**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2015**

# Elemente der Algebra

## Vorlesung 10

### Gruppenhomomorphismen

Definition 10.1. Seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, \circ, e_H)$ Gruppen. Eine Abbildung

$$\psi : G \longrightarrow H$$

heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn die Gleichheit

$$\psi(g \circ g') = \psi(g) \circ \psi(g')$$

für alle $g, g' \in G$ gilt.

Beispiel 10.2. Sei $d \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\, n \longmapsto dn,$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Dies folgt unmittelbar aus dem Distributivgesetz. Für $d \geq 1$ ist die Abbildung injektiv und das Bild ist die Untergruppe $\mathbb{Z}d \subseteq \mathbb{Z}$. Bei $d = 0$ liegt die Nullabbildung vor. Bei $d = 1$ ist die Abbildung die Identität, bei $d \geq 2$ ist die Abbildung nicht surjektiv.

Beispiel 10.3. Sei $d \in \mathbb{N}_+$. Wir betrachten

$$\mathbb{Z}/(d) = \{0, 1, \ldots, d-1\}$$

mit der in Aufgabe 1.19 beschriebenen Addition. Die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(d),$$

die eine ganze Zahl $n$ auf ihren Rest bei Division durch $d$ abbildet, ist ein Gruppenhomomorphismus. Sind nämlich $m = ad + r$ und $n = bd + s$ mit $0 \leq r, s < d$ gegeben, so ist

$$m + n = (a + b) + r + s,$$

wobei allerdings $r + s \geq d$ sein kann. In diesem Fall ist

$$\varphi(m + n) = r + s - d$$

und das stimmt mit der Addition von $r$ und $s$ in $\mathbb{Z}/(d)$ überein. Diese Abbildungen sind surjektiv, aber nicht injektiv.

Beispiel 10.4. Wir fassen den komplexen Betrag als Abbildung

$$|-|\colon\ \mathbb{C}^\times = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot, 1),\, z \longmapsto |z|\,,$$

auf. Dabei liegen links und rechts Gruppen vor, und nach Lemma 3.15 (4) liegt ein Gruppenhomomorphismus vor. Die Abbildung ist surjektiv (da wir eben die positiven reellen Zahlen als Zielbereich gewählt haben), aber nicht injektiv, da beispielsweise der gesamte Einheitskreis auf 1 abgebildet wird.

Die folgenden beiden Lemmata folgen direkt aus der Definition.

Lemma 10.5. *Es seien $G$ und $H$ Gruppen und $\varphi\colon G \to H$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\varphi(e_G) = e_H$ und $(\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1})$ für jedes $g \in G$.*

*Beweis.* Zum Beweis der ersten Aussage betrachten wir

$$\varphi(e_G) = \varphi(e_G e_G) = \varphi(e_G)\varphi(e_G).$$

Durch Multiplikation mit $\varphi(e_G)^{-1}$ folgt $e_H = \varphi(e_G)$. Zum Beweis der zweiten Behauptung ist

$$\varphi\left(g^{-1}\right)\varphi(g) = \varphi\left(g^{-1}g\right) = \varphi(e_G) = e_H.$$

Das heißt, dass $\varphi\left(g^{-1}\right)$ die Eigenschaft besitzt, die für das Inverse von $\varphi(g)$ charakteristisch ist. Da das Inverse in einer Gruppe eindeutig bestimmt ist, muss $\varphi\left(g^{-1}\right) = (\varphi(g))^{-1}$ gelten. □

Lemma 10.6. *Es seien $F, G, H$ Gruppen. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Die Identität* $\mathrm{id} : G \to G$ *ist ein Gruppenhomomorphismus.*
(2) *Sind $\varphi : F \to G$ und $\psi : G \to H$ Gruppenhomomorphismen, so ist auch die Hintereinanderschaltung $\psi \circ \varphi : F \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.*
(3) *Ist $F \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist die Inklusion $F \hookrightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus.*
(4) *Sei $\{e\}$ die triviale Gruppe. Dann ist die Abbildung $\{e\} \to G$, die $e$ auf $e_G$ schickt, ein Gruppenhomomorphismus. Ebenso ist die (konstante) Abbildung $G \to \{e\}$ ein Gruppenhomomorphismus.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 10.1. □

Wir charakterisieren nun die Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}$ nach $G$.

