Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 14

Übungsaufgaben

Aufgabe 14.1. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$ ein fixiertes Element. Zeige, dass der Restklassenring $K[X]/(X-a)$ zu K isomorph ist.

Aufgabe 14.2. Es sei K ein Körper und $P \in K[X]$ ein Polynom vom Grad d. Zeige, dass jedes Element im Restklassenring $R = K[X]/(P)$ durch ein Polynom vom Grad $< d$ repräsentiert werden kann.

Aufgabe 14.3. Berechne in $\mathbb{Q}[X]/(X^5)$ das Produkt

$$\left(7X^4 - \frac{2}{3}X^3 + 2X + \frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{7}X^3 + 4X^2 - 3\right).$$

Aufgabe 14.4.*

Berechne in

$$\mathbb{Z}/(7)[X]/(X^3 + 4X^2 + X + 5)$$

das Produkt

$$(2x^2 + 5x + 3) \cdot (3x^2 + x + 6)$$

(x bezeichne die Restklasse von X).

Aufgabe 14.5. Zeige, dass der Restklassenring $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 14.6. Vereinfache den Restklassenring $\mathbb{Z}[X]/(3, 11X^2 - 4)$.

Aufgabe 14.7. Berechne im Restklassenring $\mathbb{Z}[X]/(6X)$ das Produkt

$$(4X^3 - 2X + 3)(3X^3 - 3X^2 + 4).$$

AUFGABE 14.8. Lucy Sonnenschein kennt von einer natürlichen Zahl n nur den Rest bei Division durch 12. Welche der Reste von n bei Division durch die folgenden Zahlen e kann sie daraus erschließen?

(1) $e = 1$,
(2) $e = 2$,
(3) $e = 3$,
(4) $e = 4$,
(5) $e = 5$,
(6) $e = 6$,
(7) $e = 7$,
(8) $e = 8$,
(9) $e = 0$.

AUFGABE 14.9. Man konstruiere zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ einen kommutativen Ring R der Charakteristik 0 derart, dass es in R ein Element der Ordnung (bezüglich der additiven Struktur) n gibt.

AUFGABE 14.10. Man konstruiere einen kommutativen Ring R, in dem die 4 mindestens drei Quadratwurzeln besitzt.

AUFGABE 14.11.*

Man gebe zu jedem $n \geq 2$ einen kommutativen Ring R und ein Element $x \in R$, $x \neq 0$, an, für das $nx = 0$ und $x^n = 0$ gilt.

AUFGABE 14.12. Bestimme den Kern und das Bild des Einsetzungshomomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{R},\, X \longmapsto \sqrt{5}.$$

AUFGABE 14.13. Sei R ein Integritätsbereich und sei $f \in R$, $f \neq 0$, ein Element. Zeige, dass f genau dann ein Primelement ist, wenn der Restklassenring $R/(f)$ ein Integritätsbereich ist.

AUFGABE 14.14. Zeige, dass jeder Restklassenring eines Hauptidealringes wieder ein Hauptidealring ist. Man gebe ein Beispiel, dass ein Restklassenring eines Hauptidealbereiches kein Hauptidealbereich sein muss.

AUFGABE 14.15. Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Ideal. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ genau dann ein Primideal ist, wenn der Restklassenring $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 14.16. Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in S. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in R ist.

Zeige durch ein Beispiel, dass das Urbild eines maximalen Ideales kein maximales Ideal sein muss.

Aufgabe 14.17. Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{a}$ ein Radikal in S. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Radikal in R ist.

Aufgabe 14.18.

(1) Zu einem Körper K sei $R = \operatorname{Folg}(K)$ die Menge der *Folgen* mit Werten in K. Zeige, dass R ein kommutativer Ring ist. Besitzt ein solcher Ring nicht-triviale idempotente Elemente?
(2) Sei von nun an $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so dass man eine Metrik zur Verfügung hat. Zeige, dass die Menge der *konvergenten Folgen* $\operatorname{Folg}_{\text{konv}}(K)$ einen Unterring von R bildet.
(3) Zeige im Fall $K = \mathbb{Q}$, dass die Menge $\operatorname{Folg}_{\text{Cauchy}}(\mathbb{Q})$ der Cauchy-Folgen ebenfalls ein Unterring ist.
(4) Betrachte nun die Menge N der *Nullfolgen* und begründe, dass diese ein Ideal in den verschiedenen Ringen ist. Zeige, dass N die Eigenschaft besitzt, dass wenn $x \cdot y \in N$ ist, dass dann einer der Faktoren dazu gehören muss.
(5) Definiere einen natürlichen Ringhomomorphismus
$$\operatorname{Folg}_{\text{Cauchy}}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
derart, dass eine Ringisomorphie
$$\operatorname{Folg}_{\text{Cauchy}}(\mathbb{Q})/N \longrightarrow \mathbb{R}$$
entsteht.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.19. (3 Punkte)

Es seien a und n natürliche Zahlen mit $n \geq 2$. Es sei
$$a = \sum_{i=0}^{\ell} a_i n^i$$
die Darstellung von a zur Basis n (also mit $0 \leq a_i < n$). Es sei k ein Teiler von $n - 1$. Dann wird a von k genau dann geteilt, wenn die *Quersumme* $\sum_{i=0}^{\ell} a_i$ von k geteilt wird.

Aufgabe 14.20. (3 Punkte)

Sei a eine positive reelle Zahl. Zeige, dass der Restklassenring $\mathbb{R}[X]/(X^2+a)$ isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 14.21. (3 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal in R. Zeige, dass I genau dann ein maximales Ideal ist, wenn der Restklassenring R/I ein Körper ist.

Aufgabe 14.22. (4 Punkte)

Zeige, dass der Restklassenring

$$\mathbb{Z}/(2)[X]/(X^2+X+1)$$

ein Körper mit vier Elementen ist.

Die nächste Aufgabe verwendet folgende Definition.

Ein kommutativer Ring R heißt *reduziert*, wenn 0 das einzige nilpotente Element von R ist.

Aufgabe 14.23. (3 Punkte)

Zeige, dass ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem kommutativen Ring R genau dann ein Radikal ist, wenn der Restklassenring $R/\mathfrak{a}$ reduziert ist.