal die Wahrscheinlichkeit, dass dabei drei bestimmte Karten Buben sind)

$$\frac{21}{3596} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{21}{3596} \cdot \frac{1}{10 \cdot 3} = \frac{7}{35960}.$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist jedenfalls

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{35960}}{\frac{1}{1240}} = \frac{7 \cdot 124}{3596} = \frac{7}{29}.$$

Beispiel 58.4. Es wurde zehnmal eine faire Münze geworfen und es sei bekannt, dass mindestens fünfmal dabei Kopf fiel. Wie hoch ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass der erste Wurf Kopf war? Wir müssen die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse B (mindestens fünfmal Kopf) und E (der erste Wurf ist Kopf) berechnen. Unter den 2^{10} möglichen Wurfkombinationen gibt es

$$\begin{aligned} & \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} \\ &= 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 \\ &= 638 \end{aligned}$$

Kombinationen, in denen zumindest fünf Kopfwürfe auftreten. Unter diesen müssen wir die Anzahl der Kombinationen zählen, in denen der erste Wurf Kopf ist. Es geht also um die Anzahl von $B \cap E$. Diese Menge kann man so charakterisieren, dass der erste Wurf Kopf ist und dass es unter den neun weiteren Würfeln zumindest vier Kopfwürfe gibt. Die Anzahl dieser Menge ist somit

$$\begin{aligned} & \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} + \binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} \\ &= 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 \\ &= 382. \end{aligned}$$

Somit ist

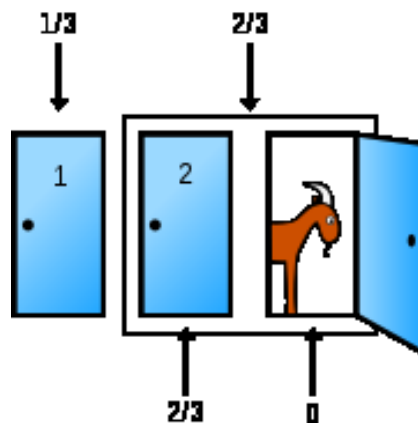
$$P(E|B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{382}{2^{10}}}{\frac{638}{2^{10}}} = \frac{382}{638} = \frac{191}{319}.$$

Beispiel 58.5. Von einem Elternpaar ist bekannt, dass sie zwei Kinder haben, und dass eines davon ein Mädchen ist. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch das andere Kind ein Mädchen ist? Zunächst muss man

sich die Bedeutung der Information klar machen, um Missverständnisse zu vermeiden. Man weiß nicht, ob das erste oder das zweite (im Sinne der Geburtsreihenfolge) Kind ein Mädchen ist. Wenn man beispielsweise weiß, dass das erste Kind ein Mädchen ist, so hat dies keine Auswirkungen auf das zweite Kind, und die Wahrscheinlichkeit, für dieses zweite Kind ein Mädchen zu sein, ist einfach $\frac{1}{2}$. Hier weiß man aber nur, dass überhaupt eines der beiden Kinder ein Mädchen ist. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, muss man auf die möglichen gleichberechtigten Konfigurationen bei zwei Kindern zurückgehen und schauen, welche durch die Information ausgeschlossen werden. Die vier gleichwahrscheinlichen Geburtsreihenfolgen sind

$$(M, M), (J, M), (M, J) \text{ und } (J, J).$$

Durch die angegebene Bedingung ist die letzte Möglichkeit, zwei Jungen, ausgeschlossen, und es verbleiben die drei anderen gleichberechtigten Möglichkeiten. Unter diesen ist nur die erste Möglichkeit für die Frage positiv, die beiden anderen nicht. Die Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{1}{3}$.



