Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 8

Übungsaufgaben

Aufgabe 8.1. Finde eine Darstellung der 1 (im Sinne des Lemmas von Bezout) für die folgenden Zahlenpaare: 5 und 7; 20 und 27; 23 und 157.

Aufgabe 8.2.*

Die Wasserspedition „Alles im Eimer“ verfügt über einen 7- und einen 10-Liter-Eimer, die allerdings keine Markierungen haben. Sie erhält den Auftrag, insgesamt genau einen Liter Wasser von der Nordsee in die Ostsee zu transportieren. Kann sie diesen Auftrag erfüllen?

Aufgabe 8.3. Alle Flöhe leben auf einem unendlichen Zentimeter-Band. Ein Flohmännchen springt bei jedem Sprung 78 cm und die deutlich kräftigeren Flohweibchen springen mit jedem Sprung 126 cm. Die Flohmännchen Florian, Flöhchen und Carlo sitzen in den Positionen $-123, 55$ und -49. Die Flohweibchen Flora und Florentina sitzen in Position 17 bzw. 109. Welche Flöhe können sich treffen?

Aufgabe 8.4. Es seien a und b natürliche Zahlen, deren Produkt ab von einer natürlichen Zahl n geteilt werde. Die Zahlen n und a seien teilerfremd. Zeige, dass b von n geteilt wird.

Aufgabe 8.5. Seien r und s teilerfremde Zahlen. Zeige, dass jede Lösung (x, y) der Gleichung

$$rx + sy = 0$$

die Gestalt $(x, y) = v(s, -r)$ hat, mit einer eindeutig bestimmten Zahl v.

Aufgabe 8.6. Es seien a und d teilerfremde ganze Zahlen. Zeige, dass es eine Potenz a^i mit $i \geq 1$ gibt, deren Rest bei Division durch d gleich 1 ist.

Aufgabe 8.7. Es sei $p \neq 2, 5$ eine Primzahl. Zeige, dass es eine natürliche Zahl der Form (im Dezimalsystem)

$$111 \ldots 111$$

gibt, die ein Vielfaches von p ist.

Aufgabe 8.8. Zeige, dass in einem Hauptidealbereich R zu beliebigen Elementen $a_1, \ldots, a_n \in R$ sowohl ein größter gemeinsame Teiler als auch ein kleinstes gemeinsames Vielfaches existieren.

Aufgabe 8.9. Es seien $a, b \in R$ zwei irreduzible, nicht assoziierte Elemente in einem Integritätsbereich. Zeige, dass a und b teilerfremd sind.

Aufgabe 8.10. Betrachte den Unterring

$$R = K[X^2, X^3, X^4, X^5, \ldots] \subset K[X].$$

Zeige, dass für die Elemente X^2 und X^3 kein kleinstes gemeinsames Vielfaches existiert.

Aufgabe 8.11. Betrachte den Unterring

$$R = K[X^2, X^3, X^4, X^5, \ldots] \subset K[X].$$

Zeige, dass für die Elemente X^2 und X^3 ein größter gemeinsamer Teiler existiert, dieser aber nicht als Linearkombination daraus darstellbar ist.

Aufgabe 8.12.*

Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 1071 und 1029.

Aufgabe 8.13. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 12733 und 3983. Geben Sie eine Darstellung des ggT von 12733 und 3983 an.

Aufgabe 8.14. Bestimme in $\mathbb{Q}[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^3 + 2X^2 + 5X + 2$ und $Q = X^2 + 4X - 3$.

Statt $\mathbb{Z}/(p)$ für eine Primzahl p schreiben wir gelegentlich auch $\mathbb{F}_p$.

Aufgabe 8.15. Bestimme in $\mathbb{F}_3[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^3+2X^2+X+2$ und $Q = 2X^2 + 1$.

Man gebe auch eine Darstellung des ggT an.

Aufgabe 8.16. Zeige, dass $\mathbb{Z}[X]$ und der Polynomring in zwei Variablen $K[X,Y]$ über einem Körper K keine Hauptidealbereiche sind.

Aufgabe 8.17.*

Zeige durch Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Zerlegung in Primzahlen besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.18. (5 Punkte)

Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Zur Karnevalszeit läuft sie aber nicht in Sekundenschritten, sondern addiert, ausgehend von der Nullstellung, in jedem Zählschritt immer 11 Stunden, 11 Minuten und 11 Sekunden dazu. Wird bei dieser Zählweise jede mögliche digitale Anzeige erreicht? Nach wie vielen Schritten kehrt zum ersten Mal die Nullstellung zurück?

Aufgabe 8.19. (3 Punkte)

Die Wasserspedition „Alles im Eimer“ verfügt über 77-, 91- und 143-Liter Eimer, die allerdings keine Markierungen haben. Sie erhält den Auftrag, genau einen Liter Wasser von der Nordsee in die Ostsee zu transportieren. Wie kann sie den Auftrag erfüllen?

Aufgabe 8.20. (4 Punkte)

Es sei R ein Integritätsbereich und $a \in R$ ein Element. Zeige, dass a genau dann irreduzibel ist, wenn das Hauptideal (a) unter allen vom Einheitsideal verschiedenen Hauptidealen maximal ist.

Aufgabe 8.21. (3 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{C}[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^3 + (2-i)X^2 + 4$ und $Q = (3-i)X^2 + 5X - 3$.

Man gebe auch eine Darstellung des ggT an.

Aufgabe 8.22. (4 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{F}_5[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^4 + 3X^3 + X^2 + 4X + 2$ und $Q = 2X^3 + 4X^2 + X + 3$.

Man gebe auch eine Darstellung des ggT an.

Aufgabe 8.23. (4 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ ein Unterring. Bestätige oder widerlege die folgenden Aussagen.

(1) Zu einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ ist auch $\mathfrak{a} \cap S$ ein Ideal (in S).
(2) Zu einem Radikal $\mathfrak{a} \subseteq R$ ist auch $\mathfrak{a} \cap S$ ein Radikal.
(3) Zu einem Primideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ ist auch $\mathfrak{a} \cap S$ ein Primideal.
(4) Zu einem maximalen Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ ist auch $\mathfrak{a} \cap S$ ein maximales Ideal.