Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 6

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1. Skizziere ein Teilerdiagramm für die Zahlen $25, 30, 36$ sowie all ihrer positiven Teiler.

Aufgabe 6.2. Zeige, dass für je zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ aus

$$a|b \text{ und } b|a$$

die Beziehung $a = \pm b$ folgt.

Aufgabe 6.3.*

Zeige, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl $25n^2 - 17$ ein Vielfaches von 8 ist.

Aufgabe 6.4. Zeige, dass eine natürliche Zahl n genau dann gerade ist, wenn ihre letzte Ziffer im Dezimalsystem gleich $0, 2, 4, 6$ oder 8 ist.

Aufgabe 6.5. Formuliere und beweise (bekannte) Teilbarkeitskriterien für Zahlen im Dezimalsystem für die Teiler $k = 2, 3, 5, 9, 11$.

Aufgabe 6.6. Betrachte im 15er System mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 8, 9, A, B, C, D, E$ die Zahl

$$EA09B4CA\,.$$

Ist diese Zahl durch 7 teilbar?

Aufgabe 6.7.*

Seien $a, b \geq 2$ und sei $n = ab$.

a) Zeige, dass die beiden Polynome $X^a - 1$ und $X^b - 1$ Teiler des Polynoms $X^n - 1$ sind.

b) Sei $a \neq b$. Ist $(X^a - 1)(X^b - 1)$ stets ein Teiler von $X^n - 1$?

c) Man gebe drei Primfaktoren von $2^{30} - 1$ an.

Aufgabe 6.8. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und seien $F, G \in K[X]$ zwei Polynome. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass F ein Teiler von G in $K[X]$ genau dann ist, wenn F ein Teiler von G in $L[X]$ ist.

Aufgabe 6.9. Zeige, dass die Assoziiertheit in einem kommutativen Ring eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 6.10. Zeige, dass in einem kommutativen Ring R folgende Teilbarkeitsbeziehungen gelten.

(1) Sind a und b assoziiert, so gilt $a|c$ genau dann, wenn $b|c$.
(2) Ist R ein Integritätsbereich, so gilt hiervon auch die Umkehrung.

Aufgabe 6.11. Zeige, dass die Primzahlen $2, 3, 5$ Primelemente in $\mathbb{Z}$ sind.

Aufgabe 6.12. Zeige, dass im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K die Variable X irreduzibel und prim ist.

Aufgabe 6.13. Zeige, dass im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K die linearen Polynome $aX + b$ ($a \neq 0$) irreduzibel und prim ist.

Aufgabe 6.14. Bestimme im Polynomring $\mathbb{Z}/(2)[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad $2, 3, 4$.

Aufgabe 6.15. Es sei R ein Integritätsbereich mit $2 \neq 0$ und $r \in R$ ein Element, das keine Quadratwurzel in R besitze. Zeige, dass das Polynom $X^2 - r \in R[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 6.16. Zeige, dass ein reelles Polynom von ungeradem Grad nicht irreduzibel ist.

Hinweis: Der Zwischenwertsatz hilft.

Aufgabe 6.17. Zeige, dass das Polynom $X^3 + 2X^2 - 5$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 6.18. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von 105 und 150.

Aufgabe 6.19. Sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Menge von ganzen Zahlen. Zeige, dass der nichtnegative größte gemeinsame Teiler der a_i mit demjenigen gemeinsamen Teiler übereinstimmt, der bezüglich der Ordnungsrelation $\geq$ der größte gemeinsame Teiler ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.20. (3 Punkte)

Beweise die folgenden Eigenschaften zur Teilbarkeit in einem kommutativen Ring R

(1) Für jedes Element a gilt $1|a$ und $a|a$.
(2) Für jedes Element a gilt $a|0$.
(3) Gilt $a|b$ und $b|c$, so gilt auch $a|c$.
(4) Gilt $a|b$ und $c|d$, so gilt auch $ac|bd$.
(5) Gilt $a|b$, so gilt auch $ac|bc$ für jedes $c \in R$.
(6) Gilt $a|b$ und $a|c$, so gilt auch $a|rb+sc$ für beliebige Elemente $r, s \in R$.

Aufgabe 6.21. (4 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich und sei $R[X]$ der Polynomring darüber. Zeige, dass ein Polynom der Form $X + c$ ein Primelement ist.

Man gebe auch ein Beispiel, dass dies für Polynome der Form $aX + c$ nicht gelten muss.

Aufgabe 6.22. (4 Punkte)

Betrachte den Unterring

$$R = K[X^2, X^3, X^4, X^5, \ldots] \subset K[X] .$$

Zeige, dass die Elemente X^2 und X^3 in R irreduzibel, aber nicht prim sind.

Aufgabe 6.23. (5 Punkte)

Bestimme im Polynomring $\mathbb{Z}/(3)[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad 4.

In der folgenden Aufgabe sind die Eigenschaften prim und irreduzibel in einem Monoid zu verstehen, ohne dass ein Ring vorliegt.

AUFGABE 6.24. (4 Punkte)

Betrachte die Menge M, die aus allen positiven natürlichen Zahlen besteht, in deren Primfaktorzerlegung (in $\mathbb{N}$) eine gerade Anzahl (mit Vielfachheiten gezählt) von Primfaktoren vorkommt. Zeige, dass M ein multiplikatives Untermonoid ist. Man charakterisiere die irreduziblen Elemente und die Primelemente in M.