

Elemente der Algebra

Vorlesung 28

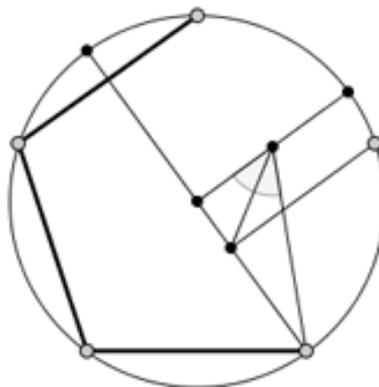
Konstruierbare Einheitswurzeln

DEFINITION 28.1. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Man sagt, dass *das regelmäßige n -Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar* ist, wenn die komplexe Zahl

$$e^{2\pi i/n} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

eine konstruierbare Zahl ist.

Die Menge der komplexen Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$, bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks, wobei 1 eine Ecke bildet. Alle Eckpunkte liegen auf dem Einheitskreis. Die Ecke $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist eine primitive Einheitswurzel; wenn diese mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, so sind auch alle weiteren Eckpunkte konstruierbar. Bei $n = 1, 2$ kann man sich darüber streiten, ob man von einem regelmäßigen n -Eck sprechen soll, jedenfalls gibt es die zugehörigen Einheitswurzeln und diese sind aus \mathbb{Q} , also erst recht konstruierbar. Das regelmäßige Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck und dieses ist konstruierbar nach Beispiel 27.7, da der dritte Kreisteilungskörper eine quadratische Körpererweiterung von \mathbb{Q} ist (man kann einfacher auch direkt zeigen, dass ein gleichseitiges Dreieck aus seiner Grundseite heraus konstruierbar ist). Das regelmäßige Viereck ist ein Quadrat mit den Eckpunkten $1, i, -1, -i$, und dieses ist ebenfalls konstruierbar. Das regelmäßige Fünfeck ist ebenfalls konstruierbar, wie in Beispiel 27.9 bzw. Aufgabe 27.16 gezeigt wurde. Wir werden im Folgenden sowohl positive als auch negative Resultate zur Konstruierbarkeit von regelmäßigen n -Ecken vorstellen.



Konstruktion eines regulären Fünfecks mit Zirkel und Lineal

LEMMA 28.2. Sei $m = kn$, $m, k, n \in \mathbb{N}_+$. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Das regelmäßige 2^r -Eck, $r \in \mathbb{N}$, ist konstruierbar.
- (2) Wenn das regelmäßige m -Eck konstruierbar ist, so sind auch das regelmäßige n -Eck und das regelmäßige k -Eck konstruierbar.
- (3) Wenn n und k teilerfremd sind und wenn das regelmäßige n -Eck und das regelmäßige k -Eck konstruierbar sind, so ist auch das regelmäßige m -Eck konstruierbar.

Beweis. (1) folgt daraus, dass eine Winkelhalbierung stets mit Zirkel und Lineal durchführbar ist. (2). Nach Voraussetzung ist $e^{\frac{2\pi i}{nk}}$ konstruierbar. Dann ist auch nach Satz 25.9 die Potenz

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{nk}}\right)^n = e^{\frac{2\pi i}{k}}$$

konstruierbar. (3). Seien nun $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ und $e^{\frac{2\pi i}{k}}$ konstruierbar und n und k teilerfremd. Nach dem Lemma von Bezout gibt es dann ganze Zahlen r, s mit $rn + sk = 1$. Daher ist auch

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^s \left(e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)^r = \left(e^{\frac{2\pi i k}{nk}}\right)^s \left(e^{\frac{2\pi i n}{nk}}\right)^r = e^{\frac{2\pi i s k}{nk}} e^{\frac{2\pi i r n}{nk}} = e^{\frac{2\pi i (sk + rn)}{nk}} = e^{\frac{2\pi i}{nk}}$$

konstruierbar. \square

Aus diesem Lemma kann man in Zusammenhang mit den oben erwähnten Konstruktionsmöglichkeiten folgern, dass die regelmäßigen $3 \cdot 2^r$ -Ecke, die regelmäßigen $5 \cdot 2^r$ -Ecke und die regelmäßigen $15 \cdot 2^r$ -Ecke für jedes r konstruierbar sind.

SATZ 28.3. Sei n eine natürliche Zahl derart, dass das regelmäßige n -Eck konstruierbar ist. Dann ist $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. \square

Er beruht darauf, dass der n -te Kreisteilungskörper den Grad $\varphi(n)$ besitzt und dass im konstruierbaren Fall der Grad einer Körpererweiterung eine Zweierpotenz sein muss.

Winkeldreiteilung

Wir sind nun in der Lage, das Problem der Winkeldreiteilung zu beantworten.

KOROLLAR 28.4. Das regelmäßige 9-Eck ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Beweis. Wäre das regelmäßige 9-Eck konstruierbar, so müsste nach Satz 28.3 $\varphi(9)$ eine Zweierpotenz sein. Es ist aber $\varphi(9) = 2 \cdot 3 = 6$. \square

SATZ 28.5. *Es ist nicht möglich, einen beliebig vorgegebenen Winkel mittels Zirkel und Lineal in drei gleich große Teile zu unterteilen.*

Beweis. Es genügt, einen (konstruierbaren) Winkel α anzugeben derart, dass $\alpha/3$ nicht konstruierbar ist. Wir betrachten $\alpha = 120^\circ$ Grad, welcher konstruierbar ist, da die dritten Einheitswurzeln konstruierbar sind, weil sie nämlich in einer quadratischen Körpererweiterung von \mathbb{Q} liegen. Dagegen ist der Winkel $\alpha/3 = 120^\circ/3 = 40^\circ$ nicht konstruierbar, da andernfalls das regelmäßige 9-Eck konstruierbar wäre, was nach Korollar 28.4 aber nicht der Fall ist. \square

Wir geben noch einen weiteren Beweis, dass die Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist, der nicht auf der allgemeinen Irreduzibilität der Kreisteilungspolynome (die wir nicht bewiesen haben) beruht.