Beispiel 58.6. Beim Ziegenproblem geht es um die folgende Anordnung. Bei einer Fernsehshow kann ein Kandidat aus drei Türen wählen, wobei hinter einer Tür ein Auto als Preis wartet und hinter zwei Türen jeweils eine Ziege als Niete. Der Kandidat wählt zunächst eine Tür. Diese wird aber nicht geöffnet, stattdessen öffnet der Moderator, der weiß, wo der Gewinn sich verbirgt, eine der beiden anderen Türen, hinter denen eine Ziege steckt. Wenn der Kandidat auf eine Ziegentür gezeigt hat, so hat der Moderator keine Wahl, wenn der Kandidat auf die Autotür gezeigt hat, so wählt der Moderator zufällig eine der Ziegentüren. Danach darf der Kandidat bei seiner ersten Wahl bleiben oder aber sich auf die verbleibende Tür umentscheiden. Die Frage ist, ob der Kandidat seine Gewinnchancen erhöht, wenn er sich umentscheidet. Die Antwort ist ja! Die Wahrscheinlichkeit, dass er mit seiner ursprünglichen

Wahl gewinnt, ist $\frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er mit der Umentscheidungsstrategie gewinnt bzw. verliert, berechnet sich folgendermaßen. Man analysiert die Situation entlang der komplementären Ereignisse, dass er bei der ersten Wahl falsch oder richtig liegt. Wenn er richtig liegt, und das hat Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, so verliert er definitiv mit der Umentscheidung. Wenn er aber falsch liegt, und das hat Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, so gewinnt er definitiv mit der Umentscheidung. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist also $\frac{2}{3}$.

Lemma 58.7. *Es sei (M, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $B \subseteq M$ eine Teilmenge mit positiver Wahrscheinlichkeit und es sei $E \subseteq M$ ein Ereignis. Dann sind E und B genau dann unabhängig, wenn*

$$P(E) = P(E|B)$$

ist, wenn also die Wahrscheinlichkeit von E mit der bedingten Wahrscheinlichkeit von E unter der Bedingung B übereinstimmt.

Beweis. Nach Definition ist

$$P(E|B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)}.$$

Die Bedingung, dass dies mit $P(E)$ übereinstimmt, ist äquivalent dazu, dass

$$P(E \cap B) = P(E) \cdot P(B)$$

ist, was die Unabhängigkeit bedeutet. $\square$

Im unabhängigen Fall hat also das Eintreten von B keine Auswirkung auf die Wahrscheinlichkeit von E . Bei $P(E|B) > P(E)$ sagt man auch, dass B einen positiven Einfluss (im Sinne von erhöht die Wahrscheinlichkeit) auf das Ereignis E besitzt, bei $P(E|B) < P(E)$ sagt man, dass B einen negativen Einfluss auf das Ereignis E besitzt.

Lemma 58.8. *Es sei (M, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $B \subseteq M$ eine Teilmenge mit positiver Wahrscheinlichkeit. Dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, E \longmapsto P(E|B),$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf M .

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit additiv ist und die bedingte Gesamtwahrscheinlichkeit gleich 1 ist. Für disjunkte Ereignisse E und F ist

$$\begin{aligned} P(E \cup F|B) &= \frac{P((E \cup F) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((E \cap B) \cup (F \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{P(E \cap B) + P(F \cap B)}{P(B)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P(E \cap B)}{P(B)} + \frac{P(F \cap B)}{P(B)} \\
&= P(E|B) + P(F|B)
\end{aligned}$$

und es ist

$$P(M|B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

□

Sämtliche Ereignisse E , die mit dem Bedingungsereignis B einen leeren Durchschnitt haben, besitzen unter der beschriebenen bedingten Wahrscheinlichkeit den Wert 0, und sämtliche Ereignisse, die E umfassen, insbesondere B selbst, haben die bedingte Wahrscheinlichkeit 1.

Beispiel 58.9. Es sei ein Laplace-Raum M mit n Elementen und eine Teilmenge $B \subseteq M$ mit k , $1 \leq k \leq n$, Elementen gegeben. Dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit gleich

$$P(E|B) = \frac{\#(E \cap B)}{k}$$

gegeben. Dies ist mit der einzigen Ausnahme $B = M$ kein Laplace-Raum.

