**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2015**

# Elemente der Algebra

## Vorlesung 18

### Partialbruchzerlegung

Betrachten wir den Bruch $\frac{1}{6}$. Diesen kann man als

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

schreiben, man kann also die Primfaktoren des Nenners multiplikativ trennen. Es gilt aber auch, und das ist überraschender, die Darstellung

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

man kann also in diesem Fall den Bruch als eine Summe von Brüchen schreiben, bei denen jeweils nur ein Primfaktor des Nenners vorkommt. In ähnlicher Weise gilt

$$\frac{1}{35} = -\frac{2}{5} + \frac{3}{7},$$

auch hier lässt sich ein Bruch mit einem „komplizierten“ Nenner als Summe von Brüchen mit einem einfachen Nenner schreiben. Dagegen ist es nicht möglich, $\frac{1}{4}$ als Summe von $\frac{1}{2}$ zu schreiben. Wir werden gleich sehen, dass man jede rationale Zahl als eine Summe von Stammbrüchen zu Primzahlpotenzen erhalten kann. Dies beruht auf einer Gesetzmäßigkeit, die allgemeiner für Hauptidealbereiche gilt.

Satz 18.1. *Es sei $R$ ein Hauptidealbereich und $f, g \in R$, $g \neq 0$, mit der Primfaktorzerlegung*

$$g = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}.$$

*Dann gibt es im Quotientenkörper $Q(R)$ eine Darstellung*

$$\frac{f}{g} = \frac{a_1}{p_1^{r_1}} + \frac{a_2}{p_2^{r_2}} + \cdots + \frac{a_k}{p_k^{r_k}}$$

*mit $a_1, \ldots, a_k \in R$.*

*Beweis.* Wir führen Induktion über die Anzahl $k$ der verschiedenen Primfaktoren von $g$. Wenn $g$ eine Einheit ist oder nur ein Primfaktor (mit einem beliebigen Exponenten) vorkommt, ist nichts zu zeigen. Sei also $k \geq 2$ und die Aussage für kleinere $k$ schon bewiesen. Sei

$$h = p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}.$$

Da $p_1^{r_1}$ und $h$ teilerfremd sind, gibt es nach Satz 8.5 eine Darstellung der Form

$$up_1^{r_1} + vh \,=\, 1$$

mit $u, v \in R$. Division durch

$$g \,=\, p_1^{r_1} h$$

ergibt

$$\frac{1}{g} \,=\, \frac{v}{p_1^{r_1}} + \frac{u}{h}.$$

Multiplikation mit $f$ liefert eine Darstellung der Form

$$\frac{f}{g} \,=\, \frac{a_1}{p_1^{r_1}} + \frac{c}{h}$$

und die Induktionsvoraussetzung angewendet auf $\frac{c}{h}$ liefert das Resultat. $\square$

Für $R = \mathbb{Z}$ und $R = K[X]$ und überhaupt für euklidische Bereiche lässt sich diese Aussage noch präzisieren.

Satz 18.2. *Es sei $R$ ein euklidischer Bereich und $f, g \in R$, $g \neq 0$, mit der Primfaktorzerlegung*

$$g \,=\, p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}.$$

*Dann gibt es im Quotientenkörper $Q(R)$ eine Darstellung*

$$\frac{f}{g} \,=\, b + \frac{a_1}{p_1^{r_1}} + \frac{a_2}{p_2^{r_2}} + \cdots + \frac{a_k}{p_k^{r_k}}$$

*mit $b, a_1, \ldots, a_k \in R$ mit $a_j \,=\, 0$ oder*

$$\delta(a_j) \,<\, \delta(p_j^{r_j}).$$

*Die Summanden $\frac{a_j}{p_j^{r_j}}$ kann man als*

$$\frac{c_j}{p_j^{r_j}} \,=\, b_j + \frac{c_{j,1}}{p_j} + \frac{c_{j,2}}{p_j^2} + \cdots + \frac{c_{j,r_j}}{p_j^{r_j}}$$

*mit*

$$\delta(c_{j,i}) \,\leq\, \delta(p_j)$$

*schreiben.*

*Beweis.* Nach Satz 18.1 gibt es eine Darstellung

$$\frac{f}{g} \,=\, \frac{a_1}{p_1^{r_1}} + \frac{a_2}{p_2^{r_2}} + \cdots + \frac{a_k}{p_k^{r_k}}.$$

