Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 16

Aufgabe 16.1.*

(a) Bestimme für die Zahlen 3, 5 und 7 modulare Basislösungen, finde also die kleinsten positiven Zahlen, die in

$$\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(5) \times \mathbb{Z}/(7)$$

die Restetupel $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ repräsentieren.

(b) Finde mit den Basislösungen die kleinste positive Lösung x der simultanen Kongruenzen

$$x = 2 \mod 3,\ x = 4 \mod 5 \text{ und } x = 3 \mod 7\,.$$

Aufgabe 16.2.*

(a) Bestimme für die Zahlen 2, 9 und 25 modulare Basislösungen, finde also die kleinsten positiven Zahlen, die in

$$\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(25)$$

die Restetupel $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ repräsentieren.

(b) Finde mit den Basislösungen die kleinste positive Lösung x der simultanen Kongruenzen

$$x = 0 \mod 2,\ x = 3 \mod 9 \text{ und } x = 5 \mod 25\,.$$

Aufgabe 16.3. a) Bestimme für die Zahlen 2, 3 und 7 modulare Basislösungen, finde also die kleinsten positiven Zahlen, die in

$$\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(7)$$

die Restetupel $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ repräsentieren.

(b) Finde mit den Basislösungen die kleinste positive Lösung a der Kongruenzen

$$a = 1 \quad \mod 2,\ \ a = 2 \quad \mod 3 \ \text{ und } \ a = 2 \quad \mod 7\,.$$

Aufgabe 16.4. Gibt es eine natürliche Zahl n, die modulo 4 den Rest 3 und modulo 6 den Rest 2 besitzt?

Aufgabe 16.5.*

Man berechne in $\mathbb{Z}/(80)$ die Elemente

(1) $3^{1234567}$,
(2) $2^{1234567}$,
(3) $5^{1234567}$.

Aufgabe 16.6. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) In der Primfaktorzerlegung von n kommt jeder Primfaktor mit Exponent 1 vor.
(2) Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ ist reduziert.
(3) Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ ist das Produkt von Körpern.

Aufgabe 16.7. Bestimme die nilpotenten Elemente, die idempotenten Elemente und die Einheiten in $\mathbb{Z}/(72)$.

Aufgabe 16.8. Bestimme die nilpotenten Elemente, die idempotenten Elemente und die Einheiten von $\mathbb{Z}/(100)$.

Aufgabe 16.9. In dieser Aufgabe geht es um den Restklassenring $\mathbb{Z}/(360)$.

(1) Schreibe $\mathbb{Z}/(360)$ als Produktring.
(2) Wie viele Einheiten besitzt $\mathbb{Z}/(360)$?
(3) Schreibe das Element 239 in komponentenweiser Darstellung. Begründe, warum es sich um eine Einheit handelt und finde das Inverse in komponentenweiser Darstellung.
(4) Berechne die Ordnung von 239 in $\mathbb{Z}/(360)$.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Sei R ein kommutativer Ring und n_R das Nilideal von R, das aus allen nilpotenten Elementen von R besteht. Dann nennt man den Restklassenring R/n_R die *Reduktion* von R.

Aufgabe 16.10. Beschreibe die nilpotenten Elemente von $\mathbb{Z}/(n)$ und die Reduktion von $\mathbb{Z}/(n)$.

Aufgabe 16.11. Berechne die Werte der Eulerschen Funktion $\varphi(n)$ für $n \leq 20$.

Aufgabe 16.12. Zeige, dass die Eulersche Funktion φ für natürliche Zahlen n, m die Eigenschaft

$$\varphi(\mathrm{ggT}(m,n))\varphi(\mathrm{kgV}(m,n)) = \varphi(n)\varphi(m)$$

erfüllt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.13. (4 Punkte)

(a) Bestimme für die Zahlen 4, 5 und 11 modulare Basislösungen, finde also die kleinsten positiven Zahlen, die in

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11}$$

die Restetupel $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ repräsentieren.

(b) Finde mit den Basislösungen die kleinste positive Lösung a der *simultanen Kongruenzen*

$$a = 3 \mod 4, \; a = 2 \mod 5 \text{ und } a = 10 \mod 11\,.$$

Aufgabe 16.14. (3 Punkte)

Bestimme die nilpotenten Elemente, die idempotenten Elemente und die Einheiten von $\mathbb{Z}/(60)$.

Aufgabe 16.15. (3 Punkte)

Bestimme den Rest von 11! modulo 91.

Aufgabe 16.16. (4 Punkte)

Beweise die *Eulersche Formel* für die Eulersche Funktion φ, das ist die Aussage, dass

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n,\ p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

gilt.