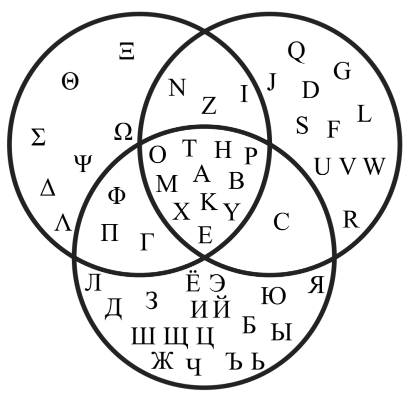
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 3

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. Es sei LA die Menge der Großbuchstaben des lateinischen Alphabets, GA die Menge der Großbuchstaben des griechischen Alphabets und RA die Menge der Großbuchstaben des russischen Alphabets. Überprüfe die Siebformel anhand dieses Beispiels.



Aufgabe 3.2. Zeige

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

für $n \geq 1$.

Betrachte den Fall n ungerade zuerst. Eine andere Beweismöglichkeit besprechen wir in Aufgabe 5.16.

Aufgabe 3.3. Zeige mit Hilfe von Lemma 2.16, dass die Summen

$$\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{n}{k}$$

für $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ abwechselnd positiv und negativ sind.

Aufgabe 3.4. Aus der lineare Algebra ist die Formel

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

für Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$ bekannt, siehe Satz 9.7 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)), die an die Siebformel für zwei Mengen erinnert. Gilt für Untervektorräume $U_1, U_2, \ldots, U_n \subseteq V$ die entsprechende Formel

$$\dim(U_1 + U_2 + \cdots + U_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{J \subseteq \{1,\ldots,n\},\, \#(J)=k} \dim(U_J) \right),$$

wobei $U_J = \bigcap_{j \in J} U_j$?

Aufgabe 3.5. Es sei M eine Menge und es sei

$$F\colon M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann einen Fixpunkt besitzt, wenn der Durchschnitt des Graphen von F mit der Diagonalen

$$\triangle = \{(x,x) \in M \times M \mid x \in M\}$$

nicht leer ist.

Aufgabe 3.6. Bestimme die Fixpunkte der Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2.$$

Aufgabe 3.7. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad d, $P \neq X$. Zeige, dass P maximal d Fixpunkte besitzt.

Aufgabe 3.8. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gebe $x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \leq x$$

und

$$f(y) \geq y.$$

Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 3.9.*

Wir betrachten die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$	3	5	1	7	8	2	6	4

gegebene Abbildung F von $M = \{1, 2, \ldots, 8\}$ in sich selbst.

(1) Erstelle eine Wertetabelle für $F^2 = F \circ F$.
(2) Erstelle eine Wertetabelle für $F^3 = F \circ F \circ F$.
(3) Begründe, dass sämtliche iterierten Hintereinanderschaltungen F^n bijektiv sind.
(4) Bestimme für jedes $x \in M$ das minimale $n \in \mathbb{N}_+$ mit der Eigenschaft, dass

$$F^n(x) = x$$

ist.
(5) Bestimme das minimale $n \in \mathbb{N}_+$ mit der Eigenschaft, dass

$$F^n(x) = x$$

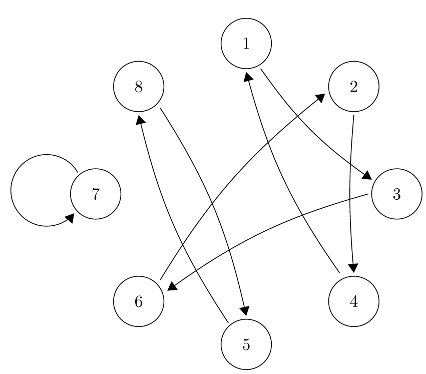
für alle $x \in M$ ist.

Aufgabe 3.10. Berechne für die Permutation σ mit

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(P)$	7	10	3	9	5	2	4	1	8	6

die Potenzen σ^2 und σ^3 und gebe die Zyklendarstellung für diese drei Permutationen an.

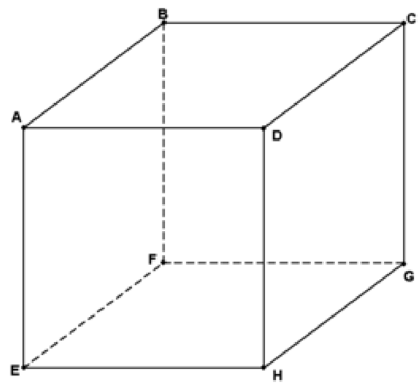
Aufgabe 3.11. Skizziere ein Pfeildiagramm, das die nebenstehende Permutation überschneidungsfrei darstellt.



Aufgabe 3.12. Zeige, dass man jede endliche Permutation durch ein überschneidungsfreies Pfeildiagramm darstellen kann.

Aufgabe 3.13.*

Betrachte den Würfel



Es sei α diejenige Drehung am Würfel um die Achse durch die Eckpunkte A und G, die den Eckpunkt B auf D schickt, und es sei β die Halbdrehung um die vertikale Achse (also die Gerade, die durch den Mittelpunkt der Seitenfläche A, B, C, D und den Mittelpunkt der Seitenfläche E, F, G, H läuft).

a) Man gebe eine Wertetabelle für die Permutationen auf der Eckpunktmenge $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, die durch $\alpha, \beta, \alpha\beta$ und $\beta\alpha$ bewirkt werden.

b) Bestimme die Drehachse von $\alpha\beta$ und von $\beta\alpha$ sowie die Ordnung dieser Drehungen.

c) Man gebe die Zykeldarstellung der von α^2 bewirkten Permutation auf der Eckpunktmenge an. Was ist α^{1001}?

d) Man betrachte die Permutation σ, die auf der Eckpunktmenge durch die Wertetabelle

x	A	B	C	D	E	F	G	H
$\sigma(x)$	B	C	D	A	G	H	E	F

gegeben ist. Gibt es eine Drehung des Würfels, die diese Permutation bewirkt? Berechne das Signum von σ.

Aufgabe 3.14.*

Erstelle eine Liste von sämtlichen Permutationen auf der Menge $\{A, B, C, D\}$ und bestimme, welche von ihnen fixpunktfrei sind.

Aufgabe 3.15.*

Berechne die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen auf einer n-elementigen Menge für $n \leq 5$ mit Hilfe von Lemma 3.7 (bzw. die Wahrscheinlichkeiten, dass eine zufällige Permutation fixpunktfrei ist) und vergleiche mit den direkten Abzählungen.

Aufgabe 3.16. Erstelle eine Formel für die Anzahl der Permutationen auf einer n-elementigen Mengen mit zumindest r Fixpunkten.

Aufgabe 3.17. Erstelle eine Formel dafür, dass eine Permutation auf einer n-elementigen Menge genau einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 3.18. Bestimme für die Permutationen auf einer 5-elementigen Menge, wie viele davon genau r Fixpunkte

($r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) besitzen.

Aufgabe 3.19. Es sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und r, k, $1 \leq r, k \leq n$, fixiert. Wir interessieren uns für die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M, bei denen der Abstand zwischen zwei benachbarten Elementen aus der Teilmenge maximal gleich r ist. Bestimme diese Anzahl für

(1) n, k beliebig, $r = n$.
(2) n, k beliebig, $r = 1$.
(3) $n = 3$, k, r beliebig.
(4) $n = 4$, k, r beliebig.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.20. (7 (1+1+5) Punkte)

(1) Was ist die maximale Seitenlänge eines Quadrats, das in einen Kreis mit Radius 1 reinpasst?
(2) Was ist die maximale Seitenlänge eines gleichseitigen Dreieckes, das in einen Kreis mit Radius 1 reinpasst?
(3) Was ist die maximale Seitenlänge eines gleichseitigen Dreieckes, das in ein Quadrat mit Seitenlänge 1 reinpasst?

Aufgabe 3.21. (5 (1+4) Punkte)

Gabi Hochster und Heinz Ngolo wollen „Händchen halten“ üben und verschiedene Varianten durchprobieren. Jedenfalls soll die rechte Hand von Gabi und die linke Hand von Heinz sich vorderseitig berühren und die Finger der einen Hand sollen in den Fingerzwischenräumen der anderen Hand liegen, der Platz jenseits von Daumen und kleinem Finger gilt als Fingerzwischenraum. Dabei wird die anatomische Reihenfolge der Finger beibehalten.

(1) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn in jedem Fingerzwischenraum höchstens ein Finger zu liegen kommt?
(2) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn in jedem Fingerzwischenraum höchstens zwei Finger zu liegen kommt?

Aufgabe 3.22. (2 Punkte)

Erstelle eine Formel für die Anzahl der Permutationen auf einer n-elementigen Menge, die genau r Fixpunkte besitzen.

Aufgabe 3.23. (7 (1+2+4) Punkte)

Es sei L eine ℓ-elementige Menge und M eine m-elementige Menge. Wir interessieren uns für den Quotienten aus der Anzahl der injektiven Abbildungen von L nach M dividiert durch die Anzahl aller Abbildungen von L nach M, und was man über das Grenzwertverhalten aussagen kann.

(1) Es sei m fixiert. Bestimme den Grenzwert des beschriebenen Quotienten, wenn ℓ gegen unendlich geht.
(2) Es sei ℓ fixiert. Bestimme den Grenzwert des beschriebenen Quotienten, wenn m gegen unendlich geht.
(3) Es sei eine reelle Zahl α, $0 < \alpha \leq 1$, fixiert. Bestimme den Grenzwert des beschriebenen Quotienten, wenn $\ell := \lfloor \alpha m \rfloor$ ist und m gegen unendlich geht.

Abbildungsverzeichnis