Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Vorlesung 13

Ringhomomorphismen

Definition 13.1. Seien R und S Ringe. Eine Abbildung

$$\varphi\colon R \longrightarrow S$$

heißt *Ringhomomorphismus*, wenn folgende Eigenschaften gelten:

(1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
(2) $\varphi(1) = 1$
(3) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Ein Ringhomomorphismus ist also zugleich ein Gruppenhomomorphismus für die additive Struktur und ein Monoidhomomorphismus für die multiplikative Struktur. Einen bijektiven Ringhomomorphismus nennt man einen *Ringisomorphismus*, und zwei Ringe heißen *isomorph*, wenn es einen Ringisomorphismus zwischen ihnen gibt. Ein Ringisomorphismus eines Ringes auf sich selbst heißt *Ringautomorphismus*. Wenn R und S Körper sind, so spricht man manchmal auch von einem Körperhomomorphismus statt von einem Ringhomomorphismus. Dieser hat aber keine zusätzlichen Eigenschaften.

Die konstante Abbildung $R \to 0$ in den Nullring ist stets ein Ringhomomorphismus, dagegen ist die umgekehrte Abbildung, also $0 \to R$, nur bei $R = 0$ ein Ringhomomorphismus.

Lemma 13.2. *Es seien R, S, T Ringe. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Die Identität* $\mathrm{id} : R \to R$ *ist ein Ringhomomorphismus.*
(2) *Sind $\varphi : R \to S$ und $\psi : S \to T$ Ringhomomorphismen, so ist auch die Hintereinanderschaltung $\psi \circ \varphi : R \to T$ ein Ringhomomorphismus.*
(3) *Ist $R \subseteq S$ ein Unterring, so ist die Inklusion $R \hookrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus.*

Beweis. Siehe Aufgabe 13.4. □

Satz 13.3. *Sei R ein Ring. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus*

$$\mathbb{Z} \longrightarrow R.$$

Beweis. Ein Ringhomomorphismus muss die 1 auf die 1_R abbilden. Deshalb gibt es nach Lemma 10.7 genau einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z} \longrightarrow (R, +, 0),\ n \longmapsto n1_R.$$

Wir müssen zeigen, dass diese Abbildung auch die Multiplikation respektiert, d.h. dass $(mn)1_R = (m1_R) * (n1_R)$ ist, wobei $*$ hier die Multiplikation in R bezeichnet. Dies folgt aber aus Lemma 2.5. □

Den in dieser Aussage konstruierten und eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus nennt man auch den *kanonischen Ringhomomorphismus* (oder den *charakteristischen Ringhomomorphismus*) von $\mathbb{Z}$ nach R.

DEFINITION 13.4. Die *Charakteristik* eines kommutativen Ringes R ist die kleinste positive natürliche Zahl n mit der Eigenschaft $n \cdot 1_R = 0$. Die Charakteristik ist 0, falls keine solche Zahl existiert.

Die Charakteristik beschreibt genau den Kern des obigen kanonischen (charakteristischen) Ringhomomorphismus.

LEMMA 13.5. *Sei R ein Integritätsbereich. Dann ist die Charakteristik von R null oder eine Primzahl.*

Beweis. Die Charakteristik sei $n > 0$ und es sei angenommen, dass n keine Primzahl ist, also eine Zerlegung $n = ab$ mit kleineren Zahlen $0 < a, b < n$ besitzt. Nach Definition der Charakteristik ist $n_R = 0$ in R und n ist die kleinste positive Zahl mit dieser Eigenschaft. Aufgrund von Satz 13.3 ist $a_R b_R = n_R = 0$, so dass, weil R ein Integritätsbereich ist, einer der Faktoren null sein muss, im Widerspruch zur Minimalität von n. □

LEMMA 13.6. *Seien R und S Ringe und sei*

$$\varphi\colon R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus. Es sei $u \in R^\times$ eine Einheit. Dann ist auch $\varphi(u)$ eine Einheit. Mit anderen Worten: Ein Ringhomomorphismus induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$R^\times \longrightarrow S^\times.$$

Beweis. Das ist trivial. □

Der Einsetzungshomomorphismus

SATZ 13.7. *Sei R ein kommutativer Ring und sei $R[X]$ der Polynomring über R. Es sei A ein weiterer kommutativer Ring und es sei $\varphi\colon R \to A$ ein Ringhomomorphismus und $a \in A$ ein Element. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus*

$$\psi\colon R[X] \longrightarrow A$$

mit $\psi(X) = a$ *und mit* $\psi \circ i = \varphi$, *wobei* $i\colon R \to R[X]$ *die kanonische Einbettung ist. Dabei geht das Polynom* $P = \sum_{j=0}^{n} c_j X^j$ *auf* $\sum_{j=0}^{n} \varphi(c_j) a^j$.

