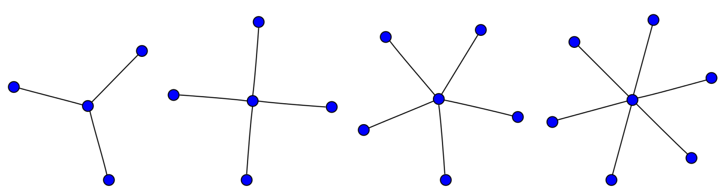
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Vorlesung 20

Doch dann hat sie das Beste draus gemacht. Vermutlich hängt ihre Zugänglichkeit und Menschenbezogenheit auch mit ihren frühen Erfahrungen zusammen.

Bipartite Graphen



Ein *Sterngraph* ist ein vollständiger bipartiter Graph der Form $K_{1,s}$.

DEFINITION 20.1. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, wenn es eine disjunkte Zerlegung

$$V = A \uplus B$$

derart gibt, dass es nur Kanten zwischen A und B gibt.

Die Zerlegung

$$V = A \uplus B$$

nennt man dann auch eine bipartite Unterteilung. Bei einem bipartiten Graphen gibt es im Allgemeinen mehrere Möglichkeiten für eine solche Zerlegung, man denke etwa an eine disjunkte Vereinigung von einzelnen Kanten. Wenn aber der Graph zusammenhängend ist, so ist die bipartite Unterteilung eindeutig bestimmt, siehe Aufgabe 20.1.

Beispiel 20.2. Bei einem Fußballspiel möchte man wissen, wer gegen wen im Verlauf des Spieles einen Zweikampf geführt hat, und dies durch einen Graphen darstellen. Da man innerhalb seiner Mannschaft keinen Zweikampf führt, ergibt sich ein bipartiter Graph, es ergeben sich nur Kanten zwischen den Spielern der einen und der anderen Mannschaft.

Beispiel 20.3. In einer heteronormativen Welt besteht die erwachsene Menschheit aus Männern und Frauen und nur diese haben miteinander Sex. Deshalb ergibt die Frage, wer mit wem schon einmal Sex hatte, einen bipartiten Graphen.

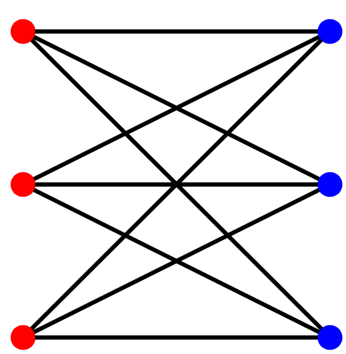
Beispiel 20.4. In Vorbereitung auf einen Schulaustausch zwischen einer Klasse in Osnabrück und einer Klasse in Málaga werden Brieffreundschaften geschnürt, wobei man mehrere Brieffreunde haben kann, aber nur mit Leuten aus der anderen Stadt. Mit den beiden Klassen A und B ergibt sich ein bipartiter Graph auf $V = A \uplus B$, bei dem eine Person aus A mit einer Person aus B verbunden wird, wenn eine Brieffreundschaft zwischen ihnen besteht.

Beispiel 20.5. Es seien A und B disjunkte Mengen und sei R eine Relation zwischen A und B. Dann erhält man auf

$$V := A \uplus B$$

einen bipartiten Graphen, indem man $\{a, b\}$ als Kante erklärt, falls $(a, b) \in R$ gilt. Dadurch entsteht auf V eine symmetrische Relation allein dadurch, dass A und B feste Rollen in der Relation R haben. Dies muss man sich klar machen, um vor Missverständnissen geschützt zu sein. Wenn beispielsweise A eine Menge von Männern und B eine Menge von Frauen ist und $(a, b) \in R$ bedeutet, dass a Person b nett findet, so bedeutet die Kante $\{a, b\}$ genau dies, dass a die Person b nett findet, nicht, dass sie sich gegenseitig nett finden. Dies gilt auch, wenn man die Kante als $\{b, a\}$ schreibt.

Beispiel 20.6. Der Würfelgraph aus Beispiel 15.11 ist bipartit, eine Einteilung erhält man, indem man A als die Menge der d-Tupel $(\pm, \ldots, \pm)$ mit einer geraden Anzahl an $+$ und B als die Menge der d-Tupel mit einer ungeraden Anzahl an $+$ ansetzt.