Die folgende Formel heißt *Formel für die totale Wahrscheinlichkeit*.

Lemma 58.10. *Es sei (M, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und*

$$M = B_1 \uplus B_2 \uplus \dots \uplus B_n$$

eine Zerlegung in disjunkte Teilmengen, die alle positive Wahrscheinlichkeiten haben mögen. Dann ist für jedes Ereignis E

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(E|B_i).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(E \cap (B_1 \uplus B_2 \uplus \dots \uplus B_n)) \\
&= P((E \cap B_1) \uplus (E \cap B_2) \uplus \dots \uplus (E \cap B_n)) \\
&= \sum_{i=1}^n P(E \cap B_i) \\
&= \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(E|B_i).
\end{aligned}$$

□

Ein Spezialfall liegt vor, wenn B eine Teilmenge ist und man die Zerlegung (Bedingung und komplementäre Bedingung)

$$M = B \uplus (M \setminus B)$$

betrachtet, wobei beide Teilmengen positive Wahrscheinlichkeit haben mögen. Dann ist

$$P(E) = P(B) \cdot P(E|B) + P(M \setminus B) \cdot P(E|M \setminus B).$$

Die folgende Aussage heißt *Bayessche Formel*. Sie berechnet eine bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ unter der Voraussetzung, dass umgekehrt die bedingten Wahrscheinlichkeiten von A unter gewissen weiteren Bedingungen bekannt sind.

Lemma 58.11. *Es sei (M, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und*

$$M = B_1 \uplus B_2 \uplus \dots \uplus B_n$$

eine Zerlegung in disjunkte Teilmengen, die alle positive Wahrscheinlichkeiten haben mögen. Dann ist für jedes Ereignis A mit positiver Wahrscheinlichkeit

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)}.$$

Beweis. Nach Lemma 58.10 angewendet auf A ist

$$\begin{aligned} P(B_k|A) &= \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)} \\ &= \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)}. \end{aligned}$$

□

Ein wichtiger Spezialfall der Bayesschen Formel liegt bei der Zerlegung

$$M = B \cup (M \setminus B)$$

vor, wobei B und das Komplement positive Wahrscheinlichkeit haben mögen. Dann gilt

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B) \cdot P(A|B) + P(M \setminus B) \cdot P(A|M \setminus B)}.$$

Eine typische Anwendung wird in der folgenden Situation beschrieben.

Beispiel 58.12. In der Bevölkerung ist ein Virus im Umlauf, und es gibt einen Test für den Virus, der allerdings nicht absolut sicher ist. Wenn jemand den Virus hat, so erkennt der Test dies zu 98%. Wenn jemand den Virus nicht hat, so erkennt der Test dies zu 99%. Die Wahrscheinlichkeit, den Virus zu haben, beträgt 0,1%. Eine Person geht zum Arzt und lässt sich testen, das Ergebnis des Tests ist positiv, der Virus ist laut Test vorhanden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die getestete Person wirklich den Virus besitzt? Es sei V das Ereignis, den Virus zu haben, und T das Ereignis, dass der Test den Virus diagnostiziert. Gefragt ist also nach der bedingten

Wahrscheinlichkeit von V unter der Bedingung T , also $P(V|T)$, wobei die Wahrscheinlichkeiten ($\neg$ bedeutet hier die Negation des Ereignisses)

$$P(V) = 0,001, P(T|V) = 0,98, P(T|\neg V) = 0,01$$

bekannt sind. Die Formel von Bayes liefert in diesem Fall

$$\begin{aligned} P(V|T) &= \frac{P(V) \cdot P(T|V)}{P(V) \cdot P(T|V) + P(\neg V) \cdot P(T|\neg V)} \\ &= \frac{0,001 \cdot 0,98}{0,001 \cdot 0,98 + 0,999 \cdot 0,01} \\ &= \frac{0,00098}{0,00098 + 0,00999} \\ &= \frac{0,00098}{0,01097} \\ &= 0,0893345\dots \end{aligned}$$

Obwohl sich die Zuverlässigkeit des Tests recht gut anhört, haben doch nur 9% der positiv getesteten Personen wirklich den Virus.

