Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 13

Übungsaufgaben

Aufgabe 13.1. Zeige, dass das Bild unter einem Ringhomomorphismus ein Unterring ist.

Aufgabe 13.2. Zeige, dass die Umkehrabbildung eines Ringisomorphismus wieder ein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 13.3. Es seien R, S, T Ringe. Zeige die folgenden Eigenschaften.

(1) Die Identität $\mathrm{id} : R \to R$ ist ein Ringhomomorphismus.
(2) Sind $\varphi : R \to S$ und $\psi : S \to T$ Ringhomomorphismen, so ist auch die Hintereinanderschaltung $\psi \circ \varphi : R \to T$ ein Ringhomomorphismus.
(3) Ist $R \subseteq S$ ein Unterring, so ist die Inklusion $R \hookrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus.

Aufgabe 13.4. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\varphi \colon \mathbb{Z} \to R$ der kanonische Homomorphismus. Zeige, dass die Charakteristik von R der eindeutig bestimmte nichtnegative Erzeuger des Kernideals $\ker \varphi \subseteq \mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 13.5. Es sei R ein Integritätsbereich der Charakteristik $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Ordnung von jedem Element $x \in R$, $x \neq 0$, ebenfalls n ist.

Aufgabe 13.6. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Berechne das Bild des Polynoms X^3+4X-3 unter dem durch $X \mapsto X^2+X-1$ definierten Einsetzungshomomorphismus $K[X] \to K[X]$.

Aufgabe 13.7. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$ ein fixiertes Element. Bestimme den Kern des Einsetzungshomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow K,\ X \longmapsto a.$$

Aufgabe 13.8. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $P \in K[X]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeige, dass der durch $X \mapsto P$ definierte Einsetzungshomomorphismus von $K[X]$ nach $K[X]$ injektiv ist und dass der durch P erzeugte Unterring $K[P] \subseteq K[X]$ isomorph zum Polynomring in einer Variablen ist.

Aufgabe 13.9. Es sei R ein kommutativer Ring und 0 der Nullring. Bestimme die Ringhomomorphismen von R nach 0 und die Ringhomomorphismen von 0 nach R.

Aufgabe 13.10. Zeige, dass die komplexe Konjugation ein Körperautomorphismus ist.

Aufgabe 13.11. Zeige, dass es keinen Ringhomomorphismus von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}$ gibt.

Aufgabe 13.12.*

Zeige, dass es keinen Ringhomomorphismus von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$ gibt.

Aufgabe 13.13. Bestimme die Körperautomorphismen von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 13.14. Sei R ein Ring und seien L und M zwei Mengen mit den in Aufgabe 2.9 konstruierten Ringen $A = \text{Abb}\,(L, R)$ und $B = \text{Abb}\,(M, R)$. Zeige, dass eine Abbildung $L \to M$ einen Ringhomomorphismus

$$B \longrightarrow A$$

induziert.

Aufgabe 13.15.*

Es sei K ein Körper, R ein Ring mit $0 \neq 1$ und

$$\varphi\colon K \longrightarrow R$$

ein Ringhomomorphismus. Zeige direkt, dass φ injektiv ist.

Aufgabe 13.16. Es sei K ein Körper und sei

$$\varphi\colon\ K \longrightarrow K$$

ein Körperautomorphismus. Zeige, dass die Abbildung

$$K[X] \longrightarrow K[X],\ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \varphi(a_i) X^i,$$

ein Ringautomorphismus des Polynomrings $K[X]$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.17. (2 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring der Charakteristik $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Ordnung von jedem Element $x \in R$, $x \neq 0$, ein Teiler von n ist.

Aufgabe 13.18. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Berechne das Bild des Polynoms $X^4 - 2X^2 + 5X - 2$ unter dem durch $X \mapsto 2X^3 + X - 1$ definierten Einsetzungshomomorphismus $K[X] \to K[X]$.

Aufgabe 13.19. (2 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass ein Polynom $P \in K[X]$ genau dann irreduzibel ist, wenn das um $a \in K$ „verschobene“ Polynom (das entsteht, wenn man in P die Variable X durch $X-a$ ersetzt) irreduzibel ist.

Aufgabe 13.20. (3 Punkte)

Zeige, dass es keinen Ringhomomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{Q}$ gibt.

Aufgabe 13.21. (3 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Zeige, dass

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$$

ist für alle $k = 1, \ldots, p-1$.

Aufgabe 13.22. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring, der einen Körper der positiven Charakteristik $p > 0$ enthalte (dabei ist p eine Primzahl). Zeige, dass die Abbildung

$$R \longrightarrow R,\ f \longmapsto f^p,$$

ein Ringhomomorphismus ist, den man den *Frobenius-Homomorphismus* nennt.