DEFINITION 20.7. Der *vollständige bipartite Graph* $K_{m,n}$ ist derjenige Graph, dessen Knotenmenge aus der disjunkten Vereinigung einer m-elementigen Menge A und einer n-elementigen Menge B besteht und dessen Kantenmenge durch

$$E = \{\{a, b\} \mid a \in A,\, b \in B\}$$

gegeben ist.

SATZ 20.8. *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn jeder Kreis in ihm geradzahlig ist.*

Beweis. Es sei $V = A \uplus B$ eine bipartite Zerlegung eines bipartiten Graphen. In jedem Weg in einem bipartiten Graphen gehören die Knoten abwechselnd zu A oder zu B. Die Existenz eines Kreises mit ungerader Anzahl führt daher direkt zu einem Widerspruch.

Sei nun umgekehrt die Kreisbedingung erfüllt. Wir können annehmen, dass G zusammenhängend ist. Es sei $v \in V$ ein fixierter Punkt. Wir definieren

$$A = \{x \in V \mid \text{ es gibt einen geradzahligen Weg von } v \text{ nach } x\}$$

und

$$B = \{x \in V \mid \text{ es gibt einen ungeradzahligen Weg von } v \text{ nach } x\}.$$

Wegen der Zusammenhangseigenschaft ist

$$V = A \cup B.$$

Nehmen wir an, dass A und B nicht disjunkt sind, sagen wir $y \in A \cap B$. Es gibt dann Wege

$$v = v_0 \sim v_1 \sim \ldots \sim v_r = y$$

und

$$v = v_0 \sim u_1 \sim \ldots \sim u_s = y$$

mit r gerade und s ungerade. Indem man die beiden Wege zusammensetzt, erhält man einen Zyklus mit ungerade vielen Knoten. Wenn es in ihm Wiederholungen gibt, so kann man daraus zwei kleinere Zyklen herausarbeiten, von denen einer ebenfalls eine ungerade Anzahl besitzt. Somit erhält man auch einen ungeraden Kreis im Widerspruch zur Voraussetzung. Die beiden Mengen sind also disjunkt. Wenn es eine Kante innerhalb von A geben würde, so würden die daran beteiligten Punkte sofort auch zu B gehören im Widerspruch zur gezeigten Disjunktheit. □

Insbesondere ist jeder Baum und jeder Wald bipartit.

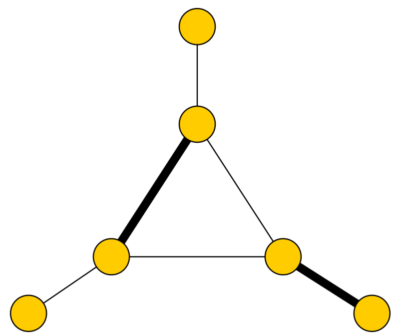
Paarungen

Die Töpfe und die Deckel in einem Haushalt bildet einen bipartiten Graphen, wobei ein Topf und ein Deckel durch eine Kante verbunden werden, wenn sie zueinander passen. Für das große Kochen muss man jetzt noch eine Paarung vornehmen, so dass möglichst viele Töpfe mit Deckel entstehen.

Beispiel 20.9. Es steht nun in Anschluss an Beispiel 20.4 der Schüleraustausch zwischen der Klasse A aus Osnabrück und der Klasse B aus Málaga an. Dabei besuchen die Kinder aus Osnabrück zuerst Málaga und jedes Kind soll bei einem Kind unterkommen, mit dem es bereits durch eine Brieffreundschaft verbunden ist. Es soll also innerhalb des vorgegebenen Brieffreundschaftsgraphen eine Paarung vorgenommen werden. Naheliegende Fragen sind: Wann ist das möglich? Auf wie viele Arten ist es möglich? Wie findet man eine solche Paarung?

Definition 20.10. Eine *Paarung* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kantenmenge $P \subseteq E$, wobei die Kanten aus P zueinander disjunkt sind.

Mit disjunkt meint man hier natürlich knotendisjunkt, bei einer Paarung ist jeder Punkt höchstens zu einer Kante der Paarung inzident. In einer Skizze eines Graphen kann man eine Paarung dadurch kenntlich machen, dass man die beteiligten Kanten dicker (oder bunt) malt. Statt Paarung sagt man auch *Matching* oder man spricht von einer Menge von unabhängigen Kanten.



Eine maximale Paarung, aber keine optimale Paarung.

Definition 20.11. Wir sagen, dass eine Paarung P in einem Graphen $G = (V, E)$ einen Knotenpunkt $v \in V$ *abdeckt*, wenn es eine Kante aus P gibt, zu der v gehört.

Definition 20.12. Eine Paarung $P \subseteq E$ in einem Graphen G heißt *Paarung für* eine Teilmenge $S \subseteq V$, wenn jeder Knoten aus S von einer Kante aus P abgedeckt wird.

Definition 20.13. Eine Paarung $P \subseteq E$ in einem Graphen G heißt *perfekt*, wenn die Kanten der Paarung jeden Knoten des Graphen abdecken.

Eine perfekte Paarung ist somit eine Paarung für die gesamte Knotenmenge.

Beispiel 20.14. Im vollständigen bipartiten Graphen $K_{s,s}$ gibt es eine Vielzahl an perfekten Paarungen. Man muss einfach nur für jeden Knoten der einen Teilmenge der Partition nacheinander mit einem Knoten der anderen Teilmenge verbinden.

Eine perfekte Paarung gibt es im Allgemeinen nicht, deshalb betrachtet man auch die folgenden Konzepte.

Definition 20.15. Eine Paarung $P \subseteq E$ in einem Graphen heißt *maximal*, wenn jedes P' mit $P \subset P' \subseteq E$ keine Paarung ist.

Definition 20.16. Eine Paarung $P \subseteq E$ in einem Graphen G heißt *optimal*, wenn sie unter allen Paarungen von G die größtmögliche Anzahl von Kanten enthält.

Man beachte, dass hier der Sprachgebrauch nicht einheitlich ist. Wir verwenden maximal ordnungstheoretisch, wobei wir Kantenmengen und insbesondere Paarungen über die Inklusion miteinander vergleichen. Eine maximale Paarung liegt also genau dann vor, wenn jede Hinzunahme einer weiteren Kante die Disjunktheit der Kanten zerstört. Es kann aber durchaus „völlig“ andere Paarungen geben, die mehr Kanten als eine vorliegende maximale Paarung enthalten. Optimal bezieht sich hingegen auf die Anzahl der beteiligten Kanten.

Definition 20.17. Die *Paarungszahl* eines bipartiten Graphen $G = A \uplus B$ ist die größtmögliche Anzahl von Kanten in einer Paarung von G.

Es geht also um die Anzahl der Kanten in einer optimalen Paarung.

Paarungen in bipartiten Graphen

Der folgenden Satz heißt *Paarungssatz* oder *Heiratssatz*. Wir formulieren ihn zuerst als eine numerische Bedingung für die Existenz einer injektiven Abbildung, später folgen graphentheoretische Interpretationen.

Satz 20.18. *Es sei M eine Menge, es sei I eine endliche Indexmenge und zu jedem $i \in I$ sei eine Teilmenge $M_i \subseteq M$ gegeben. Zu einer Teilmenge $J \subseteq I$ setzen wir*

$$M_J = \bigcup_{j \in J} M_j.$$

Für jede Teilmenge $J \subseteq I$ gelte

$$\# (M_J) \geq \# (J).$$

Dann gibt es eine injektive Abbildung

$$f \colon I \longrightarrow M$$

mit $f(i) \in M_i$.

Beweis. Wir führen Induktion über die Anzahl von I, bei $I = \{i\}$ ist nach Voraussetzung $M_i \neq \emptyset$ und man kann ein beliebiges Element aus M_i als Wert an der Stelle i festlegen.

Sei nun I n-elementig und sei die Aussage für jede kleinere Indexmenge (und jede Mengenfamilie, die die numerische Bedingung erfüllt) bewiesen. Wir betrachten zwei Fälle. Erster Fall. Für alle Teilmengen $J \subseteq I$, $J \neq \emptyset, I$, gelte sogar die stärkere Bedingung

$$\# (M_J) \geq \# (J) + 1.$$

Wir wählen ein Element $i_0 \in I$ und $m_0 \in M_{i_0}$ und betrachten $I' := I \setminus \{i_0\}$, $M' = M \setminus \{m_0\}$, $M'_i = M_i \setminus \{m_0\}$. Da stets nur das Element m_0 herausgenommen wird, gilt die numerische Bedingung für diese neue Situation und wir können darauf die Induktionsvoraussetzung anwenden. Es gibt also eine injektive Abbildung

$$g \colon I' \longrightarrow M'$$

mit $g(i) \in M'_i$. Diese Abbildung können wir durch $i_0 \mapsto m_0$ zu einer injektiven Abbildung von I nach M fortsetzen. Zweiter Fall. Es gibt nun eine echte Teilmenge $\emptyset \subset J \subset I$ mit

$$\# (J) = \# (M_J).$$

Für J gilt die numerische Bedingung nach wie vor. Wir betrachten

$$K := I \setminus J$$

und

$$N := M \setminus M_J$$

und setzen

$$N_k := M_k \cap N$$

für $k \in K$. Für jede Teilmenge $T \subseteq K$ ist

$$\begin{aligned}\bigcup_{k \in T \cup J} M_k &= \left(\left(\bigcup_{k \in T} M_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k \in J} M_k \right) \right) \cup \left(\bigcup_{k \in J} M_k \right) \\ &= \left(\bigcup_{k \in T} N_k \right) \uplus \left(\bigcup_{k \in J} M_k \right) \\ &= \left(\bigcup_{k \in T} N_k \right) \uplus M_J .\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung hat diese Menge zumindest $\# (T) + \# (J)$ Elemente und M_J hat genau $\# (J)$ Elemente. Deshalb besitzt $\bigcup_{k \in T} N_k$ zumindest $\# (T)$ Elemente. D.h. dass K und die N_k, $k \in K$, ebenfalls die numerische Bedingung erfüllen. Wir können die Induktionsvoraussetzung auf J einerseits und auf K andererseits (mit den zugehörigen Zielmengen) anwenden und erhalten injektive Abbildungen

$$g \colon J \longrightarrow M_J$$

mit $g(j) \in M_j$ und

$$h \colon K \longrightarrow N$$

mit $h(k) \in N_k \subseteq M_k$. Da M_J und N disjunkt sind, setzen sich diese beiden Abbildungen zu einer injektiven Abbildung $f \colon I \to M$ mit $f(i) \in M_i$ zusammen. $\square$

Definition 20.19. Es sei G ein bipartiter Graph mit einer Bipartition $V = A \uplus B$ und sei $C \subseteq A$. Man sagt, dass C die *Paarungsbedingung* erfüllt, wenn für jede Teilmenge $S \subseteq C$ die Beziehung $\# (S) \leq \# (N(S))$ gilt.

Statt Paarungsbedingung sagt man auch *Heiratsbedingung*. Man beachte, dass die Paarungsbedingung eine Ansammlung von rein numerischen Bedingungen ist. Besonders wichtig ist der Fall $C = A$.

Satz 20.20. *Es sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit einer bipartiten Zerlegung $V = A \uplus B$. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(1) *G enthält eine Paarung für A.*
(2) *Die Paarungszahl von G ist gleich $\# (A)$.*
(3) *Es gilt die Paarungsbedingung für A, d.h. zu jeder Teilmenge $S \subseteq A$ ist $\# (S) \leq \# (N(S))$.*
(4) *Es gibt eine injektive Abbildung*

$$\varphi \colon A \longrightarrow B$$

mit $(a, \varphi(a)) \in E$ für alle $a \in A$.

Beweis. Von (1) nach (2). Da es eine Paarung für A gibt, ist die Paarungszahl zumindest $\#\,(A)$. Größer kann die Paarungszahl aber auch nicht sein, da ja jede Paarung Bezug auf die beiden Teile A und B nimmt. Von (2) nach (1) ist klar. Da man aus einer Paarung für A eine injektive Abbildung von A nach B mit der beschriebenen Kantenbedingung und aus einer solchen Abbildung umgekehrt direkt eine Paarung machen kann, sind (1) und (4) äquivalent. Von (3) nach (4) folgt direkt aus Satz 20.18, wenn man $N(S) = \bigcup_{s \in S} N(s)$ berücksichtigt. Von (4) nach (3) ist trivial. $\square$

Abbildungsverzeichnis