58. ARBEITSBLATT

58.1. Die Pausenaufgabe.

Aufgabe 58.1. Überprüfe das sogenannte Geburtstagsparadoxon anhand der anwesenden Personen. Das Geburtstagsparadoxon besagt, dass unter relativ wenig Leuten überraschend oft zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Bei 23 Leuten beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür schon 50%, bei 50 Personen sogar 97%.

58.2. Übungsaufgaben.

Aufgabe 58.2. Die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ sei mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(a) = \frac{1}{3}, P(b) = \frac{1}{4}, P(c) = \frac{1}{5}, P(d) = \frac{13}{60}$$

versehen. Es sei $B = \{a, c, d\}$ und $E = \{a, b, d\}$. Bestimme die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E|B)$.

Aufgabe 58.3. Eine faire Münze wird elfmal geworfen. Es sei B das Ereignis, dass bei den ersten zehn Würfeln stets Kopf geworfen wird. Es sei E_i das Ereignis, dass beim i -ten Wurf Kopf geworfen wird. Bestimme

$$P(E_i|B)$$

für $i = 1, \dots, 11$.

Aufgabe 58.4. Fredo verfolgt die Ziehung der Lottozahlen. Die bisher gezogenen drei Zahlen kommen auf seinem Zettel vor, drei Richtige hat er also schon mal sicher. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sechs Richtige hat?

Aufgabe 58.5. Fredo verfolgt die Ziehung der Lottozahlen. Die bisher gezogenen fünf Zahlen kommen auf seinem Zettel vor, fünf Richtige hat er also schon mal sicher. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sechs Richtige hat?

Aufgabe 58.6. Fredo erfährt, dass er beim Lotto sechs Richtige hat. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahlen genau in der Reihenfolge gezogen wurden, wie er sie angekreuzt hatte?

Aufgabe 58.7. Es sei M ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $x \in M$ ein Element mit einer positiven Wahrscheinlichkeit. Zeige

$$P(E|\{x\}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in E, \\ 0, & \text{falls } x \notin E. \end{cases}$$

Aufgabe 58.8. Es sei $B \subseteq M$ eine Teilmenge eines endlichen Wahrscheinlichkeitsraumes M mit positiver Wahrscheinlichkeit. Es sei E ein weiteres Ereignis und es gelte

$$P(E|B) \leq P(E).$$

Zeige, dass dann

$$P(E|M \setminus B) \geq P(E)$$

gilt.

Aufgabe 58.9.*

In einem Kurs nehmen n Personen teil. Für die Person i ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Klausur durchzufallen, gleich q_i . Es wird eine Klausur und eine Nachklausur geschrieben, wobei sich diese Wahrscheinlichkeiten nicht ändern.

- (1) Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person in der ersten Klausur durchfällt, gleich $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i$ ist.
- (2) Die Nachklausur schreiben nur die Personen mit, die in der ersten Klausur durchgefallen sind. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine aus diesem Personenkreis zufällig ausgewählte Person bei der zweiten Klausur ebenfalls durchfällt, gleich $\frac{\sum_{i=1}^n q_i^2}{\sum_{i=1}^n q_i}$ ist.

- (3) Zeige, dass die unter (2) berechnete Wahrscheinlichkeit größergleich der unter (1) berechneten Wahrscheinlichkeit ist.

