Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 24

Übungsaufgaben

Aufgabe 24.1.*

Bestimme eine ganze Zahl n derart, dass die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 3x + \frac{7}{3} = 0$$

in $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ liegen.

Aufgabe 24.2.*

Bestimme in $\mathbb{Q}[i]$ das multiplikative Inverse von

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{5}i\,.$$

Die Antwort muss in der Form $p + qi$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ in gekürzter Form sein.

Aufgabe 24.3. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Unterkörper. Zeige, dass dann auch $K[i]$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 24.4. Es sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und sei $K \subseteq L$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass es neben der Identität einen weiteren K-Algebra-Automorphismus $L \to L$ gibt.

Aufgabe 24.5. Es sei $K \subset K'$ $(\subseteq \mathbb{R})$ eine reell-quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass dann auch $K[i] \subset K'[i]$ eine quadratische Körpererweiterung ist.

Aufgabe 24.6. Es sei K ein Körper. Zeige, dass

$$\left\{x \in K^\times \,|\, x \text{ besitzt eine Quadratwurzel in } K\right\}$$

eine Untergruppe der Einheitengruppe $K^\times$ ist.

Aufgabe 24.7. Beschreibe die Gruppe

$$\{x \in K^\times \,|\, x \text{ besitzt eine Quadratwurzel in } K\}$$

für die Körper

$$K = \mathbb{Q},\, \mathbb{R},\, \mathbb{C},\, \mathbb{Z}/(2),\, \mathbb{Z}/(3),\, \mathbb{Z}/(5),\, \mathbb{Z}/(7),\, \mathbb{Z}/(11)\,.$$

Aufgabe 24.8. Es sei p eine Primzahl und

$$K = \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$$

die zugehörige Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$. Zeige, dass die Elemente $x \in K$, die (in K) eine Quadratwurzel besitzen, von der Form

$$x = y^2$$

mit $y \in \mathbb{Q}$ oder von der Form

$$x = pz^2$$

mit $z \in \mathbb{Q}$ sind.

Aufgabe 24.9. Es sei p eine Primzahl. Wir betrachten die Unterkörper der komplexen Zahlen, $K = \mathbb{Q}[\sqrt{p}, i]$ und $L = \mathbb{Q}[\sqrt{p}, \sqrt{-p}]$. Zeige $K = L$.

Aufgabe 24.10.*

Es seien $p, q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und sei

$$f = \sqrt{p} + \sqrt{q}.$$

a) Zeige, dass es ein Polynom $G \in \mathbb{Q}[X]$ der Form

$$G = X^4 + cX^2 + d$$

mit $G(f) = 0$ gibt.

b) Es seien nun zusätzlich p und q verschiedene Primzahlen. Zeige, dass das Polynom G aus Teil a) das Minimalpolynom zu f ist.

Aufgabe 24.11. Betrachte die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{7}] = L.$$

Zeige, dass einerseits $1, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{35}$ und andererseits $(\sqrt{5} + \sqrt{7})^i$, $i = 0, 1, 2, 3$, eine $\mathbb{Q}$-Basis von L bildet. Berechne die Übergangsmatrizen für diese Basen.

Aufgabe 24.12. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung vom Grad p, wobei p eine Primzahl sei. Es sei $x \in L$, $x \notin K$. Zeige, dass $K[x] = L$ ist.

Aufgabe 24.13. Es sei

$$L \subseteq \mathbb{C}$$

ein Unterkörper derart, dass $\mathbb{Q} \subseteq L$ eine Körpererweiterung von Grad 23 ist. Es sei

$$K = L \cap \mathbb{R}$$

Zeige, dass entweder $K = \mathbb{Q}$ oder $K = L$ ist.

Aufgabe 24.14. Bestimme den Grad von

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{7}].$$

Aufgabe 24.15.*

Es sei p eine Primzahl.

a) Bestimme den Grad der Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}].$$

Man gebe auch eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}]$ an.

b) Zeige, dass in $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}]$ alle Elemente der Form m^3p und n^3p^2 mit $m, n \in \mathbb{Q}$ eine dritte Wurzel besitzen.

c) Die rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ besitze in $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}]$ eine dritte Wurzel. Zeige, dass x die Form

$$x = k^3 \text{ oder } x = m^3p \text{ oder } x = n^3p^2$$

mit $k, m, n \in \mathbb{Q}$ besitzt.

d) Es sei nun q eine weitere, von p verschiedene Primzahl. Bestimme den Grad der Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{q}].$$

Aufgabe 24.16. Zeige, dass die Körpererweiterung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}(X)$, wobei $\mathbb{R}(X)$ den Körper der rationalen Funktionen bezeichnet, nicht endlich ist.

Aufgabe 24.17. Zeige, dass der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ ist.

Aufgabe 24.18. Es sei $P = X^2 + aX + b \in K[X]$ ein quadratisches Polynom über einem Körper K. Welche Möglichkeiten gibt es für den Zerfällungskörper von P?

Aufgabe 24.19. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass es einen (injektiven) Ringhomomorphismus $L \to \mathbb{C}$ gibt.

Aufgabe 24.20. Es sei K ein Körper, $F \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n und $K \subseteq L$ der Zerfällungskörper von F. Zeige, dass die Abschätzung

$$\operatorname{grad}_K L \leq n!$$

gilt.

Aufgabe 24.21. Es sei K ein Körper und seien $F_1, \ldots, F_r \in K[X]$ Polynome. Zeige, dass es eine endliche Körpererweiterung $K \subseteq L$ derart gibt, dass diese Polynome in $L[X]$ in Linearfaktoren zerfallen.

Aufgabe 24.22. Es sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl und es sei L der Zerfällungskörper von $X^3 - q$. Welchen Grad besitzt L (über $\mathbb{Q}$)? Man gebe für jeden möglichen Grad Beispiele an.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.23. (3 Punkte)

Bestimme den Grad von

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt[3]{2}].$$

Aufgabe 24.24. (3 Punkte)

Es seien $\mathbb{Q} \subseteq K \subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{Q} \subseteq L \subset \mathbb{C}$ zwei endliche Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ vom Grad d bzw. e. Es seien d und e teilerfremd. Zeige, dass dann

$$K \cap L = \mathbb{Q}$$

ist.

Aufgabe 24.25. (6 (4+1+1) Punkte)

Sei p eine Primzahl.

a) Zeige, dass das Polynom $X^4 - p$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

b) Schließe daraus, dass

$$\mathbb{Q}[\sqrt[4]{p}] \subseteq \mathbb{R}$$

über $\mathbb{Q}$ den Grad vier besitzt.

c) Finde einen echten Zwischenkörper

$$\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[4]{p}].$$

Aufgabe 24.26. (4 (3+1) Punkte)

Es sei K ein endlicher Körper der Charakteristik $p \neq 2$.

a) Zeige, dass es in K Elemente gibt, die keine Quadratwurzel besitzen.

b) Zeige, dass es eine endliche nichttriviale Körpererweiterung

$$K \subseteq L$$

vom Grad zwei gibt.