Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 4

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1. Diskutiere, ob es sich bei

$$n!,\ \binom{n}{k},\ \pi,\ e^u, x^y,\ 5^x,\ \sqrt{x},\ \heartsuit$$

um Terme handelt.

Aufgabe 4.2. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass die Multipliktion auf $K[X]$ assoziativ, kommutativ und distributiv ist und dass das (konstante) Polynom 1 neutrales Element der Multiplikation ist.

Aufgabe 4.3. Berechne das Produkt

$$(2X^3 + 4X + 5) \cdot (X^4 + 5X^2 + 6)$$

im Polynomring $\mathbb{Z}/(7)[X]$.

Aufgabe 4.4. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4 + i)X^2 - 3X + 9i) \cdot ((-3 + 7i)X^2 + (2 + 2i)X - 1 + 6i)\,.$$

Aufgabe 4.5. Beweise die Formel

$$X^n - 1 \,=\, (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + X^{n-3} + \cdots + X^2 + X + 1).$$

Aufgabe 4.6.*

Sei R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R. Zeige, dass die Einheiten von $R[X]$ genau die Einheiten von R sind.

Aufgabe 4.7. Sei R ein kommutativer Ring. und sei $S \subseteq R$ ein Unterring. Zeige, dass $S[X]$ ein Unterring von $R[X]$ ist.

Aufgabe 4.8. Sei R ein kommutativer Ring und sei $R[X]$ der Polynomring über R. Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaft erfüllt.

(1) $\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}$
(2) $\operatorname{grad}(P \cdot Q) \leq \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$
(3) Wenn R ein Integritätsbereich ist, so gilt in (2) die Gleichheit.

Aufgabe 4.9. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5i$ ersetzt.

Aufgabe 4.10. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi\colon K[X] \longrightarrow K,\ P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
(3) $1(a) = 1$.

Aufgabe 4.11. Schreibe das Polynom

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 4$$

in der neuen Variablen $U = X + 2$.

Aufgabe 4.12. Schreibe das Polynom

$$Z^3 - (2i)Z^2 + 3iZ - (45i)$$

in der neuen Variablen $W = Z + 2 - i$.

Aufgabe 4.13.*

Formuliere und beweise die *Lösungsformel für eine quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c \ = \ 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

In welchen Körpern gilt diese Lösungsformel ebenso?

Aufgabe 4.14. Lucy Sonnenschein möchte sich ein quadratisches Grundstück kaufen. Drum rum möchte sie einen Heckenzaun pflanzen. Der Quadratmeterpreis beträgt 200 Euro, ein Meter Hecke kostet 30 Euro und die Eintragung ins Grundbuch kostet 1000 Euro. Lucy möchte eine Million Euro investieren. Welche Seitenlänge hat das Grundstück?

Aufgabe 4.15. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 2,\ f(1) = 0,\ f(3) = 5\,.$$

Aufgabe 4.16. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 0,\ f(-1) = 1\,.$$

Aufgabe 4.17. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(i) = 1,\ f(1) = 1 + i,\ f(1 - 2i) = -i\,.$$

Aufgabe 4.18. Multipliziere in $\mathbb{Z}/(5)[x, y]$ die beiden Polynome

$$x^4 + 2x^2y^2 - xy^3 + 2y^3 \text{ und } x^4y + 4x^2y + 3xy^2 - x^2y^2 + 2y^2\,.$$

Aufgabe 4.19. Multipliziere in $\mathbb{Z}[x, y, z]$ die beiden Polynome

$$x^5 + 3x^2y^2 - xyz^3 \text{ und } 2x^3yz + z^2 + 5xy^2z - x^2y\,.$$

Aufgabe 4.20. Beweise die Identität

$$(X + Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

im Polynomring $\mathbb{Z}[X, Y]$.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 4.21. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt
$((4+i)X^3 - iX^2 + 2X + 3 + 2i) \cdot ((2-i)X^3 + (3-5i)X^2 + (2+i)X + 1 + 5i)$.

AUFGABE 4.22. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X+1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \cdots + X^2 - X + 1)$$

für u ungerade.

AUFGABE 4.23. (4 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und $r \in R$ ein nilpotentes Element. Konstruiere dazu ein lineares Polynom in $R[X]$, das eine Einheit ist. Man gebe auch das Inverse dazu an.

AUFGABE 4.24. (4 Punkte)

Man finde ein Polynom f vom Grad ≤ 3, für welches

$$f(0) = -1,\ f(-1) = -3,\ f(1) = 7,\ f(2) = 21\,.$$

gilt

AUFGABE 4.25. (8 Punkte)

Zwei Personen A und B spielen Polynome-Erraten. Dabei denkt sich A ein Polynom $P(x)$ aus, wobei alle Koeffizienten aus $\mathbb{N}$ sein müssen. Person B darf fragen, was der Wert $P(n_1), P(n_2), \ldots, P(n_r)$ zu gewissen natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ist. Dabei darf B diese Zahlen beliebig wählen und dabei auch vorhergehende Antworten berücksichtigen. Ziel ist es, das Polynom zu erschließen.

Entwickle eine Fragestrategie für B, die immer zur Lösung führt und bei der die Anzahl der Fragen (unabhängig vom Polynom) beschränkt ist.