Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 12

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 12.1. Es seien G und H Gruppen und $\varphi\colon G \to H$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass $\varphi(e_G) = e_H$ und $(\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1})$ für jedes $g \in G$ ist.

Übungsaufgaben

AUFGABE 12.2. Sei $a \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\, x \longmapsto ax,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

AUFGABE 12.3. Es sei K ein angeordneter Körper und $b \in K_+$ ein positives Element. Zeige, dass die ganzzahlige Exponentialfunktion

$$\mathbb{Z} \longrightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot, 1),\, n \longmapsto b^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

AUFGABE 12.4.*

Bestimme, ob die durch die Gaußklammer gegebene Abbildung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z},\, q \longmapsto \lfloor q \rfloor,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist oder nicht.

AUFGABE 12.5. Es sei K ein Körper und sei

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in K,\, ad - bc \neq 0 \right\}$$

die Menge aller invertierbaren 2×2-Matrizen.

a) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass M mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

b) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass die Abbildung

$$M \longrightarrow K^{\times},\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad - bc,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 12.6. Sei G eine (multiplikativ geschriebene) kommutative Gruppe und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Potenzieren

$$G \longrightarrow G,\, x \longmapsto x^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 12.7.*

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass sich Gruppenelemente $g \in G$ und Gruppenhomomorphismen φ von $\mathbb{Z}$ nach G über die Korrespondenz

$$g \longmapsto (n \mapsto g^n) \text{ und } \varphi \longmapsto \varphi(1)$$

entsprechen.

Aufgabe 12.8. Bestimme die Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Q}, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Aufgabe 12.9. Es sei K ein Körper. Zeige, dass es außer der trivialen Abbildung keinen weiteren Gruppenhomomorphismus von $(K, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$ gibt.

Aufgabe 12.10. Es bezeichne $\mathbb{Q}^{\times} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ die (multiplikative) Einheitengruppe von $\mathbb{Q}$. Man gebe einen nichttrivialen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^{\times}$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$ an.

Aufgabe 12.11. Sei $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wir betrachten die Restklassengruppe

$$\mathbb{Z}/(d) = \{0, 1, \ldots, d-1\}.$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\psi\colon\, \mathbb{Z}/(d) \longrightarrow \mathbb{Z},\, r \longmapsto r,$$

kein Gruppenhomomorphismus ist.

Wie in der Vorlesung erwähnt, sind lineare Abbildungen insbesondere Gruppenhomomorphismen. Den Kern kann man wie folgt auch für einen Gruppenhomomorphismus definieren.

Seien G und H Gruppen und sei
$$\varphi \colon G \longrightarrow H$$
ein Gruppenhomomorphismus. Dann nennt man das Urbild des neutralen Elementes den *Kern* von φ, geschrieben
$$\operatorname{kern} \varphi \,=\, \varphi^{-1}(e_H) \,=\, \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}.$$
Es gilt auch wieder das Kernkriterium, also die Aussage, dass ein Gruppenhomomorphismus genau dann injektiv ist, wenn der Kern trivial ist, d.h. nur aus 0 besteht.

Aufgabe 12.12.*

Beweise das Kernkriterium für die Injektivität eines Gruppenhomomorphismus
$$\varphi \colon G \longrightarrow H.$$

Aufgabe 12.13. Seien G und H Gruppen und sei $\varphi \colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild von φ eine Untergruppe von H ist.

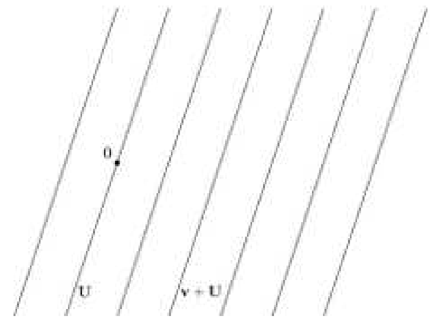
Aufgabe 12.14. Stelle in der Restklassengruppe $\mathbb{Q}$ mod $\mathbb{Z}$ die folgenden Terme durch einen Bruch zwischen 0 und 1 dar.

(1) $\frac{3}{8} + \frac{5}{7}$,
(2) $-\frac{6}{5}$,
(3) $\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{2}$.

Aufgabe 12.15. Bestimme für die folgenden Hintereinanderausführungen von Teildrehungen (in der Ebene um den Nullpunkt), um welche Gesamtdrehung es sich handelt. Die Gesamtdrehung soll dabei durch eine Drehung um höchstens 180 Grad (höchstens eine Halbdrehung) mit oder gegen den Uhrzeigersinn beschrieben werden.

(1) Eine Halbdrehung im Uhrzeigersinn gefolgt von einer Vierteldrehung im Uhrzeigersinn.
(2) Eine Halbdrehung im Uhrzeigersinn gefolgt von einer Vierteldrehung gegen den Uhrzeigersinn.
(3) Eine Volldrehung im Uhrzeigersinn.
(4) Eine Drei-Viertel-Drehung gegen den Uhrzeigersinn gefolgt von einer Zwei-Drittel-Drehung gegen den Uhrzeigersinn.

(5) Eine Fünfteldrehung im Uhrzeigersinn gefolgt von einer Fünf-Achtel-Drehung gegen den Uhrzeigersinn.

Aufgabe 12.16. 

