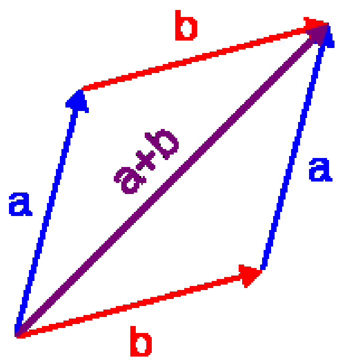
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Vorlesung 19

Vektorräume



Die Addition von zwei Pfeilen a und b, ein typisches Beispiel für Vektoren.

Der zentrale Begriff der linearen Algebra ist der Vektorraum.

Definition 19.1. Es sei K ein Körper und V eine Menge mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und mit zwei Abbildungen

$$+ \colon V \times V \longrightarrow V,\ (u,v) \longmapsto u+v,$$

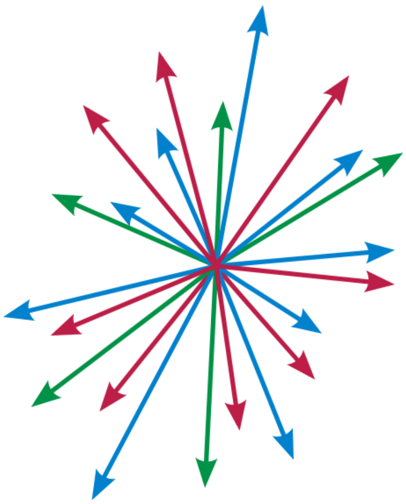
und

$$K \times V \longrightarrow V,\ (s,v) \longmapsto sv = s \cdot v.$$

Dann nennt man V einen K-*Vektorraum* (oder einen Vektorraum über K), wenn die folgenden Axiome erfüllt sind (dabei seien $r, s \in K$ und $u, v, w \in V$ beliebig)

(1) $u + v = v + u$,
(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$,
(3) $v + 0 = v$,
(4) Zu jedem v gibt es ein z mit $v + z = 0$,
(5) $r(su) = (rs)u$,
(6) $r(u + v) = ru + rv$,
(7) $(r + s)u = ru + su$,
(8) $1 \cdot u = u$.

Die Verknüpfung in V nennt man (Vektor)-Addition und die Operation $K \times V \to V$ nennt man *Skalarmultiplikation*. Die Elemente in einem Vektorraum nennt man *Vektoren*, und die Elemente $r \in K$ heißen *Skalare*. Das Nullelement $0 \in V$ wird auch als *Nullvektor* bezeichnet, und zu $v \in V$ heißt das inverse Element das *Negative* zu v und wird mit $-v$ bezeichnet. Den Körper, der im Vektorraumbegriff vorausgesetzt ist, nennt man auch den *Grundkörper*. Alle Begriffe der linearen Algebra beziehen sich auf einen solchen Grundkörper, er darf also nie vergessen werden, auch wenn er manchmal nicht explizit aufgeführt wird. Bei $K = \mathbb{R}$ spricht man von *reellen Vektorräumen* und bei $K = \mathbb{C}$ von *komplexen Vektorräumen*. Bei reellen und komplexen Vektorräumen gibt es zusätzliche Strukturen wie Längen, Winkel, Skalarprodukt. Zunächst entwickeln wir aber die algebraische Theorie der Vektorräume über einem beliebigen Körper.



Beispiel 19.2. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Produktmenge

$$K^n = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n-\text{mal}} = \{(x_1, \ldots, x_n) |\, x_i \in K\}$$

mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$s(x_1, \ldots, x_n) = (sx_1, \ldots, sx_n)$$

definierten Skalarmultiplikation ein Vektorraum. Man nennt ihn den n-dimensionalen *Standardraum*. Insbesondere ist $K^1 = K$ selbst ein Vektorraum.

Der Nullraum 0, der aus dem einzigen Element 0 besteht, ist ebenfalls ein Vektorraum. Man kann ihn auch als $K^0 = 0$ auffassen.

Die Vektoren im Standardraum K^n kann man als Zeilenvektoren

$$(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)$$

oder als Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

schreiben. Der Vektor

$$e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die 1 an der i-ten Stelle steht, heißt i-ter *Standardvektor*.

Beispiel 19.3. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper und daher bilden sie einen Vektorraum über sich selbst. Andererseits sind die komplexen Zahlen als additive Struktur gleich $\mathbb{R}^2$. Die Multiplikation einer komplexen Zahl $a + bi$ mit einer reellen Zahl $s = (s, 0)$ geschieht komponentenweise, d.h. diese Multiplikation stimmt mit der skalaren Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ überein. Daher sind die komplexen Zahlen auch ein reeller Vektorraum. Unter Verwendung einer späteren Terminologie kann man sagen, dass $\mathbb{C}$ ein eindimensionaler komplexer Vektorraum ist und dass $\mathbb{C}$ ein zweidimensionaler reeller Vektorraum ist mit der reellen Basis 1 und i.

Beispiel 19.4. Zu einem Körper K und gegebenen natürlichen Zahlen m, n bildet die Menge

$$\operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$$

der $m \times n$-Matrizen mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum. Das Nullelement in diesem Vektorraum ist die *Nullmatrix*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 19.5. Sei $R = K[X]$ der Polynomring in einer Variablen über dem Körper K. Mit der (komponentenweisen) Addition und der ebenfalls komponentenweisen Multiplikation mit einem Skalar $s \in K$ (was man auch als die Multiplikation mit dem konstanten Polynom s auffassen kann) ist der Polynomring ein K-Vektorraum.

Lemma 19.6. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten die folgenden Eigenschaften (dabei sei $v \in V$ und $s \in K$).*

(1) *Es ist* $0v = 0$. [1]
(2) *Es ist* $s0 = 0$.
(3) *Es ist* $(-1)v = -v$.
(4) *Aus* $s \neq 0$ *und* $v \neq 0$ *folgt* $sv \neq 0$.

Beweis. Siehe Aufgabe 19.6. □

Untervektorräume

Definition 19.7. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $0 \in U$.
(2) Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
(3) Mit $u \in U$ und $s \in K$ ist auch $su \in U$.

Auf einem solchen Untervektorraum kann man die Addition und die skalare Multiplikation einschränken. Daher ist ein Untervektorraum selbst ein Vektorraum, siehe Aufgabe 19.4. Die einfachsten Untervektorräume in einem Vektorraum V sind der Nullraum 0 und der gesamte Vektorraum V.

Lemma 19.8. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Dann ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

Beweis. Siehe Aufgabe 19.3. □

Man spricht daher auch vom *Lösungsraum* des Gleichungssystems. Insbesondere ist die Summe von zwei Lösungen eines linearen Gleichungssystems wieder eine Lösung. Die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems ist kein Vektorraum. Man kann aber zu einer Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems hinzuaddieren und erhält wieder eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.

[1] Man mache sich hier und im Folgenden klar, wann die 0 in K und wann sie in V zu verstehen ist.

Abbildungsverzeichnis