Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 7

Übungsaufgaben

Aufgabe 7.1.*

Es sei M eine Menge und $\preccurlyeq$ eine Ordnung auf M. Zeige durch Induktion über $n \geq 2$ die Aussage: Wenn für Elemente $a_1, \ldots, a_n \in M$ die Beziehung

$$a_1 \preccurlyeq a_2 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq a_{n-1} \preccurlyeq a_n$$

und

$$a_n \preccurlyeq a_1$$

gilt, dann sind alle $a_1, \ldots, a_n$ gleich.

Aufgabe 7.2. Es sei A eine endliche total geordnete Menge. Es sei $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ eine endliche Indexmenge. Definiere auf der Produktmenge

$$A^I = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{-mal}}$$

die „lexikographische Ordnung", und zeige, dass es sich dabei ebenfalls um eine totale Ordnung handelt.

Aufgabe 7.3. Wir definieren auf $\mathbb{N}_+$ eine neue Relation R durch folgende Vorschrift: Für zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_+$ mit $n = 2^k t$ und $m = 2^\ell u$ mit t, u ungerade sei

$$nRm \text{ falls } t < u \text{ gilt oder falls zugleich } t = u \text{ und } k \leq \ell \text{ gilt}$$

(rechts wird auf die natürliche Ordnung in $\mathbb{N}$ Bezug genommen).

(1) Zeige, dass R eine totale Ordnung auf $\mathbb{N}_+$ ergibt und beschreibe exemplarisch diese Ordnung.
(2) Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ ein wohldefiniertes Element $n^\star \in \mathbb{N}_+$, $n^\star \neq n$, derart gibt, dass $nRn^\star$ gilt und dass es zwischen n und $n^\star$ keine weiteren Elemente gibt (diese Formulierung ist zu präzisieren).
(3) Erfüllt die Menge $(\mathbb{N}_+, 1, \star)$ die Dedekind-Peano-Axiome?

Aufgabe 7.4. Es sei $(M, \leq)$ eine endliche total geordnete Menge. Definiere für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ eine ordnungstreue bijektive Abbildung

$$\{1, \ldots, n\} \longrightarrow M,$$

wobei $\{1, \ldots, n\}$ mit der natürlichen Ordnung versehen sei.

Aufgabe 7.5. Es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Teilmenge

$$\mathfrak{P}(T) \subseteq \mathfrak{P}(M)$$

mit der induzierten Ordnung versehen ist.

Aufgabe 7.6.*

Es sei M eine endliche Menge. Betrachte die Relation auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$, die durch

$$S \preccurlyeq T, \text{ falls } \#(S) \leq \#(T),$$

gegeben ist. Handelt es sich dabei um eine Ordnungsrelation?

Aufgabe 7.7. Zeige, dass die Produktordnung auf $\prod_{i \in I}(M_i, \leq_i)$ in der Tat eine Ordnung ist.

Aufgabe 7.8. Es sei $(I, \preccurlyeq)$ eine total geordnete Menge. Zeige durch Induktion, dass jede nichtleere endliche Teilmenge $T \subseteq I$ ein eindeutiges Maximum besitzt.

Aufgabe 7.9.*

Zeige durch Induktion, dass jede nichtleere Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}$ ein kleinstes Element besitzt.

Aufgabe 7.10. Es sei M eine Menge und I die Menge der echten Teilmengen von M, also

$$I = \{T \subseteq M \mid T \neq \emptyset \text{ und } T \neq M\}.$$

Diese Menge ist durch die Inklusion eine geordnete Menge. Bestimme die minimalen und die maximalen Elemente von I.

Eine totale Ordnung $\preccurlyeq$ auf einer Menge M heißt *Wohlordnung*, wenn jede nichtleere Teilmenge $T \subseteq M$ ein kleinstes Element besitzt.

Aufgabe 7.11. Zeige, dass die natürliche Ordnung auf den ganzen Zahlen keine Wohlordnung ist.

Aufgabe 7.12. Definiere eine Wohlordnung auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 7.13. Es sei $(M, \preccurlyeq)$ eine total geordnete Menge, die sowohl nach unten als auch nach oben wohlgeordnet ist. Zeige, dass M endlich ist.

Aufgabe 7.14. Beweise das Lemma von Dickson, das besagt, dass eine nichtleere Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}^r$ nur endlich viele minimale Elemente besitzt.

Aufgabe 7.15. Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der Produktordnung. Bestimme die minimalen und die maximalen Elemente des Einheitskreises, versehen mit der induzierten Ordnung.

Aufgabe 7.16. Besitzt die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$ eine obere Schranke? Wie sieht das in anderen angeordneten Körpern aus?