Begründe, dass die Menge der zu einer Geraden $U \subset \mathbb{Q}^2$ parallelen Geraden eine kommutative Gruppe bilden. Addiere zwei solche Geraden miteinander. Illustriere die Wohldefiniertheit an diesem Beispiel.

Aufgabe 12.17.*

Es sei G eine kommutative Gruppe und

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass H ebenfalls kommutativ ist.

Aufgabe 12.18. Es sei d ein Teiler von n. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\psi\colon \mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(d)$$

derart gibt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{Z}/(n) \arrow[d] \\ & \mathbb{Z}/(d) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Warum lassen sich die Reste modulo 2 und modulo 5 besonders einfach berechnen?

Aufgabe 12.19. Es seien G und F kommutative Gruppen und sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe mit der zugehörigen Äquivalenzrelation $\sim$ auf G. Es sei $\varphi\colon G \to F$ ein Gruppenhomomorphismus mit $H \subseteq \operatorname{kern} \varphi$. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi}\colon G/\sim \longrightarrow F$ mit $\tilde{\varphi} \circ p = \varphi$ gibt.

Aufgabe 12.20. Zeige direkt und unter Verwendung von Satz 8.4, dass jede Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ein Ideal ist.

Aufgabe 12.21. Zeige, dass $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ eine Untergruppe, aber kein Ideal ist.

Aufgabe 12.22.*

Zeige, dass ein kommutativer Ring genau dann ein Körper ist, wenn er genau zwei Ideale enthält.

Aufgabe 12.23.*

Zeige, dass der Kern eines Ringhomomorphismus

$$\varphi\colon R \longrightarrow S$$

ein Ideal in R ist.

Aufgabe 12.24. Erstelle für $n = 2, 3, \ldots, 10$ Operationstafeln für die Addition und die Multiplikation für die Restklassenringe $\mathbb{Z}/(n)$. Was haben diese Tabellen mit dem Rechnen im n-System zu tun?

Aufgabe 12.25.*

(1) Gibt es eine Primzahl x derart, dass auch $x + 10$ und $x + 20$ Primzahlen sind?
(2) Gibt es mehr als eine Primzahl x derart, dass auch $x+10$ und $x+20$ Primzahlen sind?

Aufgabe 12.26. Bestimme den Rest von 36! modulo 31.

Aufgabe 12.27. Bestimme den Rest von 12! modulo 143.

Aufgabe 12.28. Sei p eine Primzahl. Beweise durch Induktion den kleinen Fermat, also die Aussage, dass $a^p - a$ ein Vielfaches von p für jede ganze Zahl a ist.

Aufgabe 12.29.*

Bestimme das inverse Element zu $\overline{44}$ in $\mathbb{Z}/(97)$.

Aufgabe 12.30. Bestimme das inverse Element zu $\overline{57}$ in $\mathbb{Z}/(139)$.

Aufgabe 12.31.*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}/(n)$ der zugehörige Restklassenring. Zeige, dass $a \in \mathbb{Z}$ eine Einheit modulo n genau dann ist, wenn a und n teilerfremd sind.

Aufgabe 12.32. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Abbildung

$$K \longrightarrow \operatorname{Mat}_n(K),\; a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix},$$

ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 12.33.*

Es sei K ein Körper. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon K \longrightarrow \operatorname{Mat}_2(K),\; a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche Eigenschaften eines Ringhomomorphismus erfüllt die Abbildung φ, welche nicht?

Aufgabe 12.34. Löse die lineare Gleichung

$$3x = 5$$

für die folgenden Körper K

a) $K = \mathbb{Q}$,

b) $K = \mathbb{R}$,

c) $K = \{0, 1\}$, der Körper mit zwei Elementen aus Beispiel 4.12,

d) $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, der Körper mit sieben Elementen aus Beispiel 12.11.

Aufgabe 12.35. Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 12.11.

$$5x = 4.$$

Aufgabe 12.36. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 12.11.

AUFGABE 12.37.*

Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 2X^3 + 4X^2 + 5$ und $T = 3X^2 + X + 1$ durch.

AUFGABE 12.38. Führe in $\mathbb{Z}/(13)[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 6X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 5$ und $T = 5X^2 + 3X + 2$ durch.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 12.39. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass der Betrag

$$K^\times \longrightarrow (K_+, \cdot, 1),\, x \longmapsto |x|\,,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Was ist der Kern?

AUFGABE 12.40. (3 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Matrix einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}^2$ und ebenso von $\mathbb{Z}^2$ nach $\mathbb{Z}^2$ definiert. Untersuche diese beiden Gruppenhomomorphismen in Hinblick auf Injektivität und Surjektivität.

AUFGABE 12.41. (2 Punkte)

Stelle in der Restklassengruppe $\mathbb{Q}$ mod $\mathbb{Z}$ die folgenden Terme durch einen Bruch zwischen 0 und 1 dar.

(1) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$,
(2) $-\frac{3}{4}$,
(3) 11,
(4) $\frac{4}{7} + \frac{5}{6}$.

AUFGABE 12.42. (3 Punkte)

Erstelle Operationstafeln für die Addition und die Multiplikation für den Restklassenring $\mathbb{Z}/(13)$.

Aufgabe 12.43. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ folgende Polynomdivision aus.

$$X^4 + 5X^2 + 3 \text{ durch } 2X^2 + X + 6\,.$$

Aufgabe 12.44. (3 Punkte)

Berechne über $\mathbb{Z}/(5)$ das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.45. (3 Punkte)

Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 12.11.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Abbildungsverzeichnis