**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2015**

# Elemente der Algebra

## Arbeitsblatt 26

### Übungsaufgaben

Aufgabe 26.1. Ist die Zahl, die den „goldenen Schnitt" beschreibt, eine konstruierbare Zahl?

Aufgabe 26.2. Zeige, dass man zu einem gegebenen Parallelogramm mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches gleichseitiges Rechteck konstruieren kann.

Aufgabe 26.3. Zeige direkt, ohne Bezug auf Koordinaten, dass die Summe von zwei konstruierbaren komplexen Zahlen wieder konstruierbar ist.

Aufgabe 26.4. Sei $Z \in \mathbb{C}$ eine konstruierbare Zahl und $r$ eine konstruierbare positive reelle Zahl. Zeige, dass dann auch der Kreis mit Mittelpunkt $Z$ und Radius $r$ konstruierbar ist.

Aufgabe 26.5. Betrachte ein DinA4-Blatt. Ist das Seitenverhältnis aus langer und kurzer Seitenlänge eine konstruierbare Zahl?

Aufgabe 26.6. Betrachte die Tastatur eines Klaviers. Ist das Schwingungsverhältnis von zwei nebeneinander liegendenTasten (bei „gleichstufiger Stimmung") eine konstruierbare Zahl?

Aufgabe 26.7. Zeige, dass es kein gleichseitiges Dreieck gibt, dessen sämtliche Ecken rationale Koordinaten besitzen.

Aufgabe 26.8.*

Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ konstruierbare Zahlen. Bestimme, ob die Zahl

$$z^2 - 3z\sqrt{w} + \sqrt{z + w^2} - \frac{5}{7} + 4\sqrt{\sqrt{z} + w} + \sqrt{11}$$

konstruierbar ist.

Aufgabe 26.9.*

Zeige, dass zu zwei konstruierbaren positiven reellen Zahlen $a$ und $b$ die Potenz $a^b$ nicht konstruierbar sein muss.

Aufgabe 26.10. Zeige, dass es Geraden gibt, auf denen es keinen konstruierbaren Punkt gibt.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.11. (4 Punkte)

Es sei ein Kreis $K$ und ein Punkt $P$ außerhalb des Kreises gegeben. Konstruiere eine der Tangenten an den Kreis, die durch $P$ läuft.

Aufgabe 26.12. (4 Punkte)

Zeige, dass man zu einem gegebenen Dreieck mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches gleichseitiges Dreieck konstruieren kann.

Aufgabe 26.13. (2 Punkte)

Es seien $P$ und $Q$ zwei konstruierbare Punkte. Zeige, dass dann auch der Abstand $d(P, Q)$ konstruierbar ist.

Aufgabe 26.14. (3 Punkte)

Es seien $P, Q_1, Q_2$ drei konstruierbare Punkte derart, dass die Abstände $d(P, Q_1)$ und $d(P, Q_2)$ gleich 1 sind und dass der Winkel zwischen den dadurch definierten Halbgeraden 90 Grad beträgt. Zeige, dass es dann eine affin-lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ E = \mathbb{R}^2 \longrightarrow E = \mathbb{R}^2$$

gibt, die 0 auf $P$, 1 auf $Q_1$ und $i$ auf $Q_2$ schickt, und die konstruierbare Punkte in konstruierbare Punkte überführt.

Aufgabe 26.15. (2 Punkte)

Zeige, dass die komplexe Zahl $re^{i\varphi} = r\,(\cos\varphi\,,\ \sin\varphi\,)$ genau dann konstruierbar ist, wenn $r$ und $e^{i\varphi}$ konstruierbar sind.

Aufgabe 26.16. (4 Punkte)

Beweise auf zwei verschiedene Arten, dass die komplexe Quadratwurzel einer konstruierbaren komplexen Zahl wieder konstruierbar ist.