Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 13

Übungsaufgaben

Aufgabe 13.1. Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_k)$ mit n. Zeige, dass die Anzahl der Abbildungen

$$\{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, k\},$$

bei denen das Urbild zu $j \in \{1, \ldots, n\}$ aus genau r_j Elementen besteht, gleich dem Multinomialkoeffizienten

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!}$$

ist.

Aufgabe 13.2. Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ mit $\sum_{j=1}^{k} r_j = n$. Zeige, dass die Anzahl der n-Tupel

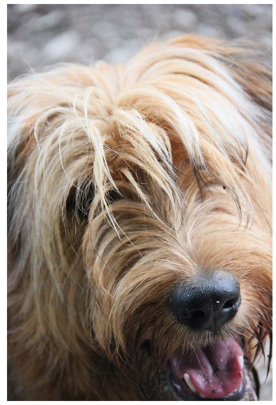
$$(j_1, \ldots, j_n) \in \{1, \ldots, k\}^n ,$$

in denen die Zahl j genau r_j-mal vorkommt, gleich

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!}$$

ist.

Aufgabe 13.3. Im Fressnapf von Vorli liegen heute drei Würste, vier Knochen, sieben Trockenbällchen und zwei Kaustangen. In wie vielen Reihenfolgen kann Vorli das auffressen?



Aufgabe 13.4. Auf wie viele Arten kann man aus dem Wort „Eisenbeis“ Wörter bilden?

Aufgabe 13.5. Es seien endlich viele natürliche Zahlen $r_1, \ldots, r_k$ fixiert. Zeige, dass die für

$$n \geq r_1 + \cdots + r_k$$

definierte Funktion

$$n \longmapsto \binom{n}{r_1, \ldots, r_k, n - r_1 - \cdots - r_k}$$

(die vorderen Blockanzahlen sind also fixiert und werden durch einen einzigen weiteren Block aufgefüllt) ein Polynom in n ist. Welchen Grad besitzt es?

Aufgabe 13.6. Es seien endlich viele natürliche Zahlen $r_1, \ldots, r_k$ fixiert. Zeige, dass die für

$$n \geq r_1 + \cdots + r_k$$

definierte Funktion

$$n \longmapsto \binom{n}{r_1, \ldots, r_k, 1, \ldots, 1}$$

(die vorderen Blockanzahlen sind also fixiert und werden durch Einserblöcke aufgefüllt) kein Polynom in n ist.

Aufgabe 13.7. Es sei R ein kommutativer Halbring und seien $x_1, \ldots, x_k \in R$ Elemente und $n \in \mathbb{N}$. Zeige

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{r_1 + \cdots + r_k = n} \binom{n}{r_1, \ldots, r_k} x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k}.$$

Aufgabe 13.8. Es sei R ein kommutativer Halbring und $x, y, z \in R$. Berechne explizit

(1) $(x+y+z)^2$,
(2) $(x+y+z)^3$,
(3) $(x+y+z)^4$.

Aufgabe 13.9. Zeige

$$k^n = \sum_{r_1+\cdots+r_k=n} \binom{n}{r_1, \ldots, r_k}$$

für $k, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 13.10. Es sei R ein kommutativer Halbring und $x, y, z \in R$ Elemente mit

$$xz = xy^2 = y^2z^2 = 0.$$

Erstelle eine Formel für

$$(x+y+z)^n,$$

die diese Nullteilereigenschaften berücksichtigt.

Die vorstehende Aufgabe wird durch die folgenden Begriffe und die anschließenden Aufgaben weiter vertieft. Ferner sind monomiale Ideale vergleichsweise einfache Ideale mit übersichtlichen Restklassenringen.

Es sei R ein kommutativer Ring. Aufbauend auf dem Polynomring in einer Variablen kann man *Polynomringe in mehreren Variablen* definieren. Man setzt rekursiv

$$R[X_1, X_2] := (R[X_1])[X_2], \ldots, R[X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n] := (R[X_1, \ldots, X_{n-1}])[X_n].$$

Dies ist äquivalent zur Menge aller Linearkombinationen von Monomen:

$$\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)} a_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)} X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}.$$

Es sei $R[X_1, \ldots, X_k]$ der Polynomring über dem kommutativen Ring R und sei

$$X^{\nu_j} = X_1^{\nu_{j1}} \cdots X_k^{\nu_{jk}}$$

eine Familie von Monomen, $j \in J$. Dann nennt man das von den Monomen X^{ν_j} erzeugte Ideal ein *monomiales Ideal*.

Aufgabe 13.11. Es sei K ein Körper und

$$I = (X^{\nu_j}, j \in J) \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$$

ein monomiales Ideal. Zeige, dass ein Monom X^{μ} genau dann zu I gehört, wenn es ein ν_j mit $\mu \geq \nu_j$ gibt.

Aufgabe 13.12. Es sei K ein Körper und

$$I = (X^{\nu_j}, j \in J) \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$$

ein monomiales Ideal. Zeige, dass ein Polynom $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ genau dann zu I gehört, wenn sämtliche Monome, die in P (mit einem Koeffizienten $\neq 0$) vorkommen, zu I gehören.

