Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 20

Übungsaufgaben

Aufgabe 20.1. Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender bipartiter Graph. Zeige, dass es nur eine (bis auf die Rolle der Teile) bipartite Zerlegung $V = A \uplus B$ gibt.

Aufgabe 20.2. Zeige, dass ein Untergraph eines bipartiten Graphen wieder bipartit ist.

Aufgabe 20.3. Zeige, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn jede Zusammenhangskomponente davon bipartit ist.

Aufgabe 20.4.*

Skizziere einen Graphen, der nicht bipartit ist und in dem es keinen Kreis der Länge 3 gibt.

Aufgabe 20.5. Auf dem Bolzplatz hat die Algebra gegen die Topologie gespielt. Nach dem Spiel beim Grillen sprechen sie über ihre besten Zweikämpfe. Heinz, ein Algebraiker sagt, „ich hatte einen verdammt harten Zweikampf mit August“. August sagt: „meine Zweikämpfe mit Petra waren auch nicht ohne“. Petra sagt: „die Beate hab ich schön alt aussehen lassen“, was Beate kontert, indem sie sagt, dass sie dafür den Bernd umgenietet hat. Bernd wiederum sagt, dass seine Blutgrätsche gegen Alex bestimmt weh getan hat. Ist Alex ein Algebraiker oder ein Topologe?

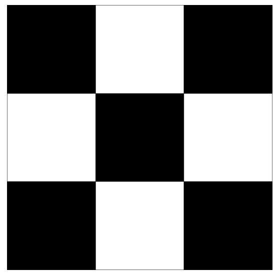
Aufgabe 20.6. Zeige, dass ein Wald bipartit ist.

Aufgabe 20.7.*

Wir betrachten den Spielzuggraphen zum Läufer beim Schach auf einem 3×3-Brett wie abgebildet.

(1) Zeige, dass der Spielzuggraph zum weißfeldrigen Läufer bipartit ist.

(2) Zeige, dass der Spielzuggraph zum schwarzfeldrigen Läufer nicht bipartit ist.



Aufgabe 20.8. Wir betrachten den Spielzuggraphen zum Turm beim Schach auf einen $n \times n$-Brett.

(1) Zeige, dass dies bei $n \leq 2$ bipartit ist.
(2) Zeige, dass dies bei $n \geq 3$ nicht bipartit ist.

Aufgabe 20.9. Wir betrachten in einem Kreuzworträtsel die Wörter als Knotenpunkte eines Graphen und verbinden zwei verschiedene Wörter durch eine Kante, falls sie sich in einem Kästchen treffen. Ist ein solcher Graph bipartit?

Aufgabe 20.10. Es sei G ein Graph, der eine disjunkte Vereinigung von m Kanten sei. Auf wie viele Arten kann man G als bipartiten Graphen auffassen? Wie viele optimale Paarungen gibt es?

Aufgabe 20.11. Es sei P eine Paarung in einem Graphen G. Zeige, dass P genau dann perfekt (maximal, optimal) ist, wenn dies für die Einschränkungen von P auf jede Zusammenhangskomponente von G gilt.

Aufgabe 20.12. Zeige, dass in einem vollständigen Graphen jede maximale Paarung bereits optimal ist.

Aufgabe 20.13. Bei einem Fußballspiel auf dem Bolzplatz hat Mannschaft $\{A, B, C, D, E\}$ gegen die Mannschaft $\{R, S, T, U, V\}$ gespielt. Beim anschließenden Grillen überlegen sich die Spieler der ersten Mannschaft, mit welchen Spielern sie während des Spiels aneinander geraten sind, und kommen zu folgendem Ergebnis.

	A	B	C	D	E
	R,T	S,U	V	V,S	U,T

Kann es sein, dass es im Spiel eine Situation gab, in der gleichzeitig jeder Spieler mit einem gegnerischen Spieler aneinander geriet? Falls ja, wer geriet mit wem aneinander?

Aufgabe 20.14. Bei einem Fußballspiel auf dem Bolzplatz hat Mannschaft $\{A,B,C,D,E\}$ gegen die Mannschaft $\{R,S,T,U,V\}$ gespielt. Beim anschließenden Grillen überlegen sich die Spieler der ersten Mannschaft, mit welchen Spielern sie während des Spiels aneinander geraten sind, und kommen zu folgendem Ergebnis.

	A	B	C	D	E
	R,S,T,U,V	S,U	S,V	S,V	S,V,U

Kann es sein, dass es im Spiel eine Situation gab, in der gleichzeitig jeder Spieler mit einem gegnerischen Spieler aneinander geriet? Falls ja, wer geriet mit wem aneinander?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.15. (2 Punkte)

Zeige, dass der Spielzuggraph zum Springer beim Schach bipartit ist.

Aufgabe 20.16. (2 Punkte)

Es sei $K_{r,s}$ der vollständige bipartite Graph. Wie viele optimale Paarungen gibt es in ihm?

Aufgabe 20.17. (3 Punkte)

Bestimme die Anzahl der perfekten Paarungen im dreidimensionalen Würfelgraphen.

Aufgabe 20.18. Es sei G ein Rundgang mit n Knoten.

(1) Erstelle eine Formel für die Paarungszahl von G.
(2) Erstelle eine Formel für minimale Kantenanzahl in einer maximalen Paarung von G.

Aufgabe 20.19. (4 Punkte)

Zeige, dass für einen Graphen $G = (V, E)$ folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Es gibt unter allen (durch Inklusion geordneten) Paarungen eine größte Paarung.
(2) G ist selbst eine Paarung
(3) Alle Wege in G haben die Länge 0 oder 1.
(4) Die Zusammenhangskomponenten sind (leer oder) ein- oder zweielementig.

Aufgabe 20.20. (2 Punkte)

Prof. Knopfloch, Dr. Eisenbeis und Vorli machen wieder Urlaub. In der Ferienwohnung sind die Töpfe $\{a, b, c, d, e\}$ und die Deckel $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ durcheinandergeraten. Eine systematische Durchsicht ergibt, dass zu den Töpfen die folgenden Deckel passen.

	a	b	c	d	e
	$3, 4$	5	$1, 2, 3$	$4, 6$	$1, 3, 6$

Kann man eine Paarung finden, die jeden Topf abdeckt? Falls ja, wie sieht sie aus? Wie sieht es aus, wenn Deckel 2 als Napf für Vorli verwendet wird?

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Clubagroup official insignia.jpg , Autor = Benutzer Skull and Bones somewhat inspired auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 2

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5