

Elemente der Algebra

Vorlesung 21

Dimensionstheorie

Ein endlich erzeugter Vektorraum hat im Allgemeinen ganz unterschiedliche Basen. Allerdings ist die Anzahl der Elemente in einer Basis stets konstant und hängt nur vom Vektorraum ab. Diese wichtige Eigenschaft werden wir jetzt beweisen und als Ausgangspunkt für die Definition der Dimension eines Vektorraums nehmen.

LEMMA 21.1. *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit einer Basis v_1, \dots, v_n . Es sei $w \in V$ ein Vektor mit einer Darstellung*

$$w = \sum_{i=1}^n s_i v_i,$$

wobei $s_k \neq 0$ sei für ein bestimmtes k . Dann ist auch die Familie

$$v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n$$

eine Basis von V .

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die neue Familie ein Erzeugendensystem ist. Zunächst kann man wegen

$$w = \sum_{i=1}^n s_i v_i$$

und $s_k \neq 0$ den Vektor v_k als

$$v_k = \frac{1}{s_k} w - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{s_k} v_i - \sum_{i=k+1}^n \frac{s_i}{s_k} v_i$$

schreiben. Sei nun $u \in V$ beliebig vorgegeben. Dann kann man schreiben

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n t_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} t_i v_i + t_k v_k + \sum_{i=k+1}^n t_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} t_i v_i + t_k \left(\frac{1}{s_k} w - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{s_k} v_i - \sum_{i=k+1}^n \frac{s_i}{s_k} v_i \right) + \sum_{i=k+1}^n t_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \left(t_i - t_k \frac{s_i}{s_k} \right) v_i + \frac{t_k}{s_k} w + \sum_{i=k+1}^n \left(t_i - t_k \frac{s_i}{s_k} \right) v_i. \end{aligned}$$

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit nehmen wir zwecks Notationsvereinfachung $k = 1$ an. Es sei

$$t_1 w + \sum_{i=2}^n t_i v_i = 0$$

eine Darstellung der Null. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= t_1 w + \sum_{i=2}^n t_i v_i \\ &= t_1 \left(\sum_{i=1}^n s_i v_i \right) + \sum_{i=2}^n t_i v_i \\ &= t_1 s_1 v_1 + \sum_{i=2}^n (t_1 s_i + t_i) v_i. \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Ausgangsfamilie folgt insbesondere $t_1 s_1 = 0$, und wegen $s_1 \neq 0$ ergibt sich $t_1 = 0$. Deshalb ist $\sum_{i=2}^n t_i v_i = 0$ und daher gilt $t_i = 0$ für alle i . \square

Die vorstehende Aussage heißt *Austauschlemma*, die nachfolgende *Austauschsatz*.

SATZ 21.2. *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit einer Basis*

$$b_1, \dots, b_n.$$

Ferner sei

$$u_1, \dots, u_k$$

eine Familie von linear unabhängigen Vektoren in V . Dann gibt es eine Teilmenge $J = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\} = I$ derart, dass die Familie

$$u_1, \dots, u_k, b_i, i \in I \setminus J,$$

eine Basis von V ist. Insbesondere ist $k \leq n$.

Beweis. Wir führen Induktion über k , also über die Anzahl der Vektoren in der Familie. Bei $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei die Aussage für k schon bewiesen und seien $k + 1$ linear unabhängige Vektoren

$$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$$

gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung, angewandt auf die (ebenfalls linear unabhängigen) Vektoren

$$u_1, \dots, u_k$$

gibt es eine Teilmenge $J = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ derart, dass die Familie

$$u_1, \dots, u_k, b_i, i \in I \setminus J,$$

eine Basis von V ist. Wir wollen auf diese Basis Lemma 21.1 anwenden. Da eine Basis vorliegt, kann man

$$u_{k+1} = \sum_{j=1}^k c_j u_j + \sum_{i \in I \setminus J} d_i b_i$$

schreiben. Wären hierbei alle Koeffizienten $d_i = 0$, so ergäbe sich sofort ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der u_j , $j = 1, \dots, k+1$. Es gibt also ein $i \in I \setminus J$ mit $d_i \neq 0$. Wir setzen $i_{k+1} := i$. Damit ist $J' = \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}\}$ eine $(k+1)$ -elementige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$. Nach dem Austauschlemma kann man den Basisvektor $b_{i_{k+1}}$ durch u_{k+1} ersetzen und erhält die neue Basis

$$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, b_i, i \in I \setminus J'.$$

Der Zusatz folgt sofort, da eine k -elementige Teilmenge einer n -elementigen Menge vorliegt. \square

SATZ 21.3. *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzen je zwei Basen von V die gleiche Anzahl von Basisvektoren.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{b} = b_1, \dots, b_n$ und $\mathfrak{u} = u_1, \dots, u_k$ zwei Basen von V . Aufgrund des Basisaustauschsatzes, angewandt auf die Basis \mathfrak{b} und die linear unabhängige Familie \mathfrak{u} ergibt sich $k \leq n$. Wendet man den Austauschsatz umgekehrt an, so folgt $n \leq k$, also insgesamt $n = k$. \square

Dieser Satz erlaubt die folgende Definition.