Lemma 10.7. *Sei $G$ eine Gruppe. Dann entsprechen sich eindeutig Gruppenelemente $g \in G$ und Gruppenhomomorphismen $\varphi$ von $\mathbb{Z}$ nach $G$ über die Korrespondenz*

$$g \longmapsto (n \mapsto g^n) \text{ und } \varphi \longmapsto \varphi(1)\,.$$

*Beweis.* Sei $g \in G$ fixiert. Dass die Abbildung

$$\varphi_g\colon \mathbb{Z} \longrightarrow G,\, n \longmapsto g^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, ist eine Umformulierung der Potenzgesetze. Wegen $\varphi_g(1) = g^1 = g$ erhält man aus der Potenzabbildung das Gruppenelement zurück. Umgekehrt ist ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ durch $\varphi(1)$ eindeutig festgelegt, da $\varphi(n) = (\varphi(1))^n$ für $n$ positiv und $\varphi(n) = ((\varphi(1))^{-1})^{-n}$ für $n$ negativ gelten muss. □

Die Gruppenhomomorphismen von einer Gruppe $G$ nach $\mathbb{Z}$ sind schwieriger zu charakterisieren. Die Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ sind die Multiplikationen mit einer festen ganzen Zahl $a$, also

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\, x \longmapsto ax.$$

### Gruppenisomorphismen

Definition 10.8. Seien $G$ und $H$ Gruppen. Einen bijektiven Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow H$$

nennt man einen *Isomorphismus* (oder eine *Isomorphie*). Die beiden Gruppen heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Beispiel 10.9. Betrachte die additive Gruppe der reellen Zahlen, also $(\mathbb{R}, 0, +)$, und die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen, also $(\mathbb{R}_+, 1, \cdot)$. Dann ist die Exponentialabbildung

$$\exp\colon\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto \exp(x),$$

ein Gruppenisomorphismus. Dies beruht auf grundlegenden analytischen Eigenschaften der Exponentialfunktion. Die Homomorphieeigenschaft ist lediglich eine Umformulierung des Exponentialgesetzes

$$\exp(x+y) \,=\, e^{x+y} \,=\, e^x e^y \,=\, \exp(x)\exp(y).$$

Die Injektivität der Abbildung folgt aus der strengen Monotonie, die Surjektivität folgt aus dem Zwischenwertsatz. Die Umkehrabbildung ist der natürliche Logarithmus, der somit ebenfalls ein Gruppenisomorphismus ist.

Lemma 10.10. *Seien $G$ und $H$ Gruppen und sei*

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow H$$

*ein Gruppenisomorphismus. Dann ist auch die Umkehrabbildung*

$$\varphi^{-1}\colon\, H \longrightarrow G,\, h \longmapsto \varphi^{-1}(h),$$

*ein Gruppenisomorphismus.*

*Beweis.* Dies folgt aus $\varphi^{-1}(e_H) = e_G$ und aus

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(h_1h_2) &= \varphi^{-1}\left(\varphi(\varphi^{-1}(h_1))\varphi(\varphi^{-1}(h_2))\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\varphi(\varphi^{-1}(h_1)\varphi^{-1}(h_2))\right) \\ &= \varphi^{-1}(h_1)\varphi^{-1}(h_2). \end{aligned}$$

□

Isomorphe Gruppen sind bezüglich ihrer gruppentheoretischen Eigenschaften als gleich anzusehen. Isomorphismen einer Gruppe auf sich selbst nennt man auch *Automorphismen*.

