

**Elemente der Algebra****Arbeitsblatt 21****Übungsaufgaben**

AUFGABE 21.1. Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit endlicher Dimension  $n = \dim(V)$ . Es seien  $n$  Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  in  $V$  gegeben. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

- (1)  $v_1, \dots, v_n$  bilden eine Basis von  $V$ .
- (2)  $v_1, \dots, v_n$  bilden ein Erzeugendensystem von  $V$ .
- (3)  $v_1, \dots, v_n$  sind linear unabhängig.

AUFGABE 21.2. Es sei  $K$  ein Körper und sei  $K[X]$  der Polynomring über  $K$ . Sei  $d \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass die Menge aller Polynome vom Grad  $\leq d$  ein endlichdimensionaler Untervektorraum von  $K[X]$  ist. Was ist seine Dimension?

AUFGABE 21.3. Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad  $\leq 4$ , für die  $-2$  und  $3$  Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in  $\mathbb{R}[X]$  ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

AUFGABE 21.4.\*

Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume mit  $\dim(V) = n$  und  $\dim(W) = m$ . Welche Dimension besitzt der Produktraum  $V \times W$ ?

AUFGABE 21.5. Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen, und sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Zeige, dass die Vektorenfamilie

$$v_1, \dots, v_n \text{ und } iv_1, \dots, iv_n$$

eine Basis von  $V$ , aufgefasst als reeller Vektorraum, ist.

AUFGABE 21.6. Es sei die Standardbasis  $e_1, e_2, e_3, e_4$  im  $\mathbb{R}^4$  gegeben und die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Vektoren linear unabhängig sind und ergänze sie mit einem geeigneten Standardvektor gemäß Lemma 21.1 zu einer Basis. Kann man jeden Standardvektor nehmen?

AUFGABE 21.7. Bestimme die Übergangsmatrizen  $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$  und  $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$  für die Standardbasis  $\mathfrak{u}$  und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis  $\mathfrak{v}$  im  $\mathbb{R}^4$ .

AUFGABE 21.8. Bestimme die Übergangsmatrizen  $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$  und  $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$  für die Standardbasis  $\mathfrak{u}$  und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 + 5i \\ 1 - i \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 4 + i \end{pmatrix},$$

gegebene Basis  $\mathfrak{v}$  im  $\mathbb{C}^2$ .

AUFGABE 21.9. Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im  $\mathbb{R}^2$ .

- Zeige, dass sowohl  $\mathfrak{v}$  als auch  $\mathfrak{u}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^2$  ist.
- Es sei  $P \in \mathbb{R}^2$  derjenige Punkt, der bezüglich der Basis  $\mathfrak{v}$  die Koordinaten  $(-2, 5)$  besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis  $\mathfrak{u}$ ?
- Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von  $\mathfrak{v}$  nach  $\mathfrak{u}$  beschreibt.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 21.10. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad  $\leq 6$ , für die  $-1$ ,  $0$  und  $1$  Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in  $\mathbb{R}[X]$  ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

AUFGABE 21.11. (3 Punkte)

Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Es sei  $v_1, \dots, v_m$  eine Familie von Vektoren in  $V$  und sei

$$U = \langle v_i, i = 1, \dots, m \rangle$$

der davon aufgespannte Untervektorraum. Zeige, dass die Familie genau dann linear unabhängig ist, wenn die Dimension von  $U$  gleich  $m$  ist.

AUFGABE 21.12. (4 Punkte)

Bestimme die Übergangsmatrizen  $M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}$  und  $M_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}}$  für die Standardbasis  $\mathbf{u}$  und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis  $\mathbf{v}$  im  $\mathbb{R}^3$ .

AUFGABE 21.13. (6 Punkte)

Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

im  $\mathbb{R}^3$ .

- a) Zeige, dass sowohl  $\mathbf{v}$  als auch  $\mathbf{u}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  ist.
- b) Es sei  $P \in \mathbb{R}^3$  derjenige Punkt, der bezüglich der Basis  $\mathbf{v}$  die Koordinaten  $(2, 5, 4)$  besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis  $\mathbf{u}$ ?
- c) Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von  $\mathbf{v}$  nach  $\mathbf{u}$  beschreibt.