Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 22

Übungsaufgaben

AUFGABE 22.1. Berechne im Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ das Produkt

$$(-2+\sqrt{7})\cdot(4-\sqrt{7})\,.$$

AUFGABE 22.2. Bestimme in $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ das Inverse von $2+5\sqrt{7}$.

AUFGABE 22.3.*

Bestimme in $\mathbb{Q}[X]/(X^3+4X^2-7)$ das Inverse von $\frac{1}{3}x+5$ (x bezeichnet die Restklasse von X).

AUFGABE 22.4. Bestimme das Inverse von

$$1+\sqrt{2}+3\sqrt{10}$$

im Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]$.

AUFGABE 22.5. Bestimme den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$.

AUFGABE 22.6. Sei $K\subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass L ein K-Vektorraum ist.

AUFGABE 22.7. Sei $K\subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $f\in L$ ein Element. Zeige, dass dann $K(f)$ der Quotientenkörper von $K[f]$ ist.

AUFGABE 22.8. Seien K und L Körper, sei $K\subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei A, $K\subseteq A\subseteq L$, ein Zwischenring. Zeige, dass dann A ebenfalls ein Körper ist.

Aufgabe 22.9. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $f \in L$ ein nicht algebraisches Element. Zeige, dass dann eine Isomorphie

$$K(X) \longrightarrow K(f)$$

von Körpern vorliegt.

Aufgabe 22.10. Es seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Zeige, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{p}, \sqrt{q}]$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, der über $\mathbb{Q}$ den Grad vier besitzt.

Aufgabe 22.11.*

Sei K ein endlicher Körper. Zeige, dass die Anzahl der Elemente von K die Potenz einer Primzahl ist.

Aufgabe 22.12.*

Zeige, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ vom Grad n gibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.13. (2 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$ das Inverse von $3 + 5\sqrt{11}$.

Aufgabe 22.14. (5 (1+1+2+1) Punkte)

Betrachte den Körper $\mathbb{Z}/(13) = \{0, 1, 2, ..., 12\}$ mit 13 Elementen.

(1) Zeige, dass 5 kein Quadrat in $\mathbb{Z}/(13)$ ist und folgere, dass

$$\mathbb{Z}/(13)[X]/(X^2 - 5) =: \mathbb{Z}/(13)[\sqrt{5}]$$

ein Körper ist.

(2) Betrachte die quadratische Körpererweiterung

$$\mathbb{Z}/(13) \subset \mathbb{Z}/(13)[\sqrt{5}]$$

und berechne

$$(2 + 3\sqrt{5})(1 + 11\sqrt{5})(10 + 7\sqrt{5})$$

(3) Finde das Inverse zu $7 + 3\sqrt{5}$ in $\mathbb{Z}/(13)[\sqrt{5}]$.

(4) Zeige, dass -5 kein Quadrat in $\mathbb{Z}/(13)$ ist, dafür aber in $\mathbb{Z}/(13)[\sqrt{5}]$.

Aufgabe 22.15. (4 Punkte)

Bestimme das Inverse von

$$2 + 3\sqrt{5} + \sqrt{7} + 3\sqrt{35}$$

im Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{7}]$.

Aufgabe 22.16. (4 Punkte)

Führe in $(\mathbb{Q}[\sqrt{3}])[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^3 - (2+\sqrt{3})X^2 + 5\sqrt{3}X + 1 + 2\sqrt{3}$ und $T = \sqrt{3}X^2 - X + 2 + 7\sqrt{3}$ durch.

Aufgabe 22.17. (4 Punkte)

Bestimme das Minimalpolynom von

$$\sqrt{3} + \sqrt{5}$$

über $\mathbb{Q}$.