Aufgabe 58.10.*

Professor Knopfloch und Professor Zahnrad spielen gegeneinander Schach, wobei sie abwechselnd mit weiss oder mit schwarz spielen. Wenn Professor Knopfloch mit weiss spielt, so gewinnt er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$, wenn er mit schwarz spielt, so gewinnt er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, andernfalls gewinnt Professor Zahnrad. Heute hat Professor Zahnrad gewonnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Professor Knopfloch heute mit weiss gespielt?

Aufgabe 58.11. In der Bevölkerung ist ein Virus im Umlauf, und es gibt einen Test für den Virus, der allerdings nicht absolut sicher ist. Wenn jemand den Virus hat, so erkennt der Test dies zu 98%. Wenn jemand den Virus nicht hat, so erkennt der Test dies zu 99%. Die Wahrscheinlichkeit, den Virus zu haben, beträgt 0,1%. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person den Virus hat, obwohl der Test ihn nicht erkannt hat?

Aufgabe 58.12. In der Bevölkerung ist ein Virus im Umlauf, und es gibt einen Test für den Virus, der allerdings nicht absolut sicher ist. Wenn jemand den Virus hat, so erkennt der Test dies zu 95%. Wenn jemand den Virus nicht hat, so erkennt der Test dies zu 99,5%. Die Wahrscheinlichkeit, den Virus zu haben, beträgt 0,05%. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person den Virus hat, wenn der Test ihn diagnostiziert?

Aufgabe 58.13.*

Es sei M ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $A, B \subseteq M$ Ereignisse mit $P(A \cap B) \neq 0$ und mit $P(A), P(B) < 1$. Zeige

$$\frac{P(B|A)}{P(M \setminus B|A)} = \frac{P(B)}{P(M \setminus B)} \cdot \frac{P(A|B)}{P(A|M \setminus B)}.$$

Aufgabe 58.14. Ein Aufschrei geht durch die sozialen Medien: An der Tanzhochschule „Parkettschwingungen“ haben sich 1000 Frauen und 1000 Männer für die beiden Fächer Ausdruckstanz und Choreographie beworben, dabei bekamen 760 Frauen einen Studienplatz, aber nur 710 Männer. Die Tanzbegabungen und die sonstigen Zeugnisse waren bei allen Bewerbern und Bewerberinnen sehr gut. Ein klarer Fall: Diese Schule diskriminiert Männer!

Lässt sich dieser Vorwurf angesichts der folgenden Tabelle, die die genauere Information entlang der beiden einzelnen Fächer beinhaltet, aufrechterhalten?

	Bew. M.	Bew. F.	Ang. M	Ang. F	Quote M.	Quote F.
Ausdr.	900	200	630	136	70%	68%
Chor.	100	800	80	624	80%	78%
Ges.	1000	1000	710	760	71%	76%

Aufgabe 58.15. Erläutere die Beobachtungen in Aufgabe 58.14 mit dem Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeit.

58.3. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 58.16. (2 Punkte)

Die Menge $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ sei mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(a) = \frac{1}{5}, P(b) = \frac{1}{4}, P(c) = \frac{1}{10}, P(d) = \frac{9}{50}, P(e) = \frac{4}{25}, P(f) = \frac{11}{100}$$

versehen. Es sei $B = \{a, b, c, d\}$ und $E = \{a, d, f\}$. Bestimme die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E|B)$.

Aufgabe 58.17. (2 Punkte)

Es sei M ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $B_1, B_2, \dots, B_n$ Ereignisse, deren Gesamtdurchschnitt eine positive Wahrscheinlichkeit besitzt. Zeige

$$\begin{aligned} & P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \\ &= P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) \cdot P(B_3|B_1 \cap B_2) \cdots P(B_n|B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}). \end{aligned}$$

Aufgabe 58.18. (3 Punkte)

In der Bevölkerung ist ein Virus im Umlauf, und es gibt einen Test für den Virus, der allerdings nicht absolut sicher ist. Wenn jemand den Virus hat, so erkennt der Test dies zu 99,5%. Wenn jemand den Virus nicht hat, so erkennt der Test dies zu 99,9%. Die Wahrscheinlichkeit, den Virus zu haben, beträgt 0,01%. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person den Virus hat, wenn der Test ihn diagnostiziert?