### Der Kern eines Gruppenhomomorphismus

Definition 10.11. Seien $G$ und $H$ Gruppen und sei

$$\varphi\colon\ G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Dann nennt man das Urbild des neutralen Elementes den *Kern* von $\varphi$, geschrieben

$$\operatorname{kern}\varphi = \varphi^{-1}(e_H) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}\ .$$

Lemma 10.12. *Seien $G$ und $H$ Gruppen und sei*

$$\varphi\colon\ G \longrightarrow H$$

*ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist der Kern von $\varphi$ eine Untergruppe von $G$.*

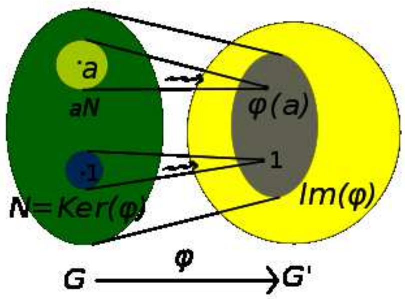
*Beweis*. Wegen $\varphi(e_G) = e_H$ ist $e_G \in \ker\varphi$. Seien $g, g' \in \ker\varphi$. Dann ist

$$\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g') = e_H e_H = e_H$$

und daher ist auch $gg' \in \ker\varphi$. Der Kern ist also ein Untermonoid. Sei nun $g \in \ker\varphi$ und betrachte das inverse Element $g^{-1}$. Es ist

$$\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1} = e_H^{-1} = e_H\ ,$$

also auch $g^{-1} \in \ker\varphi$. □




Lemma 10.13. *Seien $G$ und $H$ Gruppen. Ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ ist genau dann injektiv, wenn der Kern von $\varphi$ trivial ist.*

*Beweis*. Wenn $\varphi$ injektiv ist, so darf auf jedes Element $h \in H$ höchstens ein Element aus $G$ gehen. Da $e_G$ auf $e_H$ geschickt wird, darf kein weiteres Element auf $e_H$ gehen, d.h. $\ker\varphi = \{e_G\}$. Sei umgekehrt dies der Fall und sei angenommen, dass $g, \tilde{g} \in G$ beide auf $h \in H$ geschickt werden. Dann ist

$$\varphi\left(g\tilde{g}^{-1}\right) \;=\; \varphi(g)\varphi(\tilde{g})^{-1} \;=\; hh^{-1} \;=\; e_H$$

und damit ist $g\tilde{g}^{-1} \in \ker\varphi$, also $g\tilde{g}^{-1} = e_G$ nach Voraussetzung und damit $g = \tilde{g}$. □

### Das Bild eines Gruppenhomomorphismus

Lemma 10.14. *Seien $G$ und $H$ Gruppen und sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist das Bild von $\varphi$ eine Untergruppe von $H$.*

*Beweis.* Sei $B := \operatorname{bild} \varphi$. Dann ist $e_H = \varphi(e_G) \in B$. Seien $h_1, h_2 \in B$. Dann gibt es $g_1, g_2 \in G$ mit $\varphi(g_1) = h_1$ und $\varphi(g_2) = h_2$. Damit ist $h_1 + h_2 = \varphi(g_1) + \varphi(g_2) = \varphi(g_1 + g_2) \in B$. Ebenso gibt es für $h \in B$ ein $g \in G$ mit $\varphi(g) = h$. Somit ist $h^{-1} = (\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1}) \in B$. □

Beispiel 10.15. Betrachte die analytische Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Aufgrund des Exponentialgesetzes ist $e^{i(t+s)} = e^{it}e^{is}$ und $e^{i0} = e^0 = 1$. Daher liegt ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +, 0)$ in die multiplikative Gruppe $(\mathbb{C}^\times, \cdot, 1)$ vor. Wir bestimmen den Kern und das Bild dieser Abbildung. Für den Kern muss man diejenigen reellen Zahlen $t$ bestimmen, für die

$$\cos t = 1 \text{ und } \sin t = 0$$

ist. Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen ist dies genau dann der Fall, wenn $t$ ein Vielfaches von $2\pi$ ist. Der Kern ist also die Untergruppe $2\pi\mathbb{Z}$. Für einen Bildpunkt gilt $|e^{it}| = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$, so dass der Bildpunkt auf dem komplexen Einheitskreis liegt. Andererseits durchlaufen die trigonometrischen Funktionen den gesamten Einheitskreis, so dass die Bildgruppe der Einheitskreis mit der komplexen Multiplikation ist.

## Abbildungsverzeichnis