Aufgabe 13.13. Es sei K ein Körper. Bestimme eine Basis und die Dimension des Restklassenringes

$$K[X,Y,Z]/(X^3, Y^4, Z^2, X^2Y^3, X^2Z, Y^3Z, XYZ)$$

zum monomialen Ideal $(X^3, Y^4, Z^2, X^2Y^3, X^2Z, Y^3Z, XYZ)$.

Aufgabe 13.14. Bestimme die Anzahl der surjektiven Abbildungen von einer n-elementigen Menge in eine zweielelementige Menge mit Hilfe von Lemma 13.5, Satz 13.6, Satz 13.7 und direkt.

Aufgabe 13.15. Bestimme die Anzahl der surjektiven Abbildungen von einer sechselementigen Menge in eine dreielementige Menge mit Hilfe von Lemma 13.5, Satz 13.6 und Satz 13.7.

Aufgabe 13.16. Zu $n, k \in \mathbb{N}$ bezeichne $\operatorname{Surj}(n,k)$ die Anzahl der surjektiven Abbildungen einer n-elementigen Menge in eine k-elementige Menge. Zeige, dass die Rekursionsformel

$$\operatorname{Surj}(n+1,k) = k \cdot \operatorname{Surj}(n,k) + k \cdot \operatorname{Surj}(n,k-1)$$

gilt.

Aufgabe 13.17.*

Es sei $M = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ und $N = \{a,b,c,d\}$. Bestimme die Anzahl der surjektiven Abbildungen von M nach N mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass jedes Element aus N höchstens zweimal getroffen wird.

Aufgabe 13.18. Es sei $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ und $N = \{a,b,c,d\}$. Bestimme die Anzahl der surjektiven Abbildungen von M nach N mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass jedes Element aus N höchstens fünfmal getroffen wird.

Aufgabe 13.19.*

Es seien M und N endliche Mengen mit m bzw. n Elementen und sei

$$f\colon M \longrightarrow N$$

eine surjektive Abbildung. Wie viele Abbildungen

$$s\colon N \longrightarrow M$$

mit

$$f \circ s = \mathrm{Id}_N$$

gibt es?

Aufgabe 13.20.*

Es seien M und N endliche Mengen mit m bzw. n Elementen und sei

$$f\colon M \longrightarrow N$$

eine Abbildung. Wie viele Abbildungen

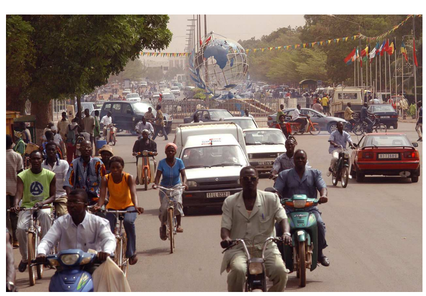
$$s\colon N \longrightarrow M$$

mit

$$f \circ s = \mathrm{Id}_N$$

gibt es?

Aufgaben zum Abgeben



Straßenszene von Ouagadougou

Aufgabe 13.21. (2 Punkte)

Auf wie viele Arten kann man aus dem Wort „Ouagadougou“ Wörter bilden?

Aufgabe 13.22. (4 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Halbring und seien $x, y, z, w \in R$ Elemente mit

$$xyz = x^2w = xz^2 = y^2zw = w^2 = 0.$$

Erstelle eine Formel für

$$(x+y+z)^n ,$$

die diese Nullteilereigenschaften berücksichtigt.

Aufgabe 13.23. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine endliche Familie von Monomen

$$X^\nu = X_1^{\nu_1} \cdots X_k^{\nu_k}$$

mit gewissen Exponententupeln ν derart an, dass es keinen Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ und keine Realsierung $\varphi : X_i \mapsto a_i \in \mathbb{Z}/(n)$ gibt, bei der $\varphi(X^\mu) = 0$ genau dann gilt, wenn X^μ zu dem von den Monomen X^ν erzeugten Ideal in $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_k]$ gehört.

Aufgabe 13.24. (3 Punkte)

Bestimme die Anzahl der surjektiven Abbildungen von einer siebenelementigen Menge in eine dreielementige Menge mit Hilfe von Lemma 13.5, Satz 13.6 und Satz 13.7.

Aufgabe 13.25. (5 Punkte)

Es sei $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ und $N = \{a,b,c,d,e\}$. Bestimme die Anzahl der surjektiven Abbildungen von M nach N mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass jedes Element aus N höchstens viermal getroffen wird.

Aufgabe 13.26. (4 Punkte)

Sei $k \in \mathbb{N}_+$ fixiert. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \frac{\text{Anzahl der surjektiven Abbildungen von } \{1,\ldots,n\} \text{ nach } \{1,\ldots,k\}}{\text{Anzahl der Abbildungen von } \{1,\ldots,n\} \text{ nach } \{1,\ldots,k\}}.$$

Abbildungsverzeichnis