Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 5

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1. Es seien $q, d, s \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 1$ und $n = qd + s$. Zeige, dass der Rest von n bei Division durch d gleich dem Rest von s bei Division durch d ist.

Aufgabe 5.2. Sei d eine positive natürliche Zahl. Es seien a, b natürliche Zahlen und es seien r bzw. s die Reste von a bzw. b bei Division durch d. Zeige, dass der Rest von $a + b$ bei Division durch d gleich dem Rest von $r + s$ bei Division durch d ist. Formuliere und beweise die entsprechende Aussage für die Multiplikation.

Aufgabe 5.3. Es seien $a, d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$. Zeige, dass bei Division mit Rest durch d aller Potenzen von a (also $a^0, a^1, a^2, \ldots$) schließlich eine Periodizität eintreten muss. Es gibt also $i < j$ derart, dass sich die Reste von $a^i, a^{i+1}, a^{i+2}, \ldots, a^{j-2}, a^{j-1}$ bei den folgenden Potenzen periodisch (oder „zyklisch") wiederholen (insbesondere besitzen also a^i und a^j den gleichen Rest). Zeige ebenfalls, dass diese Periodizität nicht bei $a^0 = 1$ anfangen muss.

Aufgabe 5.4.*

Führe in $\mathbb{Z}/(5)[X]$ die Division mit Rest „P durch T" für die beiden Polynome $P = X^3 + 4X^2 + 3X - 1$ und $T = 3X^2 + 2X + 1$ durch.

Aufgabe 5.5. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T" für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Aufgabe 5.6. Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „P durch T" für die beiden Polynome $P = (2 - i)X^5 + (3 + i)X^3 + (3 - i)X - 2i$ und $T = iX^2 + 5X + 6 - 2i$ durch.

Aufgabe 5.7. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

AUFGABE 5.8. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

AUFGABE 5.9. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und seien $P, T \in K[X]$ Polynome. Zeige, dass es für die Division mit Rest „P durch T" unerheblich ist, ob man sie in $K[X]$ oder in $L[X]$ durchführt.

AUFGABE 5.10. Zeige, dass ein reelles Polynom von ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

AUFGABE 5.11.*

Bestimme sämtliche komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 - 1$$

und gebe die Primfaktorzerlegung von diesem Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{C}[X]$ an.

Primfaktorzerlegung haben wir noch nicht begrifflich eingeführt. Gemeint ist eine faktorielle Zerlegung, die man nicht weiter aufspalten kann.

AUFGABE 5.12. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $z \in \mathbb{C}$ sei eine Nullstelle von P. Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle von P ist.

AUFGABE 5.13. Sei R ein ein euklidischer Bereich mit euklidischer Funktion δ. Zeige, dass ein Element $f \in R$ ($f \neq 0$) mit $\delta(f) = 0$ eine Einheit ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 5.14. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „P durch T" für die beiden Polynome $P = 5X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 3X - 1$ und $T = 3X^2 + 6X + 4$ durch.

Aufgabe 5.15. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = (5+i)X^4 + iX^2 + (3-2i)X - 1$ und $T = X^2 + iX + 3 - i$ durch.

Aufgabe 5.16. (3 Punkte)

Bestimme sämtliche komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^4 - 1$$

und gebe die Primfaktorzerlegung von diesem Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{C}[X]$ an.

Aufgabe 5.17. (5 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

Tipp: Man führe Induktion über den Grad und verwende den Fundamentalsatz der Algebra, Aufgabe 5.12 und Aufgabe 5.9