Aufgabe 58.19. (3 (1+1+1) Punkte)

Ein gestaffelter Eignungstest ist in drei Runden aufgebaut, wobei man die vorhergehende Runde überstehen muss, um in die nächste Runde zu gelangen. Die erste Runde überstehen 10%, die zweite Runde überstehen 20% und die dritte Runde überstehen 15%.

- (1) Beschreibe diese Daten mit dem Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit.

- (2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht ein Erstrundenteilnehmer alle drei Runden?
- (3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht ein Zweitrundenteilnehmer alle drei Runden?

ANHANG A: BIDLIZENZEN

Die Bilder dieses Textes stammen aus Commons (also <http://commons.wikimedia.org>), und stehen unter unterschiedlichen Lizenzen, die zwar alle die Verwendung hier erlauben, aber unterschiedliche Bedingungen an die Verwendung und Weitergabe stellen. Es folgt eine Auflistung der verwendeten Bilder dieses Textes (nach der Seitenzahl geordnet, von links nach rechts, von oben nach unten) zusammen mit ihren Quellen, Urhebern (Autoren) und Lizenzen. Dabei ist *Quelle* so zu verstehen, dass sich, wenn man

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:>

unmittelbar davor setzt, die entsprechende Datei auf Commons ergibt. *Autor* benennt den Urheber des Werkes, falls dieser bekannt ist. *Benutzer* meint den Hochlader der Datei; wenn keine weitere Information über den Autor vorliegt, so gilt der Benutzer als Urheber. Die Angabe des Benutzernamen ist so zu verstehen, dass sich, wenn man

<http://commons.wikimedia.org/wiki/User:>

unmittelbar davor setzt, die Benutzerseite ergibt. Wenn das Bild ursprünglich in einem anderen Wikimedia-Projekt hochgeladen wurde, so wird die Domäne (bspw. *de.wikipedia.org*) explizit angegeben.

Die *Lizenz* ist die auf der Dateiseite auf Commons angegebene Lizenz. Dabei bedeuten

- GFDL: Gnu Free Documentation License (siehe den angehängten Text, falls diese Lizenz vorkommt)
- CC-BY-SA-2.5 (3.0): Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 (oder 3.0)
- PD: gemeinfrei (public domain)

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Quelle = Mulled-wine-3.jpg , Autor = Benutzer Loyna auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5	13
Quelle = Vector Addition.svg , Autor = Benutzer Booyabazooka auf Commons, Lizenz = PD	36
Quelle = Vector space illust.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	37
Quelle = 2D Cartesian.svg , Autor = Benutzer Andeggs auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	44

Quelle = Two parallel lines a b.svg , Autor = Masur, Lizenz = gemeinfrei	52
Quelle = OpenMeanderM1.svg , Autor = Benutzer FirefoxRocks auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	52
Quelle = Intersecting Planes 2.svg , Autor = Benutzer ShahabELS auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	54
Quelle = 3punktsmodell.svg , Autor = Benutzer Indolences auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	62
Quelle = Simetria axial.png , Autor = Benutzer Rovnet auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	65
Quelle = Fruit salad (1).jpg , Autor = Benutzer Fæ auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	68
Quelle = Regular quadrilateral.svg , Autor = Benutzer Gustavb auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	71
Quelle = U+25B1.svg , Autor = Benutzer Sarang auf Public domain, Lizenz = gemeinfrei	71
Quelle = Regular triangle.svg , Autor = Benutzer Gustavb auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	71
Quelle = Trapezoid2.png , Autor = Benutzer Rzukow auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	71
Quelle = Hexagon.svg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz =	71
Quelle = Blancuco.jpg , Autor = Benutzer Tronch commonswiki auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	71
Quelle = Zero-dimension.GIF , Autor = Benutzer ??? auf zh.wikipedia, Lizenz = gemeinfrei	71
Quelle = Segment graphe.jpg , Autor = Benutzer Tartalacitrouille auf Commons, Lizenz = CC-ba-sa 3.0	71
Quelle = Disk 1.svg , Autor = Benutzer Paris 16 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	71
Quelle = Geometri romb.png , Autor = Benutzer Nicke auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	71
Quelle = AnnaBertaHans.png , Autor = Benutzer MGausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-da 4.0	91
Quelle = Relation binaire.png , Autor = Benutzer HB auf fr. Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	94