Beweis. Bei einem Ringhomomorphismus

$$\psi\colon\ R[X] \longrightarrow A$$

mit $\psi \circ i = \varphi$ müssen die Konstanten $c \in R$ auf $\varphi(c)$ und X auf a gehen. Daher muss X^j auf a^j gehen. Da Summen respektiert werden, kann es nur einen Ringhomorphismus geben, der die im Zusatz angegebene Gestalt haben muss. Es ist also zu zeigen, dass durch diese Vorschrift wirklich ein Ringhomomorphismus definiert ist. Dies folgt aber direkt aus dem Distributivgesetz. □

Den in diesem Satz konstruierten Ringhomomorphismus nennt man den *Einsetzungshomomorphismus.*

KOROLLAR 13.8. *Sei* R *ein kommutativer Ring und sei* $R[X]$ *der Polynomring über* R. *Es sei* $r \in R$ *ein Element. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus*

$$\psi\colon\ R[X] \longrightarrow R$$

mit $\psi(X) = r$ *und mit* $\psi \circ i = \varphi$, *wobei* $i\colon R \to R[X]$ *die kanonische Einbettung ist. Dabei geht das Polynom* $P = \sum_{j=0}^{n} c_j X^j$ *auf* $\sum_{j=0}^{n} \varphi(c_j) r^j$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 13.7. □

KOROLLAR 13.9. *Sei* R *ein kommutativer Ring und sei* $R[X]$ *der Polynomring über* R. *Es sei* $Y = aX + b$, *wobei* a *eine Einheit in* R *sei. Dann gibt es einen Ringisomorphismus*

$$R[X] \longrightarrow R[X],\ X \longmapsto aX + b.$$

Beweis. Die Einsetzungshomomorphismen zu $X \mapsto aX+b$ und $X \mapsto a^{-1}X - a^{-1}b$ definieren aufgrund von Satz 13.7 jeweils einen Ringhomomorphismus ψ und φ von $R[X]$ nach $R[X]$, die wir hintereinander schalten:

$$R[X] \xrightarrow{\psi} R[X] \xrightarrow{\varphi} R[X]\,.$$

Bei diesem Ringhomomorphismus bleiben die Elemente aus R unverändert, und die Variable X wird insgesamt auf

$$a(a^{-1}X - a^{-1}b) + b \;=\; aa^{-1}X - aa^{-1}b + b \;=\; X$$

geschickt. Daher muss die Verknüpfung aufgrund der Eindeutigkeit in Satz 13.7 die Identität sein. Dies gilt auch für die Hintereinanderschaltung in umgekehrter Reihenfolge, so dass ein Isomorphismus vorliegt. □

Ideale unter einem Ringhomomorphismus

Der Zusammenhang zwischen Ringhomomorphismen und Idealen wird durch folgenden Satz hergestellt.

SATZ 13.10. *Seien R und S kommutative Ringe und sei*

$$\varphi : R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus. Dann ist der Kern

$$\operatorname{kern} \varphi = \{f \in R \mid \varphi(f) = 0\}$$

ein Ideal in R.

Beweis. Sei $I := \varphi^{-1}(0)$. Wegen $\varphi(0) = 0$ ist $0 \in I$. Seien $a, b \in I$. Das bedeutet $\varphi(a) = 0$ und $\varphi(b) = 0$. Dann ist

$$\varphi(a + b) \;=\; \varphi(a) + \varphi(b) \;=\; 0 + 0 \;=\; 0$$

und daher $a + b \in I$.

Sei nun $a \in I$ und $r \in R$ beliebig. Dann ist

$$\varphi(ra) \;=\; \varphi(r)\varphi(a) \;=\; \varphi(r) \cdot 0 \;=\; 0,$$

also ist $ra \in I$. □

Da ein Ringhomomorphismus insbesondere ein Gruppenhomomorphismus der zugrunde liegenden additiven Gruppe ist, gilt wieder das Kernkriterium für die Injektivität. Eine Anwendung davon ist das folgende Korollar.

KOROLLAR 13.11. *Es sei K ein Körper und S ein vom Nullring verschiedener Ring. Es sei*

$$\varphi\colon\ K \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus. Dann ist φ injektiv.

Beweis. Es genügt nach Lemma 10.13 zu zeigen, dass der Kern der Abbildung gleich null ist. Nach Satz 13.10 ist der Kern ein Ideal. Da die 1 auf $1 \neq 0$ geht, ist der Kern nicht ganz K. Da es nach Lemma 7.5 in einem Körper überhaupt nur zwei Ideale gibt, muss der Kern das Nullideal sein. □