Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 5

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 5.1. Formuliere die zweite binomische Formel für einen kommutativen Ring R und führe sie auf die erste binomische Formel zurück.

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.2.*

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$$

für alle $x \in G$ ist.

Aufgabe 5.3. Es sei M eine Menge und es sei B die Menge aller bijektiven Abbildungen von M nach M. Zeige, dass B mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen eine Gruppe ist. Was ist das neutrale Element, was ist das inverse Element zu $f \in B$?

Aufgabe 5.4. Sei G eine Gruppe und sei $g \in G$ ein Element und sei

$$\varphi \colon G \longrightarrow G,\, x \longmapsto x \circ g,$$

die Verknüpfung mit g. Zeige, dass φ bijektiv ist. In welcher Beziehung steht diese Aussage zu Lemma 5.4?

Aufgabe 5.5. Sei G eine Gruppe und $x, y \in G$. Drücke das Inverse von xy durch die Inversen von x und y aus.

Aufgabe 5.6. Lucy Sonnenschein befindet sich in Position $(-2, 3) \in \mathbb{Z}^2$, wobei sich im Folgenden die erste Komponente auf links/rechts und die zweite Komponente auf vorne/hinten bezieht. Sie geht vier Schritte nach rechts, dann zwei Schritte nach hinten, dann einen Schritt nach links, einen (etwas größeren) Diagonalschritt nach links hinten und schließlich zwei Schritte nach vorne. In welcher Position befindet sie sich zum Schluss? Durch welche möglichst einfache Bewegung kann sie die Gesamtbewegung rückgängig machen?

AUFGABE 5.7. Wir betrachten die Menge

$$M = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q < 1\}$$

Zeige, dass auf M durch

$$a \oplus b := \begin{cases} a+b, \text{ falls } a+b < 1\,, \\ a+b-1 \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

eine wohldefinierte Verknüpfung gegeben ist.

AUFGABE 5.8. Zeige, dass die Menge

$$M = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q < 1\}$$

mit der in Aufgabe 5.7 definierten Verknüpfung eine kommutative Gruppe ist.

AUFGABE 5.9. Es sei $(G, 1, \cdot)$ eine Gruppe und seien $a, b \in G$. Zeige, dass die folgenden Potenzgesetze für $m, n \in \mathbb{Z}$ gelten.

(1)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

(2)
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

AUFGABE 5.10. Es sei G eine kommutative Gruppe, $a, b \in G$ und $n \in \mathbb{Z}$. Zeige

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

AUFGABE 5.11. Gabi Hochster hat heute keine Lust, bei der Addition von natürlichen Zahlen im Dezimalsystem die Überträge zu berücksichtigen. Sie addiert einfach ziffernweise und schreibt nur die Endziffern der Einzelsummen an die richtige Stelle hin. Sie sagt: „Meine neue Verknüpfung ist viel besser als die übliche Addition: Sie ist einfacher zu berechnen, sie ist assoziativ und kommutativ und sie besitzt ein neutrales Element. Darüber hinaus gibt es zu jeder natürlichen Zahl eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass deren Summe die 0 ergibt. Es liegt also sogar eine Gruppe vor und die ganzen Zahlen braucht man gar nicht mehr“. Sind ihre Beobachtungen korrekt?

AUFGABE 5.12. Formuliere und beweise die dritte binomische Formel für einen kommutativen Ring R.

AUFGABE 5.13. Es sei R ein kommutativer Ring und seien x, y und z Elemente in R. Berechne

$$\left(2x^3 - xy^2z - 4x^2y^2\right)\left(-2x^3 - z - xyz\right) - x^2\left(4 - 3y - 5xy^5z\right).$$

Aufgabe 5.14. Es sei R ein kommutativer Ring, $x \in R$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige die Gleichheit

$$x^n - 1 = (x-1)\big(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x^2 + x + 1\big).$$

Aufgabe 5.15. Sei M eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit dem Durchschnitt $\cap$ als Multiplikation und der symmetrischen Differenz

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

als Addition (mit welchen neutralen Elementen?) ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 5.16.*

Zeige, dass ein Ring mit $0 = 1$ der Nullring ist.

Aufgabe 5.17. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass die Multiplikation mit -1, also die Abbildung

$$R \longrightarrow R,\ g \longmapsto -g,$$

bijektiv ist.

Aufgabe 5.18. Diskutiere, welche Bedeutungen die Begriffe *positiv* und *negativ* in einem kommutativen Ring besitzen. Wie sieht es in $\mathbb{Z}$ aus? Welche Bedeutung ist relativ, welche absolut?

Aufgabe 5.19. Zeige

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

für $n \geq 1$ mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes für $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 5.20. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Menge aller quadratischen $n \times n$-Matrizen über K mit der Addition von Matrizen und mit der Verknüpfung von Matrizen als Multiplikation ein Ring ist.

Aufgabe 5.21. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass

$$\mathrm{End}\,(V) = \{\varphi : V \to V \mid \varphi \text{ linear}\}$$

mit der Addition und der Hintereinanderschaltung von Abbildungen ein Ring ist.