Aufgabe 7.17.*

Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$$[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $0 \leq k \leq n$ seien die Abbildungen

$$D_k \colon [n] \longrightarrow [n+1]$$

durch

$$D_k(j) = \begin{cases} j, & \text{falls } j < k, \\ j+1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die Abbildungen

$$S_k \colon [n+1] \longrightarrow [n]$$

durch

$$S_k(j) = \begin{cases} j, & \text{falls } j \leq k, \\ j-1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert.

a) Erstelle eine Wertetabelle für

$$D_3 \colon [4] \longrightarrow [5].$$

b) Erstelle eine Wertetabelle für

$$S_3 \colon [6] \longrightarrow [5].$$

c) Beschreibe die durch die Wertetabelle

j	0	1	2	3	4	5
$\varphi(j)$	0	2	2	4	5	5

gegebene Abbildung

$$\varphi\colon [5] \longrightarrow [5]$$

als eine Hintereinanderschaltung von geeigneten D_k und S_i.

Aufgabe 7.18.*

Zeige, dass für natürliche Zahlen die folgenden Teilbarkeitsbeziehungen gelten.

(1) Für jede natürliche Zahl a gilt $1 \mid a$ und $a \mid a$.
(2) Für jede natürliche Zahl a gilt $a \mid 0$.
(3) Gilt $a \mid b$ und $b \mid c$, so gilt auch $a \mid c$.
(4) Gilt $a \mid b$ und $c \mid d$, so gilt auch $ac \mid bd$.
(5) Gilt $a \mid b$, so gilt auch $ac \mid bc$ für jede natürliche Zahl c.
(6) Gilt $a \mid b$ und $a \mid c$, so gilt auch $a \mid (rb + sc)$ für beliebige natürliche Zahlen r, s.

Aufgabe 7.19. Bringe die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl n durch eine natürliche Zahl t mit dem Begriff der Produktmenge in Zusammenhang.

Aufgabe 7.20. Skizziere ein Teilerdiagramm für die Menge M der echten natürlichen Teiler von 100 (dabei gelte 1 als echter Teiler, 100 nicht). Was sind die maximalen, die minimalen Elemente, gibt es ein größtes und ein kleinstes Element, was sind die total geordneten Teilmengen?

Aufgabe 7.21.*

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass das Produkt von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen von $n!$ geteilt wird.

Aufgabe 7.22. Es sei $(\mathbb{N}_+, |)$ die Menge der positiven natürlichen Zahlen mit der Teilbarkeitsrelation und $(\mathbb{N}_+, \leq)$ die gleiche Menge mit der natürlichen Ordnungsstruktur. Zeige, dass die identische Abbildung

$$(\mathbb{N}_+, |) \longrightarrow (\mathbb{N}_+, \leq)$$

ordnungstreu, aber nicht ordnungsvolltreu ist.

Aufgabe 7.23. Es sei M die Menge aller unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}_+$, versehen mit der Inklusion als Ordnung, und es sei $[0,1[$ das rechtsseitig offene reelle Einheitsintervall mit der Kleinergleich-Relation als Ordnung. Zeige, dass die Abbildung

$$\Psi \colon M \longrightarrow [0,1[,\, T \longmapsto \sum_{n \notin T} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

eine bijektive, ordnungstreue Abbildung ist, deren Umkehrabbildung nicht ordnungstreu ist.

Aufgabe 7.24. Es sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller reellen Folgen, versehen mit der Produktordnung und sei $T \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Teilmenge aller konvergenten Folgen. Zeige, dass die Abbildung

$$T \longrightarrow \mathbb{R},\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \lim_{n \to \infty} x_n,$$

ordnungstreu, aber nicht ordnungsvolltreu ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.25. (1 Punkt)

Skizziere ein Inklusionsdiagramm für sämtliche Teilmengen einer dreielementigen Menge.

Aufgabe 7.26. (2 Punkte)

Bestimme auf der dreielementigen Menge $M = \{a, b, c\}$ sämtliche Ordnungen.

Aufgabe 7.27. (3 Punkte)

Bestimme auf einer vierelementigen Menge sämtliche Ordnungen bis auf Isomorphie (die Rolle der Elemente darf also vertauscht werden).

Aufgabe 7.28. (3 Punkte)

Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Zeige, dass die Abbildung

$$M \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\, x \longmapsto \{y \in M \mid y \leq x\},$$

ordnungsvolltreu und injektiv ist, wobei die Potenzmenge mit der Inklusion versehen ist.

Aufgabe 7.29. (4 Punkte)

Zeige, dass es keine Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

gibt, die die folgende Eigenschaft erfüllt: Es ist $k \geq n$ genau dann, wenn $\varphi(k) \leq \varphi(n)$.

Aufgabe 7.30. (3 (2+1) Punkte)

(1) Es sei M eine endliche geordnete Menge mit einem einzigen maximalen Element m. Zeige, dass m das größte Element von M ist.
(2) Man gebe ein Beispiel für eine geordnete Menge mit genau einem maximalen Element, das aber nicht das größte Element ist.

Abbildungsverzeichnis