BEMERKUNG 28.6. Wir zeigen direkt, dass man den Winkel 20° Grad nicht konstruieren kann (obwohl man 60° Grad konstruieren kann). Aufgrund der *Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen* gilt

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

und damit

$$\begin{aligned} (2 \cos 20^\circ)^3 - 3(2 \cos 20^\circ) - 1 &= 2 \left(4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \left(\cos 60^\circ - \frac{1}{2} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also wird $2 \cos 20^\circ$ vom Polynom $X^3 - 3X - 1$ annulliert. Dieses Polynom ist nach Aufgabe 28.3 irreduzibel. Also muss es nach Lemma 23.2 das Minimalpolynom von $2 \cos 20^\circ$ sein. Daher kann $2 \cos 20^\circ$ nach Korollar 26.7 nicht konstruierbar sein und damit ebensowenig $\cos 20^\circ$.

Fermatsche Primzahlen

Die Frage der Konstruierbarkeit von regelmäßigen n -Ecken führt uns zu Fermatschen Primzahlen.

DEFINITION 28.7. Eine Primzahl der Form $2^s + 1$, wobei s eine positive natürliche Zahl ist, heißt *Fermatsche Primzahl*.

Es ist unbekannt, ob es unendlich viele Fermatsche Primzahlen gibt. Es ist noch nicht mal bekannt, ob es außer den ersten fünf Fermat-Zahlen

$$3, 5, 17, 257, 65537$$

überhaupt weitere Fermatsche Primzahlen gibt.

LEMMA 28.8. *Bei einer Fermatschen Primzahl $2^s + 1$ hat der Exponent die Form $s = 2^r$ mit einem $r \in \mathbb{N}$.*

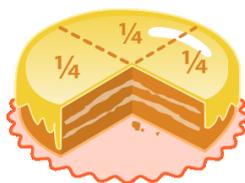
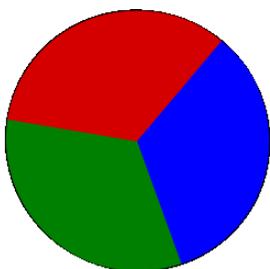
Beweis. Wir schreiben $s = 2^k u$ mit u ungerade. Damit ist

$$2^{2^k u} + 1 = \left(2^{2^k}\right)^u + 1.$$

Für ungerades u gilt generell die polynomiale Identität (da -1 eine Nullstelle ist)

$$X^u + 1 = (X + 1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \dots + X^2 - X + 1).$$

Also ist $2^{2^k} + 1 \geq 3$ ein Teiler von $2^{2^k u} + 1$. Da diese Zahl nach Voraussetzung prim ist, müssen beide Zahlen gleich sein, und dies bedeutet $u = 1$. \square



Diese Torte wurde nicht mit Zirkel und Lineal geteilt.

SATZ 28.9. *Ein reguläres n -Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn die Primfaktorzerlegung von n die Gestalt*

$$n = 2^\alpha p_1 \cdots p_k$$

hat, wobei die p_i verschiedene Fermatsche Primzahlen sind.

Beweis. Wir zeigen nur die eine Richtung, dass bei einem konstruierbaren regelmäßigen n -Eck die Zahl n die angegebene numerische Bedingung erfüllen muss.

Es sei $n = 2^\alpha p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ die Primfaktorzerlegung von n mit den verschiedenen ungeraden Primzahlen p_i , $i = 1, \dots, k$, und positiven Exponenten $r_i \geq 1$ (und $\alpha \geq 0$). Nach Satz 28.3 muss die eulersche Funktion eine Zweierpotenz sein, also

$$\varphi(n) = 2^t.$$

Andererseits gilt nach Korollar 16.9 die Beziehung

$$\varphi(n) = 2^{\alpha-1} (p_1 - 1) p_1^{r_1-1} \cdots (p_k - 1) p_k^{r_k-1}$$

(bei $\alpha = 0$ ist der Ausdruck $2^{\alpha-1}$ zu streichen). Da dies eine Zweierpotenz sein muss, dürfen die ungeraden Primzahlen nur mit einem Exponenten 1 (oder 0) auftreten. Ferner muss jede beteiligte Primzahl p die Gestalt $p = 2^s + 1$ haben, also eine Fermatsche Primzahl sein.

Für die andere Richtung muss man aufgrund von Lemma 28.2 lediglich zeigen, dass für eine Fermatsche Primzahl p das regelmäßige p -Eck konstruierbar ist. Dies haben wir für $p = 3, 5$ explizit getan. Gauss selbst hat eine Konstruktion für das reguläre 17-Eck angegeben. Für die anderen Fermatschen

Primzahlen (bekannt oder nicht) folgt die Konstruierbarkeit aus der Galois-
theorie. \square

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Pentagon construct.gif , Autor = TokyoJunkie (= Benutzer Mosmas auf PD), Lizenz = en.wikipedia.org	2
Quelle = Pie 2.svg , Autor = Benutzer Cronholm 144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4
Quelle = Cake quarters.svg , Autor = Benutzer Acdx, R. S. Shaw auf Commons, Lizenz = PD	4
Quelle = Luxembourg Vianden Nut-fair 10.jpg , Autor = Benutzer PlayMistyForMe auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4