Aufgabe 5.22. Es sei R ein kommutativer Ring und es seien k, m, n ganze Zahlen und $x, y \in R$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Zu $n \in \mathbb{N}$ ist nx (also die n-fache Summe von x mit sich selbst) gleich $(1 + \cdots + 1) \cdot x$, wobei links die n-fache Summe der $1 \in R$ mit sich selbst steht.
(2) Zu $n \in \mathbb{N}$ ist $-n$ (also die n-fache Summe des Negativen von 1 mit sich selbst) gleich dem Negativen (in R) von $n = 1 + \cdots + 1$.
(3) Es ist
$$(m + k)x = mx + kx.$$
(4) Es ist
$$k(x + y) = kx + ky.$$
(5) Es ist
$$(km)x = k(mx).$$

Aufgabe 5.23. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Ringerelement n_R zuordnen kann, so dass 0_R das Nullelement in R und 1_R das Einselement in R ist und so dass
$$(n + 1)_R = n_R + 1_R$$
gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften
$$(n + m)_R = n_R + m_R \text{ und } (nm)_R = n_R \cdot m_R$$
besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften ebenfalls gelten.

Aufgabe 5.24.*

Es sei R ein kommutativer Ring. Zu jedem $f \in R$ sei
$$\mu_f \colon R \longrightarrow R,\, g \longmapsto fg,$$
die Multiplikation mit f. Zeige, dass μ_f genau dann bijektiv ist, wenn es surjektiv ist.

Man zeige durch ein Beispiel, dass in dieser Situation aus der Injektivität nicht die Bijektivität folgt.

Aufgabe 5.25.*

Wir betrachten die Menge
$$M = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$
die mit der stellenweisen Addition $+$ von Funktionen eine kommutative Gruppe ist. Auf dieser Menge bildet die Hintereinanderschaltung von Abbildungen $\circ$ eine assoziative Verknüpfung mit der Identität als neutralem Element.

(1) Zeige, dass das Distributivgesetz in der Form
$$(f+g)\circ h \;=\; f\circ h + g\circ h$$
gilt.

(2) Zeige, dass das Distributivgesetz in der Form
$$h\circ (f+g) \;=\; h\circ f + h\circ g$$
nicht gilt.

Aufgabe 5.26.*

Beweise die *Nichtnullteilereigenschaft* für einen Körper K.

Einen kommutativen Ring $\neq 0$, der die Nichtnullteilereigenschaft aus Lemma 5.14 erfüllt, heißt *Integritätsbereich*. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind ein Integritätsbereich, aber kein Körper. Für endliche Ringe gilt aber die folgende Aussage.

Aufgabe 5.27. Sei R ein kommutativer Ring mit endlich vielen Elementen. Zeige, dass R genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn R ein Körper ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.28. (2 Punkte)

Sei R ein Ring und seien x, y und z Elemente in R. Berechne das Produkt
$$\left(x^2-3yzy-2zy^2+4xy^2\right)\left(2xy^3x-z^2xyx\right)\left(1-3zyxz^2y\right).$$
Wie lautet das Ergebnis, wenn der Ring kommutativ ist?

Aufgabe 5.29. (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $v \in V$, $v \neq 0$, ein fixierter Vektor. Zeige, dass
$$R(v) \;=\; \{\varphi \in \operatorname{End}(V) \mid v \text{ ist Eigenvektor zu } \varphi\}$$
mit der natürlichen Addition und Multiplikation von Endomorphismen ein Ring und ein Untervektorraum von $\operatorname{End}(V)$ ist. Bestimme die Dimension dieses Raumes.

Aufgabe 5.30. (3 Punkte)

Zeige, dass für ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ genau dann das „umgekehrte Distributivgesetz“
$$a+(b\cdot c) \;=\; (a+b)\cdot(a+c)$$
gilt, wenn
$$a \;=\; 0$$

oder

$$a + b + c = 1$$

ist.

Aufgabe 5.31. (5 Punkte)

Wir betrachten eine Uhr mit Stunden- und Minutenzeiger. Es ist jetzt 6 Uhr, so dass die beiden Zeiger direkt gegenüber stehen. Um wie viel Uhr stehen die beiden Zeiger zum nächsten Mal direkt gegenüber?

Aufgabe 5.32. (3 Punkte)

Zeige, dass die „Rechenregel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bei $a, c \in \mathbb{N}_+$ (und $b, d, b+d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) niemals gilt. Man gebe ein Beispiel mit $a, b, c, d, b+d \neq 0$, wo diese Regel gilt.

Aufgabe 5.33. (2 Punkte)

Zeige für einen Körper K die folgenden Eigenschaften.

(1) Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung

$$\alpha_a \colon K \longrightarrow K, \, x \longmapsto x + a,$$

bijektiv.

(2) Für jedes $b \in K$, $b \neq 0$, ist die Abbildung

$$\mu_b \colon K \longrightarrow K, \, x \longmapsto bx,$$

bijektiv.

Abbildungsverzeichnis