Bündel, Garben und Kohomologie

Prof. Dr. Holger Brenner
Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik

Wintersemester 2019-2020

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript gibt die Vorlesung Bündel, Garben und Kohomologie wieder, die ich im Wintersemester 2019/2020 im Masterstudiengang Mathematik an der Universität Osnabrück gehalten habe. Inhaltlich handelts es sich um eine vierfache Einführung: in die Theorie der reellen Vektorbündel über einem topologischen Raum, in die Garbentheorie, in die schemabasierte algebraische Geometrie und in die Kohomologietheorie. Naturgemäß können dabei nur erste Einblicke vermittelt werden, ich hoffe aber doch, dass die garbentheoretische Klammer, die verschiedene geometrische Theorien zusammenhält, sichtbar wird, und dass das Wechselspiel zwischen eher algebraischen und eher geometrischen Konzepten gewürdigt werden kann. Das Problem, eine gute Mischung zwischen theoretischen Konstrukten und intuitiv zugänglicheren Fragestellungen zu bereiten, zieht sich durch die gesamte Mathematik und ist insbesondere in einer Darstellung der algebraischen Geometrie allgegenwärtig. Die Stoffauswahl war, neben den oben erwähnten mehrfachen Einführungen, durch die Zielsetzung bestimmt, einen vollständigen kohomologischen Beweis des Satzes von Riemann-Roch für Vektorbündel auf glatten projektiven Kurven geben zu können (allerdings ohne Serre-Dualität).

Bei Frau Marianne Gausmann bedanke ich mich für die Erstellung der Pdf-Files und bei den Studierenden für einzelne Korrekturen und Anregungen.

Holger Brenner

1. Vorlesung - Einführung

1.1. **Parameterabhängige lineare Gleichungssysteme.**

Wir betrachten die reelle lineare Gleichung

$$7u - 5v + 2w \,=\, 0.$$

Die Lösungsmenge

$$L \,=\, \big\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid 7u - 5v + 2w = 0\big\} \,\subset\, \mathbb{R}^3$$

ist ein zweidimensionaler reeller Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$. Das Lösen einer solchen linearen Gleichung bedeutet u.A. eine Basis für L anzugeben, im vorliegenden Fall ist beispielsweise

$$L \,=\, \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \rangle.$$

Die Lösungsmethoden sind hierbei weitgehend (siehe unten für Einschränkungen zu dieser Behauptung) unabhängig von den konkreten Koeffizienten der linearen Gleichung. Wenn man statt konkreter Zahlen die Koeffizienten in irgendeiner funktionalen Weise von Parametern abhängen lässt, so kann man sich fragen, inwiefern der Lösungsraum mit diesen Parametern variiert. Betrachten wir beispielsweise die von einem Parameter s abhängige lineare Gleichung

$$7u - 5v + \big(s^2 - 3s - 10\big)w \,=\, 0.$$

Zu jedem s hängt der Lösungsraum L_s von s ab, er ist nach wie vor ein zweidimensionaler Untervektorraum $L_s \subset \mathbb{R}^3$, der Lösungsraum ist eine mit s wandernde Ebene im Raum. Man kann sich fragen, für welche s der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, also zu L_s gehört. Oder, ob es verschiedene Parameter s, t gibt, für die die Lösungsräume übereinstimmen, also $L_s = L_t$ als Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ gilt. Oder, ob es stets eine Basis des Lösungsraumes der Form $\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \rangle$ wie oben gibt. Oder, ob es stets einen Lösungsvektor der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e \end{pmatrix}$ gibt. Wir erinnern daran, dass der Lösungsalgorithmus für lineare Gleichungssysteme (also die Gaußelimination) dann verzweigt, wenn gewisse Koeffizienten 0 sind bzw. im Verlauf des Algorithmus 0 werden. Die Gleichung

$$7u - 5v + 0w \,=\, 0$$

besitzt den Lösungsraum $\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ und enthält keinen Vektor der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e \end{pmatrix}$. Da $s = -2, 5$ Nullstellen des quadratischen Polynoms $s^2 - 3s - 10$ sind, wird in der obigen parametrisierten Gleichung für diese Parameterwerte die Gleichung zu $7u - 5v + 0w = 0$ und daher besitzt für diese beiden Werte der Lösungsraum L_s keinen Vektor der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e \end{pmatrix}$. Für alle anderen Parameterwerte besitzt der Lösungsraum den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{7}{s^2-3s-10} \end{pmatrix}$. Ein gewisser Aspekt des Lösungsraumes hängt also selbst wieder funktional von dem Parameter ab.

Es ist naheliegend, die Abhängigkeit einer linearen Gleichung oder eines linearen Gleichungssystems von Parametern in zwei Schritten zu untersuchen. Im ersten Schritt setzt man die Koeffizienten der Gleichungen selbst als Variablen (universelle Parameter) an und studiert, wie die Lösungsräume mit diesen Parametern variieren. Insbesondere möchte man qualitative Sprünge im Verhalten der Lösungsräume verstehen. In einem zweiten Schritt stellt man zusätzliche mehr oder weniger restriktive Bedingungen an die universellen Parameter oder man lässt diese funktional von anderen Parametern abhängen.

Beispiel 1.1. Wir betrachten die allgemeine reelle lineare Gleichung

$$su + tv = 0$$

in den Variablen u, v und den Parametern s, t, die als unbestimmte Koeffizienten der linearen Gleichung dienen. Wir möchten den Lösungsraum

$$L_{(s,t)} = \{(u, v) \mid su + tv = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

in Abhängigkeit von den Parametern (s, t) verstehen. Ein Extremfall liegt bei $(s, t) = (0, 0)$ vor, dann ist die Gleichung für beliebige (u, v) erfüllt und der Lösungsraum ist der volle zweidimensionale $\mathbb{R}^2$. Bei $(s, t) \neq (0, 0)$ ist der Lösungsraum eindimensional, und ein Basisvektor für diese Lösungsgerade ist durch $\begin{pmatrix} t \\ -s \end{pmatrix}$ gegeben. Insbesondere kann man den Lösungsraum über dem Parameterraum $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ pauschal beschreiben, es ist

$$L_{(s,t)} = \left\{ c \begin{pmatrix} t \\ -s \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine kompaktere Interpretation dieses Sachverhaltes ergibt sich, wenn man den Gesamtlösungsraum der Gleichung als

$$L \;=\; \{(s,t,u,v) \mid su+tv=0\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^4$$

ansetzt. Man beachte, dass L kein linearer Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist. Der Lösungsraum zu einem speziellen Parameterwert (s,t) ergibt sich daraus, wenn man L mit den affinen Ebenen $(s,t)\times\mathbb{R}^2$ schneidet. Unter der Gesamtabbildung $p = p_{s,t}$

$$L \longrightarrow \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \xrightarrow{p_{s,t}} \mathbb{R}^2,\; (s,t,u,v) \longmapsto, (s,t)\,,$$

ist $L_{(s,t)}$ die Faser zu (s,t). Im Gesamtlösungsraum ist die Variation der Lösungsgeraden in Abhängigkeit vom Parameter und die Degenerierung zu einer Lösungsebene über dem Nullpunkt sichtbar. Das Verhalten außerhalb des Parameternullpunktes wird durch die eingeschränkte Abbildung

$$L' = L \setminus \big(\mathbb{R}^2\times(0,0)\big) = p^{-1}\big(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\big) \longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

beschrieben. Jede Faser dieser eingeschränkten Projektion ist der eindimensionale Lösungsraum. Ferner gibt es eine bijektive Abbildung

$$\big(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\big)\times\mathbb{R} \longrightarrow L',\; (s,t;c) \longmapsto (s,t,ct,-cs),$$

die für jeden Parameter (s,t) linear ist. Links steht ein direktes Produkt aus dem Basisraum $\mathbb{R}^2\times(0,0)$ und der Faser $\mathbb{R}$, die unabhängig vom Basispunkt ist, und rechts steht eine Familie von variierenden Geraden im $\mathbb{R}^2$, doch die angegebene Bijektion zeigt, dass man das eine in das andere übersetzen kann.

Beispiel 1.2. Wir betrachten die allgemeine reelle lineare Gleichung

$$ru+sv+tw \;=\; 0$$

in den Variablen u,v,w und den Parametern r,s,t, die als unbestimmte Koeffizienten der lineare Gleichung dienen. Wir möchten den Lösungsraum

$$L_{(r,s,t)} \;=\; \{(u,v,w) \mid ru+sv+tw=0\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^3$$

in Abhängigkeit von den Parametern (r,s,t) verstehen. Ein Extremfall liegt bei $(r,s,t) = (0,0,0)$ vor, dann ist der Lösungsraum der volle $\mathbb{R}^3$. Bei $(r,s,t)\neq(0,0,0)$ ist der Lösungsraum zweidimensional. Wir schließen den Nullpunkt als Parameter aus und betrachten den Gesamtlösungsraum der Gleichung

$$\begin{aligned} L &= \{(r,s,t,u,v,w) \mid ru+sv+tw=0,\, (r,s,t)\neq(0,0,0)\} \\ &\subseteq \mathbb{R}^3\setminus\{0,0,0\}\times\mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

zusammen mit der Projektion p auf $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. Die Faser unter p zu einem speziellen Parameterwert (r,s,t) ist der Lösungsraum $L_{(r,s,t)}$ zu der durch dieses Parametertupel definierten Gleichung.

Kann man in diesem Beispiel eine Basis für den jeweiligen Lösungsraum angeben, die in einer übersichtlichen, rechnerischen, algebraischen Weise von den Parametern abhängt? Da wir den Nullpunkt rausgeworfen haben, gilt

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} \;=\; \{(r,s,t) \mid r \neq 0\} \cup \{(r,s,t) \mid s \neq 0\} \cup \{(r,s,t) \mid t \neq 0\},$$

man kann also den Basisraum als eine Vereinigung von drei offenen Mengen schreiben. Wenn man das Verhalten über einer solchen offenen Menge betrachtet, sagen wir über die durch $r \neq 0$ gegebene, so kann man darüber eine Basis angeben, nämlich durch

$$(s,\, -r,\, 0) \;\text{ und }\; (t,\, 0,\, -r)\;.$$

Dabei sichert $r \neq 0$, dass die beiden Vektoren linear unabhängig sind. Die beiden Lösungsvektoren sind sogar überall wohldefinierte Lösungen, verlieren aber bei $r = 0$ ihre lineare Unabhängikeit und bilden also nicht überall eine Basis. Aber jedenfalls ist

$$\{(r,s,t) \mid r \neq 0\} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow L|_{\{(r,s,t) \mid r \neq 0\}},\, (r,s,t;c,d) \longmapsto c\,(s,\, -r,\, 0) + d\,(t,\, 0,\, -r),$$

eine rechnerisch einfache Bijektion zwischen dem Produktraum der Basis und dem $\mathbb{R}^2$ einerseits und dem Lösungsraum oberhalb von $\{(r,s,t) \mid r \neq 0\}$.

Wir fragen uns, ob es möglich ist, global, also auf ganz $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,\,0,\,0)\}$, eine mit dem Basisraum variiende Basis des Lösungsraums anzugeben. Gefragt ist also nach der Existenz von zwei Funktionen $u(r,s,t)$ und $v(r,s,t)$ mit Werten im $\mathbb{R}^3$ und der Eigenschaft, dass sie stets eine Basis des Lösungsraumes bilden (und insbesondere zum Lösungsraum gehören). Ohne jede weitere Bedingung an u und v ist dies möglich, da man ja durch eine Fallunterscheidung solche Funktionen definieren kann. Aber schon wenn man fordert, dass die beiden Funktionen stetig sein sollen, ist dies nicht mehr möglich. Wegen der Stetigkeit sind die Funktionen u und v bereits auf der offenen Teilmenge

$$U \;=\; \{(r,s,t) \mid r \neq 0\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,\,0,\,0)\}$$

festgelegt, da man jeden Punkt aus $\mathbb{R}^3$ durch eine Folge aus der offenen Menge U approximieren kann. Mit der oben angegebenen Basis oberhalb dieser Menge kann man jedenfalls

$$u \;=\; \alpha(r,s,t) \begin{pmatrix} s \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} + \beta(r,s,t) \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

und

$$v \;=\; \gamma(r,s,t) \begin{pmatrix} s \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} + \delta(r,s,t) \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

mit stetigen reellwertigen Funktionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auf der offenen Menge U schreiben. Wir können nicht erwarten, dass diese Funktionen auf dem ganzen $\mathbb{R}^3$ definiert sind, weshalb im stetigen Fall die Argumentation komplizierter werden würde. Das Resultat wird sich aus Satz 2.3 ergeben, siehe Bemerkung 2.4. Daher beschränken wir uns auf den Fall, dass diese Funktionen rationale

Funktionen sind, in deren Nenner eine Potenz von r vorkommen kann (das sind die rationalen Funktionen auf U). Betrachten wir

$$u = \alpha \begin{pmatrix} s \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = \frac{P}{r^m} \begin{pmatrix} s \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{Q}{r^n} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

mit Polynomen P und Q, wobei der Faktor r rausgekürzt sei. Da u insgesamt auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert ist, kann m (ebenso n) höchstens 1 sein (sonst hätte u einen Pol). Die erste Zeile führt (bei $m = n = 1$) auf eine polynomiale Gleichung der Form

$$rN + sP + tQ = 0$$

mit Polynomen $N, P, Q \in \mathbb{R}[r, s, t]$. In diesem Fall ist (Stichwort Koszul-Auflösung)

$$(N, P, Q) = A(-s, r, 0) + B(t, 0, -r) + C(0, t, -s)$$

mit Polynomen $A, B, C \in \mathbb{R}[r, s, t]$. Entsprechend ergibt sich für v eine Darstellung mit (N', P', Q') bzw. (A', B', C'). Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : X \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow L \subseteq X \times \mathbb{R}^3, (r, s, t; a, b, c) \longmapsto \\ (r, s, t; a(-s, r, 0) + b(t, 0, -r) + c(0, t, -s)).$$

Unter dieser Abbildung werden die Polynomtupel (A, B, C) bzw. (A', B', C') (die wir als Abbildungen $X \to X \times \mathbb{R}^3$ auffassen) auf u bzw. v abgebildet. Da diese nach Voraussetzung in jedem Punkt eine Basis der zugehörigen Faser von L bilden, sind (A, B, C) und (A', B', C') in jedem Punkt linear unahängig. Das Tupel $(t, s, -r)$ wird unter φ in jedem Punkt auf 0 (in der Faser) abgebildet. Daher bilden die (A, B, C), (A', B', C') und $(t, s, -r)$ in jedem Punkt eine Basis von $\mathbb{R}^3$, da $(t, s, -r)$ in keinem Punkt als Linearkombination von (A, B, C) und (A', B', C') geschrieben werden kann. Die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ t & s & -r \end{pmatrix}$$

ist aber eine Linearkombination der Variablen r, s, t im Polynomring. Daher ist dies keine Einheit im Polynomring. Im reellen Fall kann man daraus noch nicht schließen, dass die Determinante eine reelle Nullstelle in X hat (wenn die Determinante beispielsweise die Form $r^2 + s^2 + t^2$ besitzt). Wenn man aber statt mit $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{C}$ arbeitet, so ändert sich an der algebraischen Argumentation nichts und man kann folgern, dass die Determinante in

$$X_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

Nullstellen besitzt und daher nicht überall eine Basis vorliegen kann.

Beispiel 1.3. Wir betrachten das allgemeine reelle lineare Gleichungssystem

$$au + bv + cw = 0,$$

und

$$du + ev + fw \;=\; 0,$$

in den Variablen u, v, w und den Parametern a, b, c, d, e, f, die als unbestimmte Koeffizienten des linearen Gleichungssystems dienen. Wenn die Parameter hinreichend allgemein sind, genauer, wenn zwischen den beiden Gleichungen keine lineare Relation besteht, so ist der Lösungsraum

$$L_{(a,b,c,d,e,f)} \;=\; \{(u, v, w) \mid au + bv + cw = 0 \text{ und } du + ev + fw = 0\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^3$$

jeweils eine Gerade im $\mathbb{R}^3$. Die Parameter definieren also unter dieser Bedingung eine Familie von variierenden Geraden im $\mathbb{R}^3$. Der relevante (für die Geradenfamilie) Parameterraum ist

$$P \;=\; \{(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f) \mid (a,\, b,\, c) \text{ und } (d,\, e,\, f) \text{ linear unabhängig}\},$$

es liegt insgesamt der totale Lösungsraum

$$\begin{aligned} L \;&=\; \{(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f,\, u,\, v,\, w) \mid au + bv + cw = 0 \text{ und } du + ev + fw = 0\} \\ &\subseteq\; P \times \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

mit der Projektion auf P vor.

Kann man diese Gerade bzw. ein Basiselement dafür in Abhängigkeit der Parameter global angeben? Wenn man die beiden zu erfüllenden Gleichungen als Orthogonalitätsrelationen betrachtet, so geht es um einen nichtrivialen Vektor, der auf beiden Bedingungsvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$ senkrecht steht. Diese Eigenschaft erfüllt bekanntlich das Kreuzprodukt der beiden Vektoren, also $\begin{pmatrix} bf - ce \\ -af + cd \\ ae - bd \end{pmatrix}$ (siehe Satz 33.3 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) für die relevanten Eigenschaften des Kreuzproduktes).

Insgesamt liegt also eine Bijektion

$$\begin{aligned} &P \times \mathbb{R} \longrightarrow L, (a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f,\, s) \longmapsto \\ &\qquad\qquad (a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f,\, s(bf - ce),\, s(-af + ce),\, s(ae - bd)), \end{aligned}$$

vor.

In Beispiel 1.1 und in Beispiel 1.3 liegen sogenannte globale polynomiale Trivialisierungen vor, das gegebene komplizierte geometrische Objekt lässt sich also mit Hilfe von polynomialen Funktionen in das einfache Objekt $P \times \mathbb{R}$, wobei P den Basisraum bezeichnet, übersetzen. Dagegen war eine solche globale Trivialisierung in Beispiel 1.2 nicht möglich, obwohl dort auf den drei angegebenen offenen Teilmengen des Basisraumes lokal Trivialisierung existieren. Solche geometrischen Objekte nennt man Vektorbündel.

1.2. **Reelle Vektorbündel.**

Definition 1.4. Es sei X ein topologischer Raum und $r \in \mathbb{N}$. Ein *reelles Vektorbündel* V vom *Rang* r ist ein topologischer Raum zusammen mit einer stetigen Abbildung $p\colon V \to X$ derart, dass jede Faser $p^{-1}(x)$ ein r-dimensionaler reeller Vektorraum ist und dass es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Homöomorphismen

$$\varphi_i\colon\ p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^r$$

über U_i gibt, die in jeder Faser einen linearen Isomorphismus

$$(\varphi_i)_x\colon\ p^{-1}(x) \longrightarrow \mathbb{R}^r$$

induzieren.

Dabei nennt man V auch den *Totalraum* und X den *Basisraum* des Vektorbündels. Für die Faser schreibt man oft auch $V_x = p^{-1}(x)$. In den obigen Beispielen ist X der relevante Parameterraum, also der Ort der Parameter, für die die Lösungsräume die minimale Dimension haben. Diese Dimension ist der Rang r der vorstehenden Definition, also $1, 2, 1$. Im ersten und im dritten Beispiel besteht die offene Überdeckung allein aus dem Basisraum selbst, diese Bündel haben eine globale Trivialisierung, im zweiten Beispiel liegt eine offene Überdeckung mit drei offenen Mengen vor, über der die Trivialisierungen angegeben wurden. In der Homöomorphie $p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ ist die rechte Seite mit der Produkttopologie und der $\mathbb{R}^r$ mit der natürlichen euklidischen Topologie und $p^{-1}(U)$ ist mit der induzierten Topologie von V versehen. Somit tragen alle Fasern V_x die natürliche Topologie eines endlichdimensionalen reellen Vektorraumes. Mit Homöomorphismus über U ist gemeint, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow & \downarrow \\ & & U \end{array}$$

kommutiert. Das Produkt $X \times \mathbb{R}^r$ ist ein Vektorbündel, das das *triviale Vektorbündel* heißt.

Lemma 1.5. *Es sei $p\colon V \to X$ ein reelles Vektorbündel über einem topologischen Raum X. Dann ist zu jeder offenen Menge $W \subseteq X$ die Einschränkung*

$$p^{-1}(W) \longrightarrow W$$

ebenfalls ein Vektorbündel.

Beweis. Dies ist klar, man muss einfach nur die faserweise linearen Homöomorphismen

$$\varphi_i\colon\ p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^r$$

zu

$$\varphi_i|_{W \cap U_i}\colon\ p^{-1}(W \cap U_i) \longrightarrow (W \cap U_i) \times \mathbb{R}^r$$

einschränken. $\square$

Die Einschränkung eines Vektorbündels auf die U_i ist trivial. Lokal ist also jedes Vektorbündel trivial.

Definition 1.6. Es seien E und F reelle Vektorbündel auf einem topologischen Raum X. Ein *Homomorphismus von Vektorbündeln* $\varphi\colon E \to F$ ist eine stetige Abbildung über X derart, dass für jeden Punkt $x \in X$ die induzierte Abbildung

$$\varphi_x\colon E_x \longrightarrow F_x$$

$\mathbb{R}$-linear ist.

Definition 1.7. Es seien E und F reelle Vektorbündel auf einem topologischen Raum X. Ein Homomorphismus von Vektorbündeln $\varphi\colon E \to F$ heißt Isomorphismus, wenn es einen Homomophismus $\psi\colon F \to E$ gibt, der verknüpft mit φ (in beiden Reihenfolgen) die Identität ergibt.

1.3. **Das Tangentialbündel auf einer Mannigfaltigkeit.**

Wir besprechen ein weiteres besonders wichtigens Vektorbündel, das es auf jeder Mannigfaltigkeit gibt, das Tangentialbündel.

Zu jedem Punkt $P \in M$ einer Mannigfaltigkeit gehört der Tangentialraum T_PM. Der Tangentialraum ist ein n-dimensionaler Vektorraum, wobei n die Dimension der Mannigfaltigkeit ist. Seine Elemente sind die Tangentenvektoren, das sind „infinitesimale Richtungen“ an diesem Punkt. Solche Tangenten-Richtungen an zwei verschiedenen Punkten haben zunächst einmal nichts miteinander zu tun, da ihre präzise Definition jeweils nur von beliebig kleinen offenen Umgebungen der Punkte abhängt, und da diese aufgrund der Hausdorff-Eigenschaft disjunkt gewählt werden können.

Dem steht radikal die Vorstellung gegenüber, die sich mit einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ verbindet. Dort kann man für jeden Punkt $Q \in V$ den Tangentialraum T_QV mit dem umgebenden Vektorraum $\mathbb{R}^n$ in natürlicher Weise identifizieren, indem man dem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ den Tangentenvektor zuordnet, der durch die lineare Kurve $t \mapsto Q + tv$ definiert wird. Da diese Identifizierung für jeden Punkt gilt, besteht zwischen den Tangentialräumen zu

$$Q \in V \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine direkte Parallelität.

Da eine Mannigfaltigkeit durch offene Mengen überdeckt wird, die diffeomorph zu offenen Mengen in einem euklidischen Raum sind, liegt die Vermutung nahe, dass die verschiedenen Tangentialräume doch nicht völlig isoliert dastehen. Das Konzept des *Tangentialbündels* vereinigt alle Tangentialräume und ermöglicht es, die lokale Verbundenheit der Tangentialräume wiederzuspiegeln.

Definition 1.8. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann nennt man die Menge

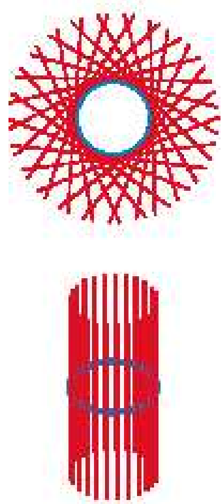
$$TM = \biguplus_{P \in M} T_P M,$$

versehen mit der Projektionsabbildung

$$\pi\colon\, TM \longrightarrow M,\, (P, v) \longmapsto P,$$

das *Tangentialbündel* von M.

Ein Punkt $u \in TM$ in einem Tangentialbündel besitzt also stets einen *Basispunkt* $P \in M$ und ist ein Element im Tangentialraum $T_P M$. Man schreibt einen solchen Punkt zumeist als (P, v) mit $P \in M$ und $v \in T_P M$. Für eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $TV = V \times \mathbb{R}^n$ $TV = SZ =$, also ein Produktraum. Dies gilt im Allgemeinen nicht für eine beliebige Mannigfaltigkeit. Das Tangentialbündel bringt zunächst einmal nur die verschiedenen Tangentialräume disjunkt zusammen, ohne dass verschiedene Tangentialräume miteinander identifiziert würden; allerdings entsteht durch die Topologie, die wir auf dem Tangentialbündel gleich einführen werden, eine zusätzliche „Nachbarschaftsstruktur“ zwischen den Tangentialräumen.



Zwei Visualisierungen des Tangentialbündels einer Kreislinie. Oben wird zu jedem Punkt P des Kreises der Tangentialraum an den Kreis „tangential“ angelegt und als eindimensionaler affiner Unterraum im umgebenden $\mathbb{R}^2$ realisiert. Diese Einbettung führt zu Überschneidungen, die es im Tangentialbündel aber nicht gibt, da der Basispunkt P mitbedacht werden muss. Unten werden zu jedem Punkt des Kreises die Tangentialräume parallel angeordnet und es ergibt sich ein Zylinder.

Definition 1.9. Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi\colon\, M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Es seien TM und TN die zugehörigen Tangentialbündel. Dann versteht man unter der *Tangentialabbildung*

$$T(\varphi)\colon TM \longrightarrow TN$$

die disjunkte Vereinigung der Tangentialabbildungen in den einzelnen Punkten, also

$$T(\varphi) = \biguplus_{P \in M} T_P(\varphi).$$

Beispiel 1.10. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\alpha\colon U \longrightarrow V$$

eine Karte mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann induziert die Karte eine natürliche Bijektion

$$T\big(\alpha^{-1}\big)\colon TV = V \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TU,\ (Q, v) \longmapsto \big(\alpha^{-1}(Q), [s \mapsto \alpha^{-1}(Q + sv)]\big).$$

Dabei bewegt sich $s \in I$ in einem reellen Intervall derart, dass $Q + sv \in V$ ist (vergleiche Lemma 77.5 (Analysis (Osnabrück 2014-2016))). Da $V \times \mathbb{R}^n$ ein Produkt von topologischen Räumen ist, ist $TV = V \times \mathbb{R}^n$ selbst ein topologischer Raum, und es liegt nahe, diese Topologie auf TU zu übertragen und daraus insgesamt eine Topologie auf dem Tangentialbündel TM zu konstruieren.

Definition 1.11. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und

$$TM = \biguplus_{P \in M} T_P M$$

das Tangentialbündel, versehen mit der Projektionsabbildung

$$\pi\colon TM \longrightarrow M,\ (P, v) \longmapsto P.$$

Das *Tangentialbündel* wird mit derjenigen Topologie versehen, bei der eine Teilmenge $W \subseteq TM$ genau dann offen ist, wenn für jede Karte

$$\alpha\colon U \longrightarrow V$$

die Menge $(T(\alpha))(W \cap \pi^{-1}(U))$ offen in $V \times \mathbb{R}^n$ ist.

Insbesondere ist für jede offene Menge $U \subseteq M$ das Urbild $\pi^{-1}(U) = TU \subseteq TM$ offen, d.h. die Projektion π ist stetig. Mit diesen Festlegungen ist das Tangentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ein reelles Vektorbündel. Wenn

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i$$

eine offene Überdeckung der Mannigfaltigkeit ist, bei der die U_i homöomorph zu offenen Telmengen V_i des $\mathbb{R}^n$ sind, so liefern die Karten

$$\alpha_i\colon U_i \longrightarrow V_i$$

direkt Trivialisierungen

$$TM|_{U_i} = TU_i \stackrel{T(\alpha_i)}{\longrightarrow} TV_i = V_i \times \mathbb{R}^n \, .$$

Erstaunlich viele Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit schlagen sich in Eigenschaften ihres Tangentialbündels nieder. Es ist möglich, dass das Tangentialbündel trivial ist, obwohl M nicht homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

1. Arbeitsblatt

In der folgenden Aufgabe verwenden wir die Schreibweise

$$D(r) \, = \, \big\{ (r,s,t) \in \mathbb{R}^3 \mid r \neq 0 \big\}.$$

Aufgabe 1.1. Bestimme zum Vektorbündel

$$\begin{aligned} L &= \{(r,s,t,u,v,w) \mid ru+sv+tw = 0,\, (r,s,t) \neq (0,0,0)\} \\ &\subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} \times \mathbb{R}^3 \\ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} \end{aligned}$$

lineare Trivialisierungen oberhalb von $D(r)$, $D(s)$ und $D(t)$, also von r,s,t abhängige Basen oberhalb von $D(r)$ u.s.w. Bestimme die Basiswechselabbildungen auf $D(rs) \, = \, D(r) \cap D(s)$.

Aufgabe 1.2. Bestimme zum Vektorbündel

$$\begin{aligned} L &= \{(r,s,t,u,v,w) \mid ru+sv+tw = 0,\, (r,s,t) \neq (0,0,0)\} \\ &\subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} \times \mathbb{R}^3 \\ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} \end{aligned}$$

diejenigen Parameter (r,s,t), für die der Vektor $(3,\,7,\,4)$ zur Faser $L_{(r,s,t)}$ gehört.

Aufgabe 1.3. Zeige, dass in Beispiel 1.2 auf $D(r)$ durch

$$u(r,s,t) \, = \, \frac{t}{r} \begin{pmatrix} s \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{s}{r} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

ein (von den Parametern abhängiger) Vektor im Lösungsraum definiert ist, der auf ganz $\mathbb{R}^3$ polynomial fortsetzbar ist, obwohl die Koeffizientenfunktionen $\frac{t}{r}$ und $-\frac{s}{r}$ nur auf $D(r)$ definiert sind und nicht fortsetzbar sind. Ist $u(r,s,t)$ überall Teil einer Basis?

Aufgabe 1.4. Bestimme in Beispiel 1.3 die Parameter, für die der Lösungsraum $L_{(a,b,c,d,e,f)}$ ein-, zwei- oder dreidimensional ist. Sind diese Mengen offen oder abgeschlossen?

Aufgabe 1.5. Zeige, dass über einem beliebigen Körper K zu linear unabhängigen Vektoren $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ das Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ zusammen mit u und v keine Basis des K^3 bilden müssen.

Aufgabe 1.6. Betrachte den topologischen Raum

$$Y := \left\{ (s,t,u,v) \in \mathbb{R}^4 \mid su + tv = 1 \right\}$$

mit der Projektion

$$p\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = X,\ (s,t,u,v) \longmapsto (s,t).$$

(1) Zeige, dass jede Faser von p homöomorph zu einer reellen Geraden ist.
(2) Zeige, dass durch

$$\varphi(s,t) = (s,t,u(s,t),v(s,t)) = \left(s,t,\frac{s}{s^2+t^2},\frac{t}{s^2+t^2} \right)$$

eine stetige Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ mit

$$p \circ \varphi = \mathrm{Id}_X$$

gegeben ist.
(3) Definiere einen Homöomorphismus zwischen Y und $X \times \mathbb{R}$.
(4) Zeige, dass es keine polynomiale Abbildung $\psi\colon X \to Y$ mit

$$p \circ \psi = \mathrm{Id}_X$$

gibt.

Aufgabe 1.7. Zeige, dass ein reelles Vektorbündel über einem Punkt (also einem einpunktigen topologischen Raum) das gleiche ist wie ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum.

Aufgabe 1.8. Es sei $p\colon V \to X$ ein reelles Vektorbündel über einem topologischen Raum X. Zeige, dass V genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn X ein Hausdorffraum ist.

Aufgabe 1.9. Es sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass man die Identität $\mathrm{Id}_X\colon X \to X$ als ein reelles Vektorbündel vom Rang 0 auffassen kann.

Aufgabe 1.10. Es sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass ein Homomorphismus der (trivialen) Vektorbündel

$$\varphi\colon\ X \times \mathbb{R}^n \longrightarrow X \times \mathbb{R}^m$$

das gleiche ist wie eine $m \times n$-Matrix, der Einträge stetige Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ sind.

Aufgabe 1.11. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Zeige, dass durch das totale Differential in der Form

$$U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m,\ (x, v) \longmapsto (x, (Df)_x\,(v)),$$

ein Homomorphismus des Vektorbündels $U \times \mathbb{R}^n$ in das Vektorbündel $U \times \mathbb{R}^m$ gegeben ist.

Aufgabe 1.12. Zeige, dass es eine Homöomorphie des Tangentialbündels T_{S_1} der 1-Sphäre S^1 mit dem Produkt $S^1 \times \mathbb{R}$ gibt.

Was hat die vorstehende Aufgabe mit Beispiel 1.1 zu tun?

Aufgabe 1.13. Man gebe ein Beispiel einer differenzierbaren Kurve

$$\gamma\colon\ [0, 1[\longrightarrow S^1$$

derart, dass der Grenzwert $\lim_{t \to 1} \gamma(t)$ existiert, dass aber der Grenzwert $\lim_{t \to 1} (\gamma(t), T_t(\gamma)(1))$ in TS^1 nicht existiert.

Aufgabe 1.14. Zeige, dass die Abbildung

$$TS^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ ((a, b), t(-b, a)) \longmapsto (a, b) + t(-b, a),$$

für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ außerhalb der Einheitskreisscheibe zwei Urbildpunkte, auf dem Einheitskreis einen Urbildpunkt und innerhalb der offenen Einheitskreisscheibe keinen Urbildpunkt besitzt. Man interpretiere dies geometrisch.

Aufgabe 1.15. Man gebe ein Beispiel einer injektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N derart, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T(\varphi)\colon\ TM \longrightarrow TN$$

nicht injektiv ist.

Aufgabe 1.16. Man gebe ein Beispiel einer surjektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi\colon\, M \longrightarrow N$$

zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N derart, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T(\varphi)\colon\, TM \longrightarrow TN$$

nicht surjektiv ist.

Aufgabe 1.17. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei $\varphi\colon\, M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T(\varphi)\colon\, TM \longrightarrow TN$$

stetig ist.

2. Vorlesung - Verklebungsdaten

2.1. **Schnitte.**

Definition 2.1. Es seien X und Y topologische Räume und es sei

$$p\colon\, Y \longrightarrow X$$

eine stetige Abbildung. Unter einem *stetigen Schnitt* zu p versteht man eine stetige Abbildung $s\colon\, X \to Y$ mit

$$p \circ s \,=\, \mathrm{Id}_X\,.$$

Man denke bei Y beispielsweise an ein Vektorbündel über X. Einen Schnitt kann es nur geben, wenn p surjektiv ist, was bei einem Vektorbündel stets der Fall ist. Gelegentlich identifiziert man einen Schnitt mit seinem Bild, was problemlos ist, da ein Schnitt stets injektiv ist. Eine besondere Rolle spielt der *Nullschnitt*, der jedem Basispunkt P den Nullpunkt im Vektorraum V_P zuordnet. Für Tangentialbündel haben Schnitte einen eigenen Namen.

Definition 2.2. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung

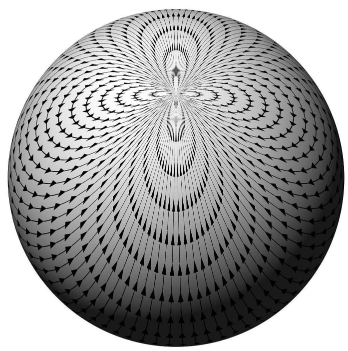
$$F\colon\, M \longrightarrow TM$$

mit der Eigenschaft, dass $F(P) \in T_PM$ für jeden Punkt $P \in M$ ist, heißt (zeitunabhängiges) *Vektorfeld*.

2.2. **Der Satz vom Igel.**

Satz 2.3. *Auf der 2-Sphäre besitzt jedes stetige Vektorfeld $f\colon S^2 \to TS^2$ zumindest eine Nullstelle.*

Insbesondere ist das Tangentialbündel der 2-Sphäre nicht trivial. Es gibt verschiedene Interpretationen für diesen Satz. Beispielsweise besagt er, dass es auf der Erdoberfläche stets einen Punkt gibt, in dem Windstille herrscht (die momentane horizontale Windrichtung ist ein stetiges Vektorfeld), oder, dass man die Stacheln eines Igels nicht alle an den Igel flach anlegen kann.



Bemerkung 2.4. Mit dem Satz vom Igel können wir begründen, dass das Vektorbündel L über $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ aus Beispiel 1.2 keine stetige Trivialisierung besitzt. Zunächst ist $S^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ eine Teilmenge, so dass wir L auf S^2 einschränken können. Wenn L selbst trivial wäre, so wäre auch diese Einschränkung trivial. Die Einschränkung des Bündels L auf die Einheitssphäre ist aber das Tangentialbündel der Einheitssphäre, da die Bedingung

$$ru + sv + tw = 0$$

als Orthogonalitätsrelation aufgefasst werden kann und der (extrinsische) Tangentialraum an einen Ortspunkt (r, s, t) der Sphäre durch diese Orthogonalitätsrelation festgelegt ist. Wenn das Tangentialbündel trivial wäre, so würde es eine stetige Vektorfelder u und v geben, die in jedem Punkt der Sphäre eine Basis des Tangentialraumes bildeten. Der Satz vom Igel sagt aber, dass sogar jedes Vektorfeld eine Nullstelle hat, und 0 kann nicht Teil einer Basis sein.

2.3. **Verklebungsdaten für topologische Räume.**

Ein Vektorbündel $V \to X$ „setzt" sich aus den trivialen Vektorbündeln $V|_{U_i} \to U_i$ zu einer offenen Überdeckung von X zusammen, wobei die genaue Zusammensetzung eben das Vektorbündel ausmacht. Die Art der Zusammensetzung kann man übersichtlich mit Verklebungsdaten beschreiben. Dafür brauchen wir zunächst generell Verklebungsdaten für topologische Räume.

Die grundlegende Fragestellung dahinter ist einfach, was man von einer offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ wissen muss, um den Raum X rekonstruieren zu können. Die kurze Antwort ist, dass man die U_i kennen muss, die Zweierdurchschnitte $U_i \cap U_j$, und zwar sowohl als Teilmenge in U_i als auch in U_j und wie diese zu identifizieren sind, und dann noch eine Kompatibilitätsbedingung für diese Identifizierungen, die auf je drei Teilmengen Bezug nimmt.

Definition 2.5. Unter einem *Verklebungsdatum* für topologische Räume versteht man den folgenden Datensatz.

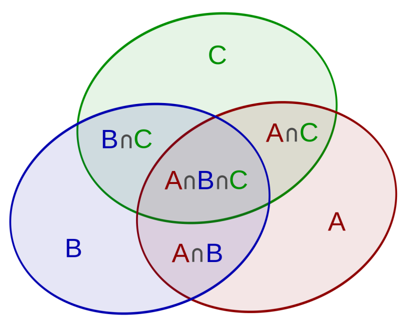
(1) Eine Familie U_i, $i \in I$, von topologischen Räumen.
(2) Für jedes Paar (i,j) eine offene Teilmenge $U_{ij} \subseteq U_i$ (mit $U_{ii} = U_i$).
(3) Für jedes Paar (i,j) einen Homöomorphismus

$$\varphi_{ji} \colon U_{ij} \longrightarrow U_{ji}$$

(mit $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{U_i}$).
(4) Für Indizes $i,j,k \in I$ ist die *Kozykelbedingung*

$$\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$$

als Abbildung von $U_{ik} \cap U_{ij}$ nach U_k erfüllt.



Lemma 2.6. *Es sei ein Verklebungsdatum U_i, $i \in I$, für topologische Räume gegeben. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten topologischen Raum X, eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} V_i$ und Homöomorphismen $\psi_i \colon U_i \to V_i$ derart, dass*

$$\psi_i(U_{ij}) = V_i \cap V_j$$

ist und

$$\psi_i|_{U_{ij}} = \psi_j|_{U_{ji}} \circ \varphi_{ji}$$

gilt.

Beweis. Es sei Y die disjunkte Vereinigung der U_i. Wir definieren auf Y eine Äquivalenzrelation $\sim$, wobei wir Punkte $x_i \in U_i$ und $x_j \in U_j$ als äquivalent ansehen, wenn $x_i \in U_{ij}$, $x_j \in U_{ji}$ und $\varphi_{ji}(x_i) = x_j$ ist. Die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation sind dabei durch die Kozykelbedingung gesichert, siehe Aufgabe 2.14. Wir setzen

$$X := Y/\sim$$

und versehen X mit der Quotiententopologie. Die Verknüpfungen

$$U_i \longrightarrow Y \longrightarrow X$$

sind die ψ_i, und V_i sind die Bilder dieser Abbildungen. Daher liegen Homöomorphismen $\psi_i\colon\ U_i \to V_i$ vor. Dabei ist zu $x \in U_i$

$$\psi_i(x) \in V_j$$

genau dann, wenn $x \in U_{ij}$ ist, da genau in diesem Fall x mit $\varphi_{ij}(x)$ identifiziert wird. Daher ist $\psi_i(U_{ij}) = V_i \cap V_j$. Die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} U_{ij} \arrow[r, "\varphi_{ji}"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & U_{ji} \arrow[d, "\psi_j"] \\ & V_i \cap V_j \end{tikzcd}$$

folgt ebenso. □

Lemma 2.7. *Es sei ein Verklebungsdatum U_i, $i \in I$, für topologische Räume gegeben. Es sei Z ein weiterer topologischer Raum und es seien stetige Abbildungen*

$$\theta_i\colon\ U_i \longrightarrow Z$$

gegeben, die die Bedingung $\theta_i|_{U_{ij}} = \left(\theta_j|_{U_{ji}}\right) \circ \varphi_{ji}$ erfüllen. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung

$$\theta\colon\ X \longrightarrow Z$$

mit $(\psi_i)^{-1} \circ \theta|_{V_i} = \theta_i$, wobei X den durch die Verklebungsdaten festgelegten topologischen Raum (siehe Lemma 2.6, auch für die Notation) bezeichnen.

Beweis. Siehe Aufgabe 2.18. □

2.4. **Verklebungsdaten für Vektorbündel.**

Definition 2.8. Unter einem *Verklebungsdatum* für reelle Vektorbündel über einem topologischen Raum X versteht man den folgenden Datensatz.

(1) Eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

(2) Eine Familie $E_i \to U_i$, $i \in I$, von reellen Vektorbündeln vom Rang r.
(3) Für jedes Paar (i, j) einen Isomorphismus von Vektorbündeln

$$\varphi_{ji}\colon\ E_i|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow E_j|_{U_i \cap U_j}$$

über $U_i \cap U_j$.

(4) Für Indizes $i, j, k \in I$ ist die *Kozykelbedingung*

$$\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$$

als Abbildung von $E_i|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$ nach $E_k|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$ erfüllt.

Bemerkung 2.9. Typischerweise sind in der Definition 2.8 die Vektorbündel aus (2) triviale Vektorbündel auf U_i, also $E_i = \mathbb{R}^r \times U_i$. Die Isomorphismen aus (3) sind dann einfach durch bijektive lineare Abbildungen $\varphi_{ji} \colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ gegeben, die stetig vom Basispunkt aus $U_i \cap U_j$ abhängen. Diese kann man kompakt durch stetige Abbildungen

$$\varphi_{ji} \colon U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$$

in die allgemeine lineare Gruppe beschreiben. Den Basispunkten wird also in stetiger Weise eine invertierbare $r \times r$-Matrix zugeordnet, wobei die Stetigkeit bedeutet, dass sämtliche Matrixeinträge stetige Funktionen sind. Man spricht von einer *Matrixbeschreibung* des Bündels. Die Kozykelbedingung bleibt bestehen.

Lemma 2.10. *Es sei ein Verklebungsdatum E_i, $i \in I$, über einem topologischen Raum*

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

gegeben. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes reelles Vektorbündel $E \to X$ und Isomorphismen $\psi_i \colon E_i \to E|_{U_i}$ derart, dass

$$\psi_i|_{E_i|_{U_i \cap U_j}} = \psi_j|_{E_j|_{U_i \cap U_j}} \circ \varphi_{ji}$$

gilt.

Beweis. Die Existenz eines topologischen Raumes E mit den besagten Eigenschaften ergibt sich aus Lemma 2.6 (zu verkleben sind die offenen Mengen $W_{ij} := E_i|_{U_i \cap U_j}$) und die Existenz der stetigen Abbildung nach X aus Lemma 2.7. Dabei gibt es eine wohldefinierte Vektorraumstruktur auf jeder Faser E_x, die von E_i zu einer beliebigen offenen Umgebung $x \in U_i$ herrührt. Die Unabhängigkeit beruht darauf, dass für $x \in U_i \cap U_j$ nach Voraussetzung ein Vektorbündelisomorphismus

$$\varphi_{ij} \colon E_i|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow E_j|_{U_i \cap U_j}$$

vorliegt, der einen Vektorraumisomorphismus

$$(E_i)_x \longrightarrow (E_j)_x$$

induziert. □

Beispiel 2.11. Wir betrachten auf der eindimensionalen Sphäre

$$S^1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

die offene Überdeckung $S^1 = U \cup V$ mit $U = S^1 \setminus \{(0,1)\}$ und $V = S^1 \setminus \{(0,-1)\}$. Darauf beschreiben wir ein Verklebungdatum für ein reelles

Vektorbündel vom Rang 1. Die beiden offenen Mengen sind homöomorph zur reellen Geraden. Es ist

$$U \cap V = S^1 \setminus \{(0,1),(0,-1)\} = \{(x,y) \in S^1 \mid x \neq 0\},$$

und dies ist nicht zusammenhängend, sondern homöomorph zu zwei disjunkten reellen offenen Halbgeraden (bzw. Geraden). Wir setzen $L = U \times \mathbb{R}$ und $M = V \times \mathbb{R}$. Wir legen einen Isomorphismus

$$\varphi\colon L|_{U\cap V} \longrightarrow M|_{U\cap V}$$

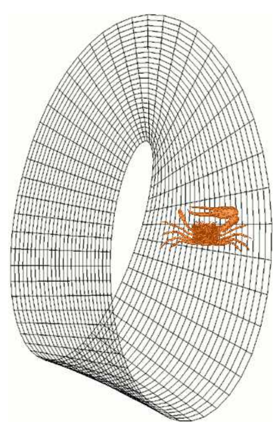
durch

$$\varphi(x,y,t) := \begin{cases} (x,y,t) \text{ für } x > 0\,, \\ (x,y,-t) \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

fest. Man beachte, dass φ stetig ist, da die beiden funktionalen Ausdrücke für zueinander disjunkte offene Teilmengen gelten. Auf der einen Hälfte wird identisch abgebildet, auf der anderen Hälfte wird umgeklappt. Im Sinne von Bemerkung 2.9 liegt die stetige (konstante) Matrixbeschreibung

$$\psi(x,y) := \begin{cases} (1) \text{ für } x > 0\,, \\ (-1) \text{ für } x < 0\,, \end{cases}$$

auf $U \cap V$ vor. Da nur zwei offene Mengen vorliegen, ist die Kozykelbedingung automatisch erfüllt. Dieses Verklebungsdatum definiert nach Lemma 2.10 ein reelles Vektorbündel vom Rang 1 auf der Sphäre, das *Möbiusband* heißt.



Wir geben eine direkte algebraische Realisierung des Möbiusbandes im $\mathbb{R}^4$ an.

Beispiel 2.12. Wir betrachten

$$Y := \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2 = 1,\ (1-y)z = xw,\ xz = (1+y)w\}$$

zusammen mit der natürlichen Projektion auf die eindimensionalen Sphäre

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} = U \cup V$$

mit $U = S^1 \setminus \{(0,1)\}$ und $V = S^1 \setminus \{(0,-1)\}$. Wir behaupten, dass Y ein Vektorbündel vom Rang 1 ist, das isomorph zum Möbiusband ist. Auf U ist $y \neq 1$ und daher kann man die zweite Gleichung nach z auflösen, also

$$z = \frac{x}{1-y} w.$$

Damit ist die dritte Gleichung wegen

$$xz = \frac{x}{1-y} xw = \frac{x^2}{1-y} w = \frac{1-y^2}{1-y} w = (1+y)w$$

automatisch erfüllt. Entsprechend gilt auf V die Beziehung

$$w = \frac{x}{1+y} z$$

und die andere Gleichung ist automatisch erfüllt. Daher ist Y auf U bzw. auf V ein triviales Vektorbündel vom Rang 1 mit der Variablen w bzw. z. Die Übergangsabbildung auf $U \cap V$ ist durch

$$\frac{x}{1-y} = \frac{1+y}{x}$$

gegeben, eine Matrixbeschreibung dieses Bündels ist also $\left(\frac{x}{1-y} \right)$. Diese Matrix hängt, im Gegensatz zur konstanten Matrix aus Beispiel 2.11 explizit von

$$(x,y) \in U \cap V$$

ab. Dennoch sind die beiden Vektorbündel zueinander isomorph. Dazu verwenden wir Aufgabe 2.21 und betrachten die beiden stetigen Funktionen $\sqrt{1-t}$ auf U und $\sqrt{1+t}$ auf V, die beide nullstellenfrei sind.

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+y}} \cdot \frac{x}{1-y} \cdot \sqrt{1-y} &= \frac{1}{\sqrt{1+y}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-y}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{x}{|x|} = \pm 1, \end{aligned}$$

abhängig vom Vorzeichen von x. Daher sind die Bündel isomorph.

2. Arbeitsblatt

Aufgabe 2.1. Zeige, dass ein reelles Geradenbündel $L \to X$ über einem topologischen Raum X genau dann trivial ist, wenn es einen stetigen nullstellenfreien Schnitt besitzt.

Aufgabe 2.2. Es sei $s\colon X \to V$ ein stetiger Schnitt zu einem reellen Vektorbündel $p\colon V \to X$ über einem topologischen Raum X. Zeige, dass das Bild $s(X) \subseteq V$ eine abgeschlossene Teilmenge ist, die homöomorph zu X ist.

Aufgabe 2.3. Es sei $p\colon V \to U$ ein Vektorbündel über $U \subseteq \mathbb{R}^m$, offen, das durch ein lineares Gleichungssystem in n Variablen mit m universellen Parametern gegeben ist, wobei U dadurch gekennzeichnet sei, dass die Dimension der Fasern konstant sei. Zeige, dass ein stetiger Schnitt in V das gleiche ist wie eine stetige universelle Lösung des linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 2.4.*

Man gebe ein stetiges Vektorfeld auf S^2 an, das nur eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 2.5. Zeige, dass die Einschränkung des Vektorbündels aus Beispiel 1.2 auf die offene Teilmenge

$$D(r) \cup D(s) = \{(r,s,t) \mid r \neq 0 \text{ oder } s \neq 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine Trivialisierung besitzt.

Aufgabe 2.6. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X. Inwiefern wird dadurch ein topologisches Verklebungsdatum gegeben? Lässt sich aus dem Verklebungsdatum der topologische Raum X rekonstruieren?

Aufgabe 2.7. Man mache sich klar, wodurch ein Verklebungsdatum mit zwei offenen Mengen gegeben ist.

Aufgabe 2.8. Man mache sich klar, wodurch ein Verklebungsdatum mit drei offenen Mengen gegeben ist.

Aufgabe 2.9. Es sei U und V jeweils eine reelle Gerade, und diese werden entlang der offenen Halbgeraden $\mathbb{R}_+ \subseteq U$ und $\mathbb{R}_+ \subseteq V$ verklebt. Ist der entstehende Raum Hausdorffsch?

Aufgabe 2.10. Es sei U und V jeweils eine reelle Gerade, und diese werden entlang der punktierten Geraden $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq U$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq V$ miteinander verklebt. Ist der entstehende Raum Hausdorffsch?

Aufgabe 2.11. Wir betrachten den topologischen Raum

$$X = \mathbb{R} \cup \{0'\},$$

der aus den reellen Zahlen entsteht, indem man ein neues Element $0'$ hinzunimmt, und die folgenden zwei Arten von Teilmengen für offen erklärt: Die Mengen $U \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $0 \notin U$ und die Mengen $V \cup \{0'\}$ für $V \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $0 \in V$. Zeige, dass X ein topologischer Raum ist. Ist der Punkt 0 in diesem Raum abgeschlossen? Ist der Punkt $0'$ in diesem Raum abgeschlossen? Wie verhält sich dieser Raum zu dem in Aufgabe 2.10 konstruierten Raum?

Aufgabe 2.12. Es sei U und V jeweils eine reelle Gerade, und diese werden entlang der punktierten Geraden $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq U$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq V$ mit Hilfe der inversen Abbildung $t \mapsto t^{-1}$ verklebt. Welcher topologische Raum entsteht dabei?

Aufgabe 2.13. Es sei U und V jeweils eine komplexe Gerade $\mathbb{C}$ (also die Gaußsche Zahlenebene) und diese werden entlang der gelochten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subseteq U$ und $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subseteq V$ mit Hilfe der inversen Abbildung $z \mapsto z^{-1}$ verklebt. Welcher topologische Raum entsteht dabei?

Aufgabe 2.14. Zeige, dass im Beweis zu Lemma 2.6 in der Tat eine Äquivalenzrelation vorliegt.

Aufgabe 2.15. Es sei ein Verklebungsdatum U_i $i \in I$, mit $U_{ij} = \emptyset$ für alle $i \neq j$ gegeben. Welchen topologischen Raum legt dieses Verklebungsdatum fest?

Aufgabe 2.16. Wir betrachten den Zylinder

$$U = V = S^1 \times]0, 3[.$$

Auf den offenen Teilmengen $S^1 \times]0, 1[$ bzw. $S^1 \times]2, 3[$ (in U bzw. in V) betrachten wir die Homöomorphismen, die sich aus der Identität auf dem Kreis bzw. der Punktspiegelung einerseits und der Identität auf dem Intervall bzw. der Spiegelung in der Intervallmitte andererseits ergibt. Welche geometrischen Objekte ergeben sich durch diese verschiedenen Verklebungsdaten?

Aufgabe 2.17. Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und

$$\alpha_i\colon\ U_i \longrightarrow V_i$$

eine Familie von Karten mit den Übergangsabbildungen

$$\varphi_{ij} = \alpha_j \circ (\alpha_i)^{-1}\colon\ V_i \cap \alpha_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow V_j \cap \alpha_j(U_i \cap U_j).$$

Zeige, dass man aus der Familie der V_i, $i \in I$, den Teilmengen $V_{ij} \subseteq V_i$ und den Übergangsabbildungen

$$\varphi_{ij}\colon\ V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$$

die Mannigfaltigkeit M rekonstruieren kann.

a) Betrachte auf

$$N := \biguplus_{i \in I} V_i$$

die Äquivalenzrelation, unter der zwei Punkte $P \in V_i$ und $Q \in V_j$ gleich sind, wenn sie unter φ_{ij} ineinander abgebildet werden.

b) Versehe die Quotientenmenge $N/\sim$ mit einer geeigneten Topologie.

c) Definiere auf $N/\sim$ Karten.

d) Zeige, dass M und $N/\sim$ homöomorph sind.

Aufgabe 2.18. Es sei ein Verklebungsdatum U_i, $i \in I$, für topologische Räume gegeben. Es sei Z ein weiterer topologischer Raum und es seien stetige Abbildungen

$$\theta_i\colon\ U_i \longrightarrow Z$$

gegeben, die die Bedingung $\theta_i|_{U_{ij}} = \left(\theta_j|_{U_{ji}}\right) \circ \varphi_{ji}$ erfüllen. Zeige, dass es dann eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung

$$\theta\colon\ X \longrightarrow Z$$

mit $(\psi_i)^{-1} \circ \theta|_{V_i} = \theta_i$ gibt, wobei X den durch die Verklebungsdaten festgelegten topologischen Raum (siehe Lemma 2.6, auch für die Notation) bezeichnet.

Aufgabe 2.19. Zeige, dass ein Verklebungsdatum für ein Geradenbündel zu einer offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ das gleiche ist wie eine Familie von stetigen nullstellenfreien Funktionen $f_{ij}\colon\ U_i \cap U_j \to \mathbb{R}$, die auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ jeweils die Bedingung $f_{ki} = f_{kj} \cdot f_{ji}$ erfüllen.

Aufgabe 2.20. Bestimme Verklebungsdaten für das Vektorbündel aus Beispiel 1.2.

Aufgabe 2.21. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X. Es seien

$$\varphi_{ij} \colon U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$$

und

$$\psi_{ij} \colon U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$$

Matrixbeschreibungen, die zu den Vektorbündeln E bzw. F führen. Zeige, dass diese Bündel genau dann isomorph sind, wenn es stetige Abbildungen

$$\alpha_i \colon U_i \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$$

derart gibt, dass (für sinnvolle Einschränkungen)

$$\alpha_i \circ \varphi_{ij} \circ \alpha_j^{-1} = \psi_{ij}$$

für alle i, j gilt.

Aufgabe 2.22. Ein Vektorbündel $V \to X$ über einem topologischen Raum X sei durch stetige Matrizenabbildungen

$$\varphi_{ij} \colon U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$$

zu einer offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ gegeben. Zeige, dass ein stetiger Schnitt

$$s \colon X \longrightarrow V$$

dasselbe ist wie eine Familie von stetigen Abbildungen $t_i \colon U_i \to \mathbb{R}^m$, die die Bedingungen

$$t_j = \varphi_{ij} t_i$$

für alle ij erfüllt.

Aufgabe 2.23. Wir betrachten die algebraische Realisierung des Möbiusbandes aus Beispiel 2.12, also

$$Y = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1,\, (1-y)z = xw,\, xz = (1+y)w \right\} \to S^1.$$

Zeige, dass das Bild der stetigen Abbildung

$$\psi \colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^4,\, t \longmapsto \left(\cos t,\, \sin t,\, \cos \frac{t}{2},\, \sin \frac{t}{2} \right),$$

in Y landet, dass $p \circ \psi$ die trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises ist und dass das Bild von ψ niemals den Nullschnitt trifft.

Die folgende Aussage lässt sich für die abgeschlossene Version des Möbiusbandes einfach mit der Schere bestätigen.

Aufgabe 2.24. Folgere aus Aufgabe 2.23, dass das Komplement des Nullschnittes im Möbiusband wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 2.25. Zeige, dass das Komplement des Nullschnittes in einem trivialen Geradenbündel nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 2.26. Man nehme ein schmales rechteckiges Band, verdrehe es mit einer Volldrehung um die längere Achse und verklebe die beiden kürzeren Ränder. Nun schneide man mit einer Schere das Band längs in der Mitte durch. Ist das entstehende Objekt zusammenhängend? Wie sieht es aus, wenn man n Halbdrehungen macht?

Aufgabe 2.27. Bestimme den Grenzwert der Funktion $\frac{1-y}{x} = \frac{x}{1+y}$ auf dem Einheitskreis für $(x, y) \to (0, 1)$. Man betrachte dazu auch die trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises.

3. Vorlesung - Prägarben

3.1. **Lineare Konstruktionen von Vektorbündeln.**

Für Vektorräume gibt es eine Vielzahl von Konstruktionen wie die direkte Summe, das Tensorprodukt, den Dualraum. Wir wollen für Vektorbündel entsprechende Konstruktionen einführen, die faserweise mit den Konstruktionen aus der linearen Algebra übereinstimmen, aber auch die Abhängigkeit der Fasern von der Basis mitberücksichtigen. Wir werden dabei mit Verklebungsdaten für Vektorbündel arbeiten und die Tatsache heranziehen, dass es zu zwei Vektorbündeln auf einem topologischen Raum X stets eine (hinreichende feine) offene Überdeckung von X gibt, bezüglich der beide Bündel Trivialisierungen besitzen. Insbesondere kann man sich auf den Fall zurückziehen, wo beide Bündel durch Matrixbeschreibungen gegeben sind. Die Konstruktionen spielen sich dann auf der Ebene von Matrixmanipulationen ab.

Definition 3.1. Zu reellen Vektorbündeln E und F auf einem topologischen Raum X mit Trivialisierungen

$$\alpha_i \colon E|_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^m$$

und

$$\beta_i \colon F|_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$$

nennt man das Vektorbündel zum Verklebungsdatum

$$G_i = U_i \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

und

$$\varphi_{ij} \colon G_i|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow G_j|_{U_i \cap U_j}$$

mit

$$\varphi_{ij}(x, v, w) := \left(x,\, \alpha_j(\alpha_i^{-1}(x, v)),\, \beta_j(\beta_i^{-1}(x, w))\right)$$

die *direkte Summe* der Vektorbündel E und F. Es wird mit $E \oplus F$ bezeichnet.

Wenn E durch die Matrixbeschreibung

$$\varphi_{ij} \colon\ U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$$

und F durch die Matrixbeschreibung

$$\psi_{ij} \colon\ U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),$$

so erhält man die Matrixbeschriebung von $E \oplus F$, indem man die beiden Matrizen diagonal zu einer $(m+n) \times (m+n)$-Matrix zusammensetzt und mit Nullen auffüllt.

Definition 3.2. Zu reellen Vektorbündeln E und F auf einem topologischen Raum X mit Trivialisierungen

$$\alpha_i \colon\ E|_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^m$$

und

$$\beta_i \colon\ F|_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$$

nennt man das Vektorbündel zum Verklebungsdatum

$$G_i \,=\, U_i \times (\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n)$$

und

$$\varphi_{ij} \colon\ G_i|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow G_j|_{U_i \cap U_j}$$

mit

$$\varphi_{ij} \,:=\, \left(\alpha_j \circ \alpha_i^{-1}\right) \otimes \left(\beta_j \circ \beta_i^{-1}\right)$$

(dabei wird für jeden Basispunkt das Tensorprodukt der linearen Abbildungen genommen) das *Tensorprodukt* der Vektorbündel E und F. Es wird mit $E \otimes F$ bezeichnet.

Bei gegebenen Matrixbeschreibungen erhält man die Matrixbeschreibung des Tensorproduktes durch das sogenannte Kroneckerprodukt. Dabei wird jeder Eintrag der einen Matrix mit jedem Eintrag der anderen Matrix multipliziert.

Definition 3.3. Zu einem reellen Vektorbündel E vom Rang m auf einem topologischen Raum X mit Trivialisierungen

$$\alpha_i \colon\ E|_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^m$$

und $r \in \mathbb{N}$ nennt man das Vektorbündel zum Verklebungsdatum

$$G_i \,=\, U_i \times \left(\bigwedge^r \mathbb{R}^m\right)$$

und

$$\varphi_{ij} \colon\ G_i|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow G_j|_{U_i \cap U_j}$$

mit

$$\varphi_{ij} \,:=\, \bigwedge^r \left(\alpha_j \circ \alpha_i^{-1}\right)$$

(dabei wird für jeden Basispunkt das r-te äußere Produkt der linearen Abbildungen genommen) das r-te *äußere Produkt* des Vektorbündels E. Es wird mit $\bigwedge^r E$ bezeichnet.

Bei einer gegebenen Matrixbeschreibung von E erhält man die Matrixbeschreibung des r-ten äußeren Produktes, indem man sämtliche Determinanten der $r \times r$-Untermatrizen zu einer Matrix zusammenfasst.

Definition 3.4. Zu einem reellen Vektorbündel E vom Rang m auf einem topologischen Raum X nennt man das m-te äußere Produkt $\bigwedge^m E$ das *Determinantenbündel* von E. Es wird mit $\det E$ bezeichnet.

Das Determinantenbündel ist ein Geradenbündel. Die Matrixbeschreibung ist durch die Determinante gegeben.

Definition 3.5. Zu reellen Vektorbündeln E und F auf einem topologischen Raum X mit Trivialisierungen

$$\alpha_i \colon E|_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^m$$

und

$$\beta_i \colon F|_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$$

nennt man das Vektorbündel zum Verklebungsdatum

$$G_i = U_i \times \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right)$$

und

$$\varphi_{ij} \colon G_i|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow G_j|_{U_i \cap U_j}$$

mit

$$\varphi_{ij}(\theta) := \left(\beta_j \circ \beta_i^{-1}\right) \circ \theta \circ \left(\alpha_i \circ \alpha_j^{-1}\right)$$

die *Homomorphismenbündel* der Vektorbündel E und F. Es wird mit $\operatorname{Hom}(E, F)$ bezeichnet.

Definition 3.6. Zu einem reellen Vektorbündel E auf einem topologischen Raum X nennt man das Homomorphismenbündel $\operatorname{Hom}(E, X \times \mathbb{R})$ das *duale Bündel* von E. Es wird mit E^* bezeichnet.

Auf einer Mannigfaltigkeit ist das duale Bündel zum Tangentialbündel das sogenannte *Kotangentialbündel*.

3.2. **Prägarben.**

Definition 3.7. Es sei X ein topologischer Raum. Unter einer *Prägarbe* $\mathcal{F}$ auf X versteht man eine Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \subseteq X$ eine Menge $\mathcal{F}(U)$ und zu je zwei offenen Mengen $U \subseteq V$ eine Abbildung

$$\rho_{V,U} \colon \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

zuordnet, wobei diese Zuordnung die beiden folgenden Bedingungen erfüllen muss.

(1) Zu $U = V$ ist
$$\rho_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}\,.$$
(2) Zu offenen Mengen
$$U \subseteq V \subseteq W$$
ist stets
$$\rho_{W,U} = \rho_{V,U} \circ \rho_{W,V}\,.$$

Die Abbildungen $\rho_{V,U}$ heißen dabei *Restriktionsabbildungen*. Die Mengen $\mathcal{F}(U)$ nennt man auch die Auswertung der Prägarbe an der offenen Menge U.

Grundbeispiele für Prägarben (und Garben) sind die folgenden Konstruktionen.

Beispiel 3.8. Es seien X und Z topologische Räume. Jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ kann man die Menge der auf U definierten stetigen Abbildungen nach Z zuordnen, also
$$C^0(U,Z) = \{\varphi : U \to Z \mid \varphi \text{ stetig}\}.$$
Da man eine stetige Abbildung $\varphi\colon U \to Z$ auf jede offene Teilmenge $V \subseteq U$ einschränken kann und da man zu $U \subseteq V \subseteq W$ die Einschränkung von W auf U in einem Schritt oder in zwei Schritten machen kann, erhält man eine Prägarbe.

Ein Spezialfall hiervon wird im folgenden Beispiel formuliert, in dem eine zusätzliche Struktur, nämlich ein *beringter Raum* vorliegt.

Beispiel 3.9. Es sei X ein topologischer Raum. Jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ kann man die Menge der auf U definierten reellwertigen stetigen Funktionen zuordnen, also
$$\mathcal{C}(U) = C^0(U,\mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}.$$
Da man eine stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf jede offene Teilmenge $V \subseteq U$ einschränken kann, erhält man eine Prägarbe.

Beispiel 3.10. Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ kann man die Menge der auf U definierten reellwertigen differenzierbaren Funktionen zuordnen, also
$$\mathcal{C}(U) = C^1(U,\mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig differenzierbar}\}.$$
Da man eine differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf jede offene Teilmenge $V \subseteq U$ einschränken kann, erhält man eine Prägarbe.

Beispiel 3.11. Auf einem topologischen Raum X und zu einer fixierten Menge M ist die Zuordung, die jeder offenen Menge $U \subseteq X$ die Menge M und jeder Inklusion die Identität auf M zuordnet, eine Prägarbe, die die *konstante Prägarbe* heißt.

Im folgenden Beispiel denke man an ein Vektorbündel über der Basis X.

Beispiel 3.12. Es seien X und Y topologische Räume und es sei

$$p\colon\, Y \longrightarrow X$$

eine fixierte stetige Abbildung. Diese Situation induziert für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ eine stetige Abbildung

$$Y|_U = p^{-1}(U) \longrightarrow U.$$

Somit kann man zu U die Menge der auf U definierten stetigen Schnitte zu $p^{-1}(U) \to U$ zuordnen, also

$$S(U,Y) \;=\; \big\{ s : U \to p^{-1}(U) \mid s \text{ stetiger Schnitt zu } p \big\}.$$

Da man einen stetigen Schnitt auf jede offene Teilmenge $V \subseteq U$ einschränken kann, wobei der Bildbereich entsprechend auf $p^{-1}(V)$ eingeschränkt wird, erhält man eine Prägarbe.

Aufgrund dieses wichtigen Beispiels nennt man ein Element $s \in \mathcal{F}(U)$ auch einen *Schnitt* der Prägarbe $\mathcal{F}$ über U. Für die Einschränkung eines Schnittes auf eine kleinere offene Menge $V \subseteq U$ schreibt man auch suggestiver

$$s|_V \;=\; \rho_{U,V}(s).$$

Definition 3.13. Zu einer Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt eine Prägarbe $\mathcal{G}$ eine *Unterprägarbe* von $\mathcal{F}$, wenn $\mathcal{G}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist.

Da differenzierbare Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit insbesondere stetig sind, bildet die Prägarbe der differenzierbaren Funktionen eine Untergarbe der Prägarbe der stetigen reellwertigen Funktionen.

3.3. **Prägarben mit Strukturen.**

Definition 3.14. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt *Prägarbe von Gruppen*, wenn zu jeder offenen Menge $U \subseteq X$ die Menge $\mathcal{F}(U)$ eine Gruppe und zu jeder Inklusion $U \subseteq V$ die Restriktionsabbildung

$$\rho_{V,U}\colon\, \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Definition 3.15. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt *Prägarbe von kommutativen Ringen*, wenn zu jeder offenen Menge $U \subseteq X$ die Menge $\mathcal{F}(U)$ ein kommutativer Ring und zu jeder Inklusion $U \subseteq V$ die Restriktionsabbildung

$$\rho_{V,U}\colon\, \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

ein Ringhomomorphismus ist.

Bemerkung 3.16. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ kann man als einen kontravarianten Funktor

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{MEN}$$

auffassen, wobei $\mathcal{T}$ im Sinne von Beispiel Anhang 1.11 als Kategorie aufgefasst wird. Eine Prägarbe von kommutativen Gruppen ist entsprechend ein kontravarianter Funktor in die Kategorie der kommutativen Gruppen, eine Prägarbe von kommutativen Ringen ist ein kontravarianter Funktor in die Kategorie der kommutativen Ringe, u.s.w.

Definition 3.17. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G, die zugleich ein topologischer Raum ist derart, dass die Verknüpfung

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g, h) \longmapsto g \circ h,$$

und die Inversenbildung

$$G \longrightarrow G,\ g \longmapsto g^{-1},$$

stetige Abbildungen sind.

Topologische Gruppen sind $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, (S^1, mit der Winkeladdition), die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Man kann jede Gruppe mit der diskreten Topologie zu einer topologischen Gruppe machen.

Zu einem topologischen Raum X ist die Mengen der stetigen Abbildungen von X in eine topologische Gruppe G mit der natürlichen Verknüpfung selbst eine Gruppe. Die Einschränkung auf eine offene Teilmenge von X ist dabei ein Gruppenhomomorphismus. Daher ist die Zuordnung

$$U \mapsto C^0(U, G)$$

eine Prägarbe von Gruppen auf X.

3.4. **Halme von Prägarben.**

Eine grundliegende Idee von Vektorbündeln und Prägarben ist, lokale und globale Eigenschaften von geometrischen Objekten sinnvoll zu trennen und ihr Wechselspiel zu verstehen. Eine lokale Eigenschaft ist beispielsweise eine, die auf „kleinen“ offenen Mengen gilt. Oft möchte man aber kleine offene Mengen durch noch kleinere offene Mengen ersetzen, insbesondere, um das Verhalten in einer beliebig kleinen Umgebung eines Punktes verstehen zu können. Dafür führen wir die folgenden Konzepte ein.

Definition 3.18. Sei X ein topologischer Raum. Ein System F aus offenen Teilmengen von X heißt *Filter*, wenn folgende Eigenschaften gelten (U, V seien offen).

(1) $X \in F$.
(2) Mit $U \in F$ und $U \subseteq V$ ist auch $V \in F$.
(3) Mit $U \in F$ und $V \in F$ ist auch $U \cap V \in F$.

Die wichtigsten Filter sind für und die Umgebungsfilter zu einer Punkt, der aus allen offenen Mengen eines fixierten Punktes besteht.

Definition 3.19. Eine geordnete Menge $(I, \preccurlyeq)$ heißt *gerichtet geordnet* oder *gerichtet*, wenn es zu jedem $i, j \in I$ ein $k \in I$ gibt mit $i, j \preccurlyeq k$.

Wir fassen einen topologischen Filter als eine durch die Inklusion geordnete Menge auf. Aus der Durchschnittseigenschaft eines Filters ergibt sich, dass