

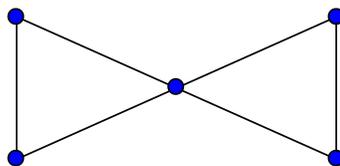
## Diskrete Mathematik

### Arbeitsblatt 24

### Übungsaufgaben

AUFGABE 24.1. Bestimme die chromatische Zahl eines Rundganges.

AUFGABE 24.2. Bestimme die chromatische Zahl des Schmetterlingsgraphen.



AUFGABE 24.3. Das Seminar zum Thema „Gezielter Einsatz von Vorlesungshunden in schwierigen Zeiten“ beginnt mit Gruppenarbeit. In der ersten Runde war die Gruppeneinteilung folgendermaßen. Gruppe A: Erika, Sven, Peter, Petra. Gruppe B: Lutz, Mats, Petsi, Gruppe C: Anna, Lena, Christian, Doro, Henning, Gruppe D: Marion, Markus, Martin, Martina, Marianne. Für die zweite Runde soll eine neue Gruppeneinteilung vorgenommen werden, bei der Leute, die sich schon (durch die Gruppenarbeit in der ersten Runde) kennen, nicht zusammen in eine Gruppe kommen.

- (1) Was ist die minimale Anzahl an Gruppen, die dafür benötigt wird?
- (2) Wie viele Möglichkeiten für die zweite Gruppeneinteilung gibt es, wenn jede Gruppe zumindest drei Teilnehmer haben soll.
- (3) Wie sieht es für die dritte Gruppeneinteilung aus?

AUFGABE 24.4. Es sei  $V$  eine endliche Menge mit einer Äquivalenzrelation  $\sim$  und dem zugehörigen Graphen  $G$ , wobei die Schleifen ignoriert werden. Zeige, dass die chromatische Zahl von  $G$  gleich dem Maximum der Größe der Äquivalenzklassen ist.

AUFGABE 24.5. Wir betrachten die Ringe der olympischen Ringe als Knotenpunkte eines Graphen, wobei zwei Knotenpunkte miteinander benachbart sein sollen, wenn sich die zugehörigen Ringe treffen. Was ist die chromatische Zahl dieses Graphen?



AUFGABE 24.6. Zeige, dass die chromatische Zahl  $\chi(G)$  eines Graphen  $G = (V, E)$  die folgenden Eigenschaften erfüllt.

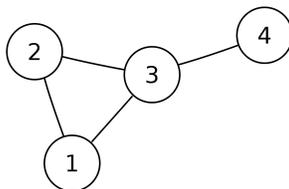
- (1) Ein Graph ist genau dann nicht leer, wenn seine chromatische Zahl  $\geq 1$  ist.
- (2) Ein nichtleerer Graph besitzt genau dann die chromatische Zahl 1, wenn er keine Kanten besitzt.
- (3) Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn seine chromatische Zahl  $\leq 2$  ist.
- (4) Es ist

$$\chi(G) \leq \#(V).$$

- (5) Der vollständige Graph  $K_n$  besitzt die chromatische Zahl  $n$ .

AUFGABE 24.7.\*

Bestimme sämtliche zulässigen Färbungen für den abgebildete Graphen mit den Farben rot, blau und grün.



AUFGABE 24.8. Es sei  $f: G \rightarrow B$  eine zulässige Färbung auf einem Graphen  $G$ . Es sei  $\theta: B \rightarrow B'$  injektiv. Zeige, dass auch  $\theta \circ f$  eine zulässige Färbung auf  $G$  ist.

AUFGABE 24.9. Es sei  $\varphi: G \rightarrow H$  ein Graphhomomorphismus und  $f: H \rightarrow B$  eine zulässige Färbung von  $H$ . Zeige, dass  $f \circ \varphi$  eine zulässige Färbung von  $G$  ist.

Zeige, dass diese Aussage nicht gilt, wenn  $\varphi$  ein schwacher Graphhomomorphismus ist.

AUFGABE 24.10. Es sei  $G$  ein Graph und  $B$  eine Menge. Zeige, dass eine zulässige Färbung  $f: G \rightarrow B$  dasselbe ist wie ein Graphhomomorphismus  $f: G \rightarrow (B, \mathfrak{P}_2(B))$ .

AUFGABE 24.11. Zeige, dass das chromatische Polynom eines Baumes mit  $n$  Knoten gleich  $X(X-1)^{n-1}$  ist.

AUFGABE 24.12. Bestimme das chromatische Polynom eines Sterngraphen.

AUFGABE 24.13. Es sei  $b$  ein Blatt eines Graphen  $G$  und sei  $H$  der Untergraph, bei dem  $b$  und die zugehörige Kante entfernt wurde. Zeige, dass zwischen den chromatischen Polynomen die Beziehung

$$P_G = (X-1)P_H$$

besteht.

AUFGABE 24.14.\*

Zeige durch Induktion über  $n$ , dass das chromatische Polynom eines Rundganges mit  $n$  Knoten gleich  $(X-1)^n + (-1)^n(X-1)$  ist.

AUFGABE 24.15.\*

Bestimme das chromatische Polynom zum vollständigen bipartiten Graphen  $K_{2,s}$ .

In den beiden folgenden Aufgaben bezeichnen wir mit  $\text{Hom}(G, H)$  die Menge der Graphhomomorphismen von  $G$  nach  $H$ .

AUFGABE 24.16. Es sei  $H$  ein fixierter Graph. Zeige, dass es zu einer Kante  $e$  eines Graphen  $G$  stets eine natürliche Identifizierung

$$\text{Hom}(G \setminus \{e\}, H) = \text{Hom}(G, H) \uplus \text{Hom}(G/e, H)$$

gibt.

AUFGABE 24.17. Es sei  $H$  ein Graph und sei  $G = G_1 \uplus G_2$  die disjunkte Vereinigung von Graphen  $G_1$  und  $G_2$ . Zeige, dass es eine natürliche Identifizierung

$$\text{Hom}(G, H) = \text{Hom}(G_1, H) \times \text{Hom}(G_2, H)$$

gibt.

Zu einem Graphen  $G = (V, E)$  und einem kommutativen Ring  $R$  nennt man den Restklassenring

$$R[G] = R[X_v, v \in V] / (X_u X_v : \{u, v\} \text{ ist keine Kante von } G, \\ X_u X_v X_w, u, v, w \text{ verschieden})$$

den *Stanley-Reisner-Ring* zu  $G$  (über  $R$ ).

Ein Stanley-Reisner-Ring ist eine Möglichkeit, einen ungerichteten Graphen in ein algebraisches Objekt zu übersetzen. In einem solchen Restklassenring werden also alle Monome mit zumindest drei verschiedenen Variablen zu 0 gemacht und ein Monom mit zwei verschiedenen Variablen wird genau dann zu 0 gemacht, wenn das zugehörige Knotenpaar keine Kante ist. Mit dem sogenannten Hilbertpolynom wird einem jeden  $\mathbb{N}$ -graduierten Ring ein Polynom zugeordnet. Im Falle eines Stanley-Reisner-Ringes zu einem ungerichteten Graphen ist dies besonders einfach.

AUFGABE 24.18. Es sei  $G$  ein Graph mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten, sei  $K$  ein Körper und  $K[G]$  der Stanley-Reisner-Ring zu  $G$  über  $K$ . Zeige, dass die  $K$ -Vektorraumdimension der  $d$ -ten Stufe  $K[G]_d$  für  $d \geq 1$  durch das lineare Polynom

$$P(d) = m(d - 1) + n$$

beschrieben wird.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 24.19. (4 Punkte)

Zeige mit Lemma 24.10 (1), dass die chromatische Funktion ein normiertes Polynom ist.

AUFGABE 24.20. (5 Punkte)

Bestimme das chromatische Polynom zum vollständigen bipartiten Graphen  $K_{3,s}$ .

## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Butterfly graph.svg , Autor = Benutzer KoKo90 auf Commons,  
Lizenz = CC-by-sa 2.5 1
- Quelle = Olympic flag.svg , Autor = Pierre de Coubertin (hochgeladen  
von Benutzer Denelson83 auf Commons), Lizenz = gemeinfrei 2
- Quelle = Undirected graph no background.svg , Autor = Benutzer Boa  
Python auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 3
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus  
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine  
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren  
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor  
bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias  
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und  
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7