Quelle = Relación binaria 11.svg , Autor = Benutzer HiTe auf Commons, Lizenz = PD	96
Quelle = Fussball1.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	97
Quelle = Fussball2.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	97
Quelle = Fussball3.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	97
Quelle = Gartentoreverbindung.png , Autor = Benutzer Bocardodarapti auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	98
Quelle = 3-simplex graph.svg , Autor = Benutzer Koko90 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	102
Quelle = Biclique K 3 3.svg , Autor = Benutzer Koko90 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	105
Quelle = Wildebeests in the Masaai Mara.jpg , Autor = Demosch (hochgeladen von Benutzer FlickreviewR auf Flickr), Lizenz = cc-by-2.0	108
Quelle = Example of a set.svg , Autor = Benutzer Stephan Kulla auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 1.0	109
Quelle = Six Quadrilaterals.svg , Autor = Benutzer Jim.belk auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	110
Quelle = Ostfriesische-Inseln 2.jpg , Autor = Benutzer Godewind auf Commons, Lizenz = PD	112
Quelle = Visualisierung bspl 2-10.gif , Autor = Benutzer TiloW auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	113
Quelle = Biological classification de.svg , Autor = Benutzer Pengo auf Commons, Lizenz =	114
Quelle = ModernChartresStyleLabyrinth.svg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz =	116
Quelle = Concentric circles isotropy.svg , Autor = Benutzer Tampert auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	121
Quelle = ParalleleGeradenKlassen.png , Autor = Mgausmann, Lizenz = CC-by-sa 4.0	122
Quelle = Chess Board.svg , Autor = Benutzer Nevit auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	122

Quelle = Spirale7punkte.png , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz =	126
Quelle = TwoTone.svg , Autor = Benutzer Stevo auf Commons, Lizenz = PD	134
Quelle = Construction blackboard integers.jpg , Autor = Benutzer Darapti auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	136
Quelle = Konstruktionen 007.jpg , Autor = Benutzer Darapti auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	141
Quelle = Paul Signac - Blumenstilleben.jpeg , Autor = Paul Signac, Lizenz = gemeinfrei	149
Quelle = ParalleleGeradenEbene.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	158
Quelle = Kapitolinischer Pythagoras.jpg , Autor = Benutzer Galilea auf de Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	163
Quelle = Pythagoras large font.svg , Autor = Benutzer KaiMartin auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	163
Quelle = Irrational raiz de dois.png , Autor = Benutzer Jrnicolas auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	163
Quelle = Spiral of Theodorus.svg , Autor = Benutzer Pbroks13 auf en Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	166
Quelle = ??????? ?? ????? ??????.JPG , Autor = Benutzer Sophie Iosifidou auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	167
Quelle = Pi-unrolled-720 new.gif , Autor = Benutzer Delanoche2386 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	168
Quelle = Kegs-n-ausg-p.png , Autor = Benutzer Ag2gaeh auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	168
Quelle = C Dur Klaviatur.png , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz =	170
Quelle = QuadratSpurKreuzung1.png , Autor = Benutzer MGausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	171
Quelle = QuadratSpurKreuzung2.png , Autor = Benutzer MGausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	171
Quelle = Heron von Alexandria.jpg , Autor = Benutzer Frank C. Müller auf Commons, Lizenz = PD	181