Auf die einzelnen Summanden wenden wir die Division mit Rest durch $p_j^{r_j}$ an und erhalten

$$\frac{a_j}{p_j^{r_j}} \,=\, b_j + \frac{a'_j}{p_j^{r_j}}$$

mit

$$\delta\left(a'_j\right) \,<\, \delta\left(p_j^{r_j}\right).$$

Ferner kann man auf $a_j$ auch die Division mit Rest durch $p_j$ anwenden und erhält

$$\frac{a_j}{p_j^{r_j}} = \frac{c_j p + t}{p_j^{r_j}} = \frac{c_j}{p_j^{r_j - 1}} + \frac{t}{p_j^{r_j}}$$

mit

$$\delta(t) < \delta(p).$$

Den vorderen Summanden kann man in dieser Weise weiter abarbeiten. □

KOROLLAR 18.3. *Es seien $f, g \in \mathbb{Z}$, $g > 0$, mit der Primfaktorzerlegung*

$$g = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}.$$

*Dann gibt es im Quotientenkörper $Q(R)$ eine Darstellung*

$$\frac{f}{g} = n + \frac{a_1}{p_1^{r_1}} + \frac{a_2}{p_2^{r_2}} + \cdots + \frac{a_k}{p_k^{r_k}}$$

*mit $n, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ und mit $|a_j| < p_j^{r_j}$. Für die Summanden gibt es ferner eine Darstellung*

$$\frac{a_j}{p_j^{r_j}} = n_j + \frac{c_{j,1}}{p_j} + \frac{c_{j,2}}{p_j^2} + \cdots + \frac{c_{j,r_j}}{p_j^{r_j}}$$

*mit $|c_{j,i}| < p_j$. Dabei kann man die $c_{j,i} \geq 0$ wählen.*

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Satz 18.2. □

BEISPIEL 18.4. Wir berechnen die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{100}$. Es ist

$$100 = 4 \cdot 25 = 2^2 \cdot 5^2.$$

Wegen

$$25 - 6 \cdot 4 = 1$$

ergibt sich

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{4} - 6\frac{1}{25} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{25}.$$

Wenn man nichtnegative Zähler haben möchte, so schreibt man

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - 6\frac{1}{25} &= -1 + \frac{1}{4} + 1 - 6\frac{1}{25} \\ &= -1 + \frac{1}{4} + \frac{25 - 6}{25} \\ &= -1 + \frac{1}{4} + \frac{19}{25} \\ &= -1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{25}. \end{aligned}$$

KOROLLAR 18.5. *Es sei $K$ ein Körper und $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$, mit der Zerlegung in irreduzible Polynome*

$$g = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}.$$

*Dann gibt es im Quotientenkörper $K(X)$ eine Darstellung*

$$\frac{f}{g} \;=\; h + \frac{q_1}{p_1^{r_1}} + \frac{q_2}{p_2^{r_2}} + \cdots + \frac{q_k}{p_k^{r_k}}$$

*mit $h, q_1, \ldots, q_k \in K[X]$ mit $q_j \;=\; 0$ oder*

$$\operatorname{grad}(q_j) \;<\; \operatorname{grad}(p_j^{r_j}).$$

*Die Summanden $\frac{q_j}{p_j^{r_j}}$ kann man als*

$$\frac{q_j}{p_j^{r_j}} \;=\; h_j + \frac{c_{j,1}}{p_j} + \frac{c_{j,2}}{p_j^2} + \cdots + \frac{c_{j,r_j}}{p_j^{r_j}}$$

*mit*

$$\operatorname{grad}(c_{j,i}) \;<\; \operatorname{grad}(p_j).$$

*schreiben.*

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Satz 18.2. □

Korollar 18.6. *Es seien $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q \neq 0$, Polynome und es sei*

$$Q = (X - a_1)^{r_1} \cdots (X - a_s)^{r_s}$$

*mit verschiedenen $a_i \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $H \in \mathbb{C}[X]$ und eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r_i$, mit*

$$\frac{P}{Q} = H + \frac{c_{11}}{X - a_1} + \frac{c_{12}}{(X - a_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1r_1}}{(X - a_1)^{r_1}} + \cdots + \frac{c_{s1}}{X - a_s} + \frac{c_{s2}}{(X - a_s)^2} + \cdots + \frac{c_{sr_s}}{(X - a_s)^{r_s}}.$$

*Beweis.* Dies ergibt sich, abgesehen von der Eindeutigkeit, die wir nicht beweisen, aus Korollar 18.5 und dem Fundamentalsatz der Algebra. □

Korollar 18.7. *Es seien $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, Polynome und es sei*

$$Q = (X - a_1)^{r_1} \cdots (X - a_s)^{r_s} Q_1^{t_1} \cdots Q_u^{t_u}$$

*mit verschiedenen $a_i \in \mathbb{R}$ und verschiedenen quadratischen Polynomen $Q_k$ ohne reelle Nullstellen. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $H \in \mathbb{R}[X]$ und eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r_i$, und eindeutig bestimmte lineare Polynome $L_{k\ell} = d_{k\ell}X + e_{k\ell}$, $1 \leq k \leq u$, $1 \leq \ell \leq t_k$, mit*

