Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 1

Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a,b) \longmapsto a-b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

Aufgabe 1.2. Zeige, dass die Verknüpfung auf einer Geraden, die zwei Punkten ihren Mittelpunkt zuordnet, kommutativ, aber nicht assoziativ ist. Gibt es ein neutrales Element?

Aufgabe 1.3. Man untersuche die Verknüpfung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ (x,y) \longmapsto \min(x,y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

Aufgabe 1.4. Es sei S eine Menge und

$$M = \operatorname{Abb}(S,S)$$

sei versehen mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen als Verknüpfung. Ist die Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es ein (eindeutiges) neutrales Element, für welche $F \in M$ gibt es ein inverses Element?

Aufgabe 1.5. Es sei S eine Menge und

$$G = \{F : S \to S | \, F \text{ bijektiv}\} .$$

Zeige, dass G mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen eine Gruppe ist.

Aufgabe 1.6. Sei M eine Menge und sei $f : M \to M$ eine Abbildung. Zeige, dass f genau dann injektiv ist, wenn f ein Linksinverses besitzt, und dass f genau dann surjektiv ist, wenn f ein Rechtsinverses besitzt.

Aufgabe 1.7. Es sei $(M, \circ, e)$ ein Monoid.

a) Folgt aus $x = y$ die Beziehung $a \circ x = a \circ y$?

b) Folgt aus $a \circ x = a \circ y$ die Beziehung $x = y$?

Aufgabe 1.8.*

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$$

für alle $x \in G$ ist.

Aufgabe 1.9. Sei G eine Gruppe und $x, y \in G$. Drücke das Inverse von xy durch die Inversen von x und y aus.

Aufgabe 1.10. Man gebe ein Beispiel eines endlichen Monoids M und eines Elementes $m \in M$ derart, dass alle positiven Potenzen von m vom neutralen Element verschieden sind.

Aufgabe 1.11. Es sei M ein endliches Monoid. Es gelte die folgende „Kürzungsregel“: aus $ax = ay$ folgt $x = y$. Zeige, dass M eine Gruppe ist.

Aufgabe 1.12. Man konstruiere eine Gruppe mit drei Elementen.

Aufgabe 1.13. Sei G eine Gruppe und $x \in G$ ein Element. Beweise durch Induktion unter Verwendung der Lemma 1.6, dass für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$x^{mn} = (x^m)^n .$$

AUFGABE 1.14.*

Beweise das folgende *Untergruppenkriterium.*Eine nichtleere Teilmenge $H \subseteq G$ einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe, wenn gilt:

$$\text{für alle } g, h \in H \text{ ist } gh^{-1} \in H\,.$$

AUFGABE 1.15. Es sei G eine Gruppe und $H_i \subseteq G$, $i \in I$, eine Familie von Untergruppen. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} H_i$$

eine Untergruppe von G ist.

AUFGABE 1.16. Wir betrachten rationale Zahlen als gemischte Brüche.

a) Zeige, dass bei der Addition von zwei positiven gemischten Brüchen der Bruchterm der Summe nur von den Bruchtermen der Summanden abhängt.

b) Wie sieht dies mit dem ganzen Teil aus?

c) Wie sieht dies für beliebige rationale Zahlen aus?

AUFGABE 1.17. Wir betrachten die Menge

$$M = \{q \in \mathbb{Q} |\, 0 \leq q < 1\}$$

Zeige, dass auf M durch

$$a \oplus b := \begin{cases} a+b, \text{ falls } a+b < 1\,, \\ a+b-1 \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

eine wohldefinierte Verknüpfung gegeben ist.

AUFGABE 1.18. Wir betrachten die Menge

$$M = \{q \in \mathbb{Q} |\, 0 \leq q < 1\}$$

mit der in Aufgabe 1.17 definierten Verknüpfung.

a) Berechne

$$\left(\left(\left(\left(\frac{4}{5} \oplus \frac{3}{4}\right) \oplus \frac{2}{3}\right) \oplus \frac{5}{7}\right) \oplus \frac{1}{3}\right).$$

b) Finde eine Lösung für die Gleichung

$$\frac{3}{5} \oplus x = \frac{1}{2}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.19. (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und betrachte auf

$$\mathbb{Z}/(n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

die Verknüpfung

$$a + b := (a + b) \mod n = \begin{cases} a + b \text{ falls } a + b < n \\ a + b - n \text{ falls } a + b \geq n\,. \end{cases}$$

Zeige, dass dadurch eine assoziative Verknüpfung auf dieser Menge definiert ist, und dass damit sogar eine Gruppe vorliegt.

Aufgabe 1.20. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge

$$M = \{q \in \mathbb{Q} | \, 0 \leq q < 1\}$$

mit der in Aufgabe 1.17 definierten Verknüpfung eine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 1.21. (2 Punkte)

Man untersuche die Verknüpfung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

Aufgabe 1.22. (3 Punkte)

Sei M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung. Es gebe ein *linksneutrales Element* e (d.h. $ex = x$ für alle $x \in M$) und zu jedem $x \in M$ gebe es ein *Linksinverses*, d.h. ein Element y mit $yx = e$. Zeige, dass dann M schon eine Gruppe ist.

Aufgabe 1.23. (2 Punkte)

Betrachte die Gruppe der Drehungen am Kreis um Vielfache des Winkels $\alpha = 360/12 = 30$ Grad. Welche Drehungen sind Erzeuger dieser Gruppe?