DEFINITION 21.4. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann nennt man die Anzahl der Vektoren in einer Basis von V die *Dimension* von V , geschrieben

$$\dim(V).$$

Wenn ein Vektorraum nicht endlich erzeugt ist, so setzt man $\dim(V) = \infty$. Der Nullraum 0 hat die Dimension 0 . Einen eindimensionalen Vektorraum nennt man auch eine *Gerade*, einen zweidimensionalen Vektorraum eine *Ebene*, einen dreidimensionalen Vektorraum einen *Raum* (im engeren Sinn), wobei man andererseits auch jeden Vektorraum einen Raum nennt.

KOROLLAR 21.5. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt der Standardraum K^n die Dimension n .*

Beweis. Die Standardbasis e_i , $i = 1, \dots, n$, besteht aus n Vektoren, also ist die Dimension n . \square

BEISPIEL 21.6. Die komplexen Zahlen bilden einen zweidimensionalen reellen Vektorraum, eine Basis ist z.B. 1 und i .

BEISPIEL 21.7. Der Polynomring $R = K[X]$ über einem Körper K ist kein endlichdimensionaler Vektorraum. Seien n Polynome P_1, \dots, P_n fixiert. Es sei d das Maximum der Grade dieser Polynome. Dann hat auch jede K -Linearkombination $\sum_{i=1}^n a_i P_i$ maximal den Grad d . Insbesondere können Polynome von einem größeren Grad nicht durch P_1, \dots, P_n dargestellt werden. Es gibt also kein endliches Erzeugendensystem.

KOROLLAR 21.8. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann ist U ebenfalls endlichdimensional und es gilt*

$$\dim(U) \leq \dim(V) .$$

Beweis. Jede linear unabhängige Familie in U ist auch linear unabhängig in V . Daher kann es aufgrund des Basisaustauschsatzes in U nur linear unabhängige Familien der Länge $\leq n$ geben. Es sei $k \leq n$ derart, dass es in U eine linear unabhängige Familie mit k Vektoren gibt, aber nicht mit $k + 1$ Vektoren. Sei $u = u_1, \dots, u_k$ eine solche Familie. Diese ist dann insbesondere eine maximal linear unabhängige Familie in U und daher wegen Satz 20.12 eine Basis von U . \square

KOROLLAR 21.9. *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren v_1, \dots, v_n in V gegeben. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

- (1) v_1, \dots, v_n bilden eine Basis von V .
- (2) v_1, \dots, v_n bilden ein Erzeugendensystem von V .
- (3) v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig.

Beweis. Siehe Aufgabe 21.1. \square

BEISPIEL 21.10. Es sei K ein Körper. Man kann sich einfach einen Überblick über die Unterräume des K^n verschaffen, als Dimension von Unterräumen kommt nur k mit $0 \leq k \leq n$ in Frage. Bei $n = 0$ gibt es nur den Nullraum selbst, bei $n = 1$ gibt es den Nullraum und K selbst. Bei $n = 2$ gibt es den Nullraum, die gesamte Ebene K^2 , und die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt. Jede solche Gerade G hat die Gestalt

$$G = Kv = \{sv \mid s \in K\}$$

mit einem von 0 verschiedenen Vektor v . Zwei von null verschiedene Vektoren definieren genau dann die gleiche Gerade, wenn sie linear abhängig sind.

Bei $n = 3$ gibt es den Nullraum, den Gesamtraum K^3 , die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt und die zweidimensionalen Ebenen durch den Nullpunkt.

Der folgende Satz heißt *Basisergänzungssatz*.

SATZ 21.11. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum der Dimension $n = \dim(V)$. Es seien*

$$u_1, \dots, u_k$$

linear unabhängige Vektoren in V . Dann gibt es Vektoren

$$u_{k+1}, \dots, u_n$$

derart, dass

$$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$$

eine Basis von V bilden.

Beweis. Es sei b_1, \dots, b_n eine Basis von V . Aufgrund des Austauschsatzes findet man $n - k$ Vektoren aus der Basis \mathfrak{b} , die zusammen mit den vorgegebenen u_1, \dots, u_k eine Basis von V bilden. \square