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} \;&=\; H + \frac{c_{11}}{X - a_1} + \frac{c_{12}}{(X - a_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1r_1}}{(X - a_1)^{r_1}} \\ &\quad + \cdots + \frac{c_{s1}}{X - a_s} + \frac{c_{s2}}{(X - a_s)^2} + \cdots + \frac{c_{sr_s}}{(X - a_s)^{r_s}} \\ &\quad + \frac{L_{11}}{Q_1} + \frac{L_{12}}{Q_1^2} + \cdots + \frac{L_{1t_1}}{Q_1^{t_1}} \end{aligned}$$

$$+\cdots+\frac{L_{u1}}{Q_u}+\frac{L_{u2}}{Q_u^2}+\cdots+\frac{L_{ut_u}}{Q_u^{t_u}}.$$

*Beweis.* Dies ergibt sich, abgesehen von der Eindeutigkeit, die wir nicht beweisen, aus Korollar 18.5 und der Tatsache, dass es in $\mathbb{R}[X]$ nur lineare und quadratische Primpolynome gibt. □

Beispiel 18.8. Wir betrachten die rationale Funktion

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{(X-1)\left(X^2+X+1\right)}.$$

wobei der Faktor rechts reell nicht weiter zerlegbar ist. Daher muss es eine eindeutige Darstellung

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{a}{X-1}+\frac{bX+c}{X^2+X+1}$$

geben. Multiplikation mit dem Nennerpolynom führt auf

$$\begin{aligned} 1 &= a\left(X^2+X+1\right)+(bX+c)(X-1) \\ &= (a+b)X^2+(a+c-b)X+a-c. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$a+b=0 \text{ und } a+c-b=0 \text{ und } a-c=1$$

mit den eindeutigen Lösungen

$$a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{1}{3},\ c=-\frac{2}{3}\,.$$

Die Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{\frac{1}{3}}{X-1}+\frac{-\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2+X+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{X-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{X+2}{X^2+X+1}.$$

Beispiel 18.9. Wir betrachten die rationale Funktion

$$\frac{X^3-X+5}{X^4+X^2} = \frac{X^3-X+5}{X^2\left(X^2+1\right)},$$

wo die Faktorzerlegung des Nennerpolynoms sofort ersichtlich ist. Der Ansatz

$$\frac{X^3-X+5}{X^2\left(X^2+1\right)} = \frac{a}{X}+\frac{b}{X^2}+\frac{cX+d}{X^2+1}$$

führt durch Multiplikation mit dem Nennerpolynom auf

$$\begin{aligned} X^3-X+5 &= aX\left(X^2+1\right)+b\left(X^2+1\right)+(cX+d)X^2 \\ &= aX^3+aX+bX^2+b+cX^3+dX^2 \\ &= (a+c)X^3+(b+d)X^2+aX+b. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$a+c=1 \text{ und } b+d=0 \text{ und } a=-1 \text{ und } b=5$$

mit der Lösung

$$b=5,\ a=-1,\ d=-5,\ c=2\,.$$

Insgesamt ist die Partialbruchzerlegung also gleich

$$\frac{X^3 - X + 5}{X^2(X^2+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{5}{X^2} + \frac{2X - 5}{X^2+1}\,.$$

Bemerkung 18.10. Eine wichtige Anwendung der reellen Partialbruchzerlegung ist es, zu rationalen Funktionen $P/Q$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, eine Stammfunktion zu finden, also zu integrieren. Man berechnet hierzu die Partialbruchzerlegung von $P/Q$ und muss dann zu dem Polynom $H$ und den Summanden der Form $\frac{b}{(X-a)^r}$ bzw. $\frac{c+dX}{Q_i^r}$ mit einem quadratischen nullstellenfreien Polynom $Q_i$ Stammfunktionen bestimmen. Dafür gibt es dann Standardverfahren. Eine Stammfunktion zu $\frac{b}{(X-a)}$ ist $b \ln |X-a|$ und eine Stammfunktion zu $\frac{b}{(X-a)}$, $r \geq 2$, ist $\frac{b}{(1-r)(X-a)^{r-1}}$. Wenn ein quadratischer Nenner vorliegt, wird es schwieriger; eine Stammfunktion zu $\frac{1}{1+x^2}$ ist beispielsweise $\arctan X$.

# Abbildungsverzeichnis