Quelle = Konvergenz.svg , Autor = Benutzer Matthias Vogelgesang auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	185
Quelle = Cauchy sequence - example.png , Autor = Benutzer Pred auf da.wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 2.5	190
Quelle = Oresme-Nicole.jpg , Autor = Benutzer Leinad-Z auf Commons, Lizenz = PD	193
Quelle = Harmonischebrueckerp.jpg , Autor = Benutzer Anton auf de Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 2.5	194
Quelle = Augustin Louis Cauchy.JPG , Autor = Benutzer Anarkman auf Commons, Lizenz = PD	204
Quelle = Geometric series 14 square.svg , Autor = Benutzer Melchoir auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	229
Quelle = ?-bronze.svg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz =	238
Quelle = Illustration nested intervals.svg , Autor = Benutzer Stephan Kulla auf Commons, Lizenz = CC-by sa 3.0	241
Quelle = Dedekind.jpeg , Autor = unbekannt (hochgeladen von Benutzer Jean-Luc W auf Commons), Lizenz = PD	243
Quelle = Intervallschachtelung e.gif , Autor = Benutzer Caldrac auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	246
Quelle = Leonhard Euler by Handmann .png , Autor = Emanuel Handmann (hochgeladen von Benutzer QWerk auf Commons), Lizenz = PD	247
Quelle = Francois Viète.jpeg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	260
Quelle = Polynomialdeg5.svg , Autor = Benutzer Geek3 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	267
Quelle = Function-1 x.svg , Autor = Benutzer Qualc1 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	274
Quelle = Heaviside.svg , Autor = Benutzer Lenny222 auf Commons, Lizenz = PD	283
Quelle = WeierstrassFunction.svg , Autor = Benutzer Eeyore22 auf Commons, Lizenz = PD	283
Quelle = RationalDegree2byXedi.gif , Autor = Benutzer Sam Derbyshire auf en. Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	286

Quelle = Melons-Fethiye Market.jpg , Autor = Benutzer Palosirkka auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.0	288
Quelle = Intermediatevaluetheorem.svg , Autor = Enoch Lau (hochgeladen von Benutzer Kpengboy auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 3.0	292
Quelle = RacineNieme.svg , Autor = Benutzer HB auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	297
Quelle = Exponentials(2).svg , Autor = Benutzer HB auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	306
Quelle = Fonctionslog3.svg , Autor = Benutzer HB auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	310
Quelle = Sliderule 2005.jpg , Autor = Benutzer Roger McLassus 1951 auf Commons, Lizenz =	311
Quelle = Disk 1.svg , Autor = Benutzer Paris 16 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	318
Quelle = Pi pie2.jpg , Autor = Pi pie2 (hochgeladen von Benutzer GJ auf engl. Wikipedia), Lizenz = PD	319
Quelle = Circle sector.svg , Autor = Benutzer MithrandirMage auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	319
Quelle = Unit circle2.svg , Autor = Benutzer Pyramide auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	320
Quelle = Sine one period.svg , Autor = Benutzer Geek3 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	322
Quelle = Trigonom1.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	330
Quelle = Trigonom2.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	330
Quelle = Trigonom3.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	330
Quelle = Trigonom4.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	330
Quelle = Trigo5.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	330
Quelle = Trigo6.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	330

- Quelle = Arbre binaire loi binomiale.svg , Autor = Benutzer Cdang auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 347
- Quelle = Jakob Bernoulli.jpeg , Autor = Benutzer File Upload Bot (Magnus Manske) auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 349
- Quelle = De moivre-laplace.gif , Autor = Benutzer Stpasha auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 352
- Quelle = Bidado.svg , Autor = Benutzer Joxemai4 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 353
- Quelle = Ara macao, Ara ararauna and Ara militaris.jpg , Autor = Benutzer Commons Shaped Box auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.0 359
- Quelle = Monty open door chances.svg , Autor = Benutzer Cepheus commonswiki auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 370