

**Elemente der Algebra****Arbeitsblatt 18****Übungsaufgaben**

AUFGABE 18.1. Man gebe die Partialbruchzerlegung der Stammbrüche

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{25}$$

an.

AUFGABE 18.2. Man gebe die Partialbruchzerlegung der Stammbrüche

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots$$

an.

AUFGABE 18.3. Finde eine Darstellung der rationalen Zahl  $1/60$  als Summe von rationalen Zahlen, deren Nenner Primzahlpotenzen sind.

AUFGABE 18.4. Zeige, dass für Zahlen  $n, r \in \mathbb{N}_+$  die Gleichheit

$$\frac{n^r - 1}{n^r} = \frac{n - 1}{n} + \frac{n - 1}{n^2} + \dots + \frac{n - 1}{n^{r-1}} + \frac{n - 1}{n^r}$$

gilt.

Was bedeutet die vorstehende Aufgabe bei  $n = 10$ ?

AUFGABE 18.5. Bestimme die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{100}{77}.$$

AUFGABE 18.6. Bestimme die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{999}{75}.$$

2

AUFGABE 18.7. Bestimme die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X(X-1)}$$

über einem Körper  $K$ .

AUFGABE 18.8. Bestimme die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{3X^5 + 4X^4 - 2X^2 + 5X - 6}{X^3}.$$

AUFGABE 18.9. Bestimme die Koeffizienten in der Partialbruchzerlegung in Beispiel 18.9 durch Einsetzen von einigen Zahlen für  $X$ .

AUFGABE 18.10.\*

Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{x^4 + 1}$$

unter Verwendung der Zerlegung

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

AUFGABE 18.11. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X^2(X^2 + 1)}.$$

AUFGABE 18.12. Bestimme die komplexe Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X^3 - 1}.$$

AUFGABE 18.13. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X^3(X-1)^3}.$$

AUFGABE 18.14. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{X^3 + 4X^2 + 7}{X^2 - X - 2}.$$

AUFGABE 18.15. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X(X-1)(X-2)(X-3)}.$$

AUFGABE 18.16.\*

Es sei

$$f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3}.$$

- Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von  $f(x)$ .
- Bestimme eine Stammfunktion von  $f(x)$ .

AUFGABE 18.17.\*

- Zeige, dass  $X^3 + X^2 + 2$  irreduzibel in  $\mathbb{Z}/(3)[X]$  ist.
- Bestimme die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{X^4}{(X^3 + X^2 + 2)^2}$$

in  $\mathbb{Z}/(3)(X)$ .

AUFGABE 18.18.\*

- Zeige, dass  $X^2 + 2$  irreduzibel in  $\mathbb{Z}/(5)[X]$  ist.
- Zeige, dass  $X^3 + X + 1$  irreduzibel in  $\mathbb{Z}/(5)[X]$  ist.
- Bestimme die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{(X^2 + 2)(X^3 + X + 1)}$$

in  $\mathbb{Z}/(5)(X)$ .

AUFGABE 18.19.\*

- Zeige, dass  $X^2 + 1$  irreduzibel in  $\mathbb{Q}[X]$  ist.
- Zeige, dass  $X^4 + 1$  irreduzibel in  $\mathbb{Q}[X]$  ist. (Tipp: In  $\mathbb{R}[X]$  gilt die Zerlegung  $X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$ )
- Bestimme die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{(X^2 + 1)(X^4 + 1)}$$

in  $\mathbb{Q}(X)$ .

**Aufgaben zum Abgeben**

AUFGABE 18.20. (4 Punkte)

Finde eine Darstellung der rationalen Zahl  $1/210$  als Summe von rationalen Zahlen, deren Nenner Primzahlpotenzen sind.

AUFGABE 18.21. (3 Punkte)

Bestimme die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1536}{245}.$$

AUFGABE 18.22. (2 Punkte)

Es sei  $K$  ein Körper. Zeige, dass im Funktionenkörper  $K(X)$  die Gleichheit

$$\frac{X^r - 1}{X^r} = \frac{X - 1}{X} + \frac{X - 1}{X^2} + \cdots + \frac{X - 1}{X^{r-1}} + \frac{X - 1}{X^r}$$

gilt.

AUFGABE 18.23. (4 Punkte)

Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X^4 - 1}.$$

AUFGABE 18.24. (5 Punkte)

Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{X^7 + X^4 - 5X + 3}{X^8 + X^6 - X^4 - X^2}.$$