Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 9

Übungsaufgaben

Aufgabe 9.1. Zeige, dass die Menge der Untergruppen einer Gruppe G mit der Inklusion, dem Durchschnitt von Untergruppen und der erzeugten Untergruppe einen Verband bildet.

Aufgabe 9.2. Es sei G eine Gruppe, $\mathfrak{P}(G)$ der zugehörige Teilmengenverband und V der zugehörige Untergruppenverband. Zeige, dass die natürliche Inklusion $V \subseteq \mathfrak{P}(G)$ ordnungstreu ist, aber nicht mit den Verbandsverknüpfungen verträglich sein muss.

Die folgende Aussage setzt eine gewisse Kenntnis in Galoistheorie voraus.

Aufgabe 9.3. Es sei $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung. Es sei V der Verband der Zwischenkörper der Erweiterung und sei W der Verband der Untergruppen der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L|K)$. Zeige, dass durch die Galoiskorrespondenz eine bijektive antimonotone Abbildung zwischen den Verbänden V und W gegeben ist.

Aufgabe 9.4. Es sei $(V_i, \leq_i)$, $i \in I$, eine Familie von Verbänden. Zeige, dass die Produktmenge $\prod_{i \in I} V_i$ mit der Produktordnung ebenfalls ein Verband ist.

Aufgabe 9.5. Es sei S eine Menge und $(T, \leq)$ eine total geordnete Menge. Zeige, dass die Abbildungsmenge

$$M = \operatorname{Abb}(S,T)$$

in natürlicher Weise ein Verband ist.

Aufgabe 9.6. Wir versehen die zweielementige Menge $\{0,1\}$ mit der Ordnung $0 < 1$. Es sei S eine Menge. Zeige, dass die Verbandsstruktur auf der Abbildungsmenge $\operatorname{Abb}(S,\{0,1\})$ im Sinne von Aufgabe 9.5 als Verband isomorph zum Teilmengenverband $\mathfrak{P}(S)$ ist. Was sind die „atomaren Funktionen“?

AUFGABE 9.7. Zeige, dass auf der Funktionsmenge $M = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Infima und Suprema existieren und dass somit M ein Verband ist. Skizziere das Infimum von der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion.

Es sei $(M, 1, \cdot)$ ein kommutatives Monoid. Man sagt, dass das Element a das Element b *teilt*, wenn es ein $c \in M$ mit $a \cdot c = b$ gibt.

AUFGABE 9.8. Es sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass die Teilbarkeit in M eine reflexive und transitive Relation, aber im Allgemeinen keine Ordnungsrelation ist.

AUFGABE 9.9. Es sei S eine Menge und $M = \mathfrak{P}(S)$ die zugehörige Potenzmenge, die wir als kommutatives Monoid mit dem Durchschnitt als Verknüpfung auffassen. Es seien $A, B \in \mathfrak{P}(S)$. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Es ist $B \subseteq A$.
(2) Es ist $B = B \cap A$.
(3) Es ist A ein Teiler (im monoidtheoretischen Sinn) von B.

In einem Verband gilt stets $x \sqcap x = x$ für jedes x. Diese Eigenschaft nennt man *Idempotenz*, sie tritt in einem Ring ebenfalls auf, aber typischerweise nur für gewisse Elemente.

AUFGABE 9.10. Bestimme für einen Körper K die idempotenten Elemente, also Elemente $e \in K$ mit $e^2 = e$. Bestimme die linearen Projektionen $\varphi\colon K \to K$.

AUFGABE 9.11. Man gebe ein Beispiel für einen kommutativen Ring R mit einem von 0 und 1 verschiedenen Element $e \in R$ mit $e^2 = e$.

AUFGABE 9.12.
(1) Bestimme die idempotenten Elemente im Ring $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
(2) Bestimme die idempotenten Elemente im Ring $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

AUFGABE 9.13. Man gebe Beispiele für nichttriviale reelle 2×2-Matrizen M mit $M^2 = M$.

Aufgabe 9.14. Betrachte eine endliche geordnete Menge mit einem kleinsten Element 0 und einem größten Element 1, das darüber hinaus aus Elementen $x_1, \ldots, x_n$ mit $0 < x_i < 1$ besteht, und für die es untereinander keine Größerbeziehung gibt. Ist dies ein Verband? Ist er komplementär? Ist er distributiv?

Aufgabe 9.15. Zeige, dass in einem booleschen Verband V die Gleichheit $\neg\neg x = x$ für alle $x \in V$ gilt.

Aufgabe 9.16. Zeige, dass in einem booleschen Verband V die Gleichheiten $\neg 0 = 1$ und $\neg 1 = 0$ gelten.

Aufgabe 9.17. Zeige, dass in einem booleschen Verband V die Gleichheit $\neg(x \sqcap y) = \neg x \sqcup \neg y$ für alle $x, y \in V$ gilt.

Aufgabe 9.18. Es sei $(M, \preccurlyeq)$ eine geordnete Menge mit einem kleinsten Element 0 und mit der Eigenschaft, dass zu je zwei Elementen das Infimum $x \sqcap y$ existiert. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) Wenn $a \in M$ ein Atom ist, so ist $a \sqcap x = 0$ oder $a \sqcap x = a$ für alle x.
(2) Wenn a und b verschiedene Atome sind, so ist $a \sqcap b = 0$.
(3) Es sei M endlich. Dann gibt es zu jedem $x \in M \setminus \{0\}$ ein Atom a mit $a \preccurlyeq x$.

Aufgabe 9.19. Bestimme die möglichen Anzahlen eines endlichen booleschen Verbandes.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.20. (3 Punkte)

Es sei $(\mathbb{N}, |)$ der Teilerverband auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ im Sinne von Beispiel 9.3 und V der Untergruppenverband von $\mathbb{Z}$ im Sinne von Beispiel 9.5. Zeige, dass diese beiden Verbände isomorph zueinander sind.

Aufgabe 9.21. (2 Punkte)

Zeige, dass ein total geordneter beschränkter komplementärer Verband gleich $\{0\}$ oder gleich $\{0, 1\}$ ist.

Aufgabe 9.22. (3 Punkte)

Zeige, dass in einem booleschen Verband V die Gleichheit $\neg(x \sqcup y) = \neg x \sqcap \neg y$ für alle $x, y \in V$ gilt.

Aufgabe 9.23. (5 (1+2+2) Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ eine positive natürliche Zahl und sei V die Menge aller Teiler von n, versehen mit dem größten gemeinsamen Teiler als Infimum und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen als Supremum.

(1) Zeige, dass V ein beschränkter Verband ist.
(2) Charakterisiere die Zahlen n, für die ein komplementärer Verband vorliegt.
(3) Charakterisiere die Zahlen n, für die ein distributiver Verband vorliegt.

Aufgabe 9.24. (3 Punkte)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei

$$V = \{0, 1, \ldots, m\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$$

mit der Produktordnung versehen, so dass ein Verband vorliegt. Für welche m, n liegt ein beschränkter Verband, ein komplementärer Verband, ein distributiver Verband vor?

Abbildungsverzeichnis