Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 14

Übungsaufgaben

Aufgabe 14.1. Zeige, dass die Anzahl der geordneten Partitionen mit eventuell leeren Blöcken zum Anzahltupel $r = (r_1, \ldots, r_k)$ einer n-elementigen Menge gleich

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!}$$

ist.

Aufgabe 14.2. Bestimme die Stirlingzahlen zweiter Art $S(n,k)$ für $n \leq 5$.

Aufgabe 14.3. Es sei $r \in \mathbb{N}$ fixiert. Zeige, dass die Stirling-Zahlen zweiter Art $S(n, n-2)$ ein Polynom in n vom Grad 4 ist.

Aufgabe 14.4. Erstelle eine Formel für die Anzahl der „Pseudopartitionen“ einer n-elementigen Menge in k Blöcke, wenn die Blöcke auch leer sein durfen, mit Hilfe der Stirlingzahlen zweiter Art.

Es sei M eine Menge und P und Q seien Partitionen von M. Man sagt, dass P *feiner* als Q ist, wenn jeder Block von P eine Teilmenge eines Blockes von Q ist.

Aufgabe 14.5. Es sei $M = \{a, b, c, d\}$ und es sei V die Menge der Partitionen auf M mit der Verfeinerung als Ordnung. Skizziere diese geordnete Menge.

Aufgabe 14.6. Es sei $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ und es sei

$$P = \{\{a\}, \{b, e, h\}, \{c, g\}, \{d, f\}\}$$

eine Partition auf M. Liste sämtliche Verfeinerungen von P auf.

Aufgabe 14.7. Es sei M eine Menge und es sei V die Menge aller Partitionen auf M, versehen mit der Verfeinerung von Partitionen als Relation. Zeige die folgenden Eigenschaften.

(1) Die Verfeinerung ist eine Ordnung auf V.
(2) V ist ein Verband. Was ist die inhaltliche Bedeutung des Infimums und des Supremums?
(3) V ist ein beschränkter Verband.

Aufgabe 14.8. Es sei M eine Menge und es sei V der Verband der Partitionen auf M. Was sind die Atome von V?

Aufgabe 14.9. Es sei M eine Menge und es sei V der Verband der Partitionen auf M.

(1) Ist V komplementär?
(2) Ist V distributiv?
(3) Ist V boolesch?

Aufgabe 14.10. Zeige, dass die Die Bellzahlen die folgenden Gesetzmäßigkeiten erfüllen.

(1)
$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$
(2)
$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i.$$

Aufgabe 14.11. Bestimme die Bellzahlen für
$$n = 0,1,2,3,4,5.$$

Aufgabe 14.12. Schreibe ein Computerprogramm, dass die Bellzahlen B_n berechnet.

Aufgabe 14.13. Zeige, dass für die Bellzahlen und die Stirlingzahlen zweiter Art die Abschätzungen
$$\frac{B_n}{n} \leq \max\left(S(n,k) | k = 1, \ldots, n\right) \leq B_n$$
gelten.

Aufgabe 14.14. Bestimme die Anzahl aller Partitionen auf einer zehnelementigen Menge, bei der jeder Block eine gerade Anzahl besitzt.

Aufgabe 14.15. Es seien D und W Mengen. Wir betrachten auf der Abbildungsmenge Abb (D, W) diejenige Relation, bei der die Abbildungen

$$f, g \colon D \longrightarrow W$$

in Relation stehen, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\rho \colon W \longrightarrow W$$

mit

$$f = \rho \circ g$$

gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.16. (3 Punkte)

Es sei M eine Menge, P und Q seien Partitionen mit zugehörigen surjektiven Abbildungen

$$f \colon M \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$$

bzw.

$$g \colon M \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$$

im Sinne von Bemerkung 14.4. Zeige, dass P genau dann eine Verfeinerung von Q ist, wenn es eine Faktorisierung von g über f gibt, wenn es also eine Abbildung

$$h \colon \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$$

mit $g = h \circ f$ gibt.

Aufgabe 14.17. (5 Punkte)

Es sei M eine Menge mit n Elementen und es sei V die Menge aller Partitionen auf M, versehen mit der Verfeinerung $\preccurlyeq$ von Partitionen als Ordnungsrelation. Es sei

$$P_1 \preccurlyeq P_2 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq P_{s-1} \preccurlyeq P_s$$

eine endliche Folge von Partitionen auf M mit echten Verfeinerungen, die man weder nach links noch nach rechts noch im Innern verfeinern kann. Zeige $s = n$.

Aufgabe 14.18. (2 Punkte)

Beweise Lemma 14.12 aus Lemma 13.9 und umgekehrt.

Aufgabe 14.19. (4 Punkte)

Bestimme die Stirlingzahlen zweiter Art $S(7,3)$ mit den verschiedenen Charakterisierungen aus Satz 14.13.

Aufgabe 14.20. (5 Punkte)

Es sei $r \in \mathbb{N}$ fixiert. Zeige, dass die Stirling-Zahlen zweiter Art $S(n, n-r)$ durch ein Polynom in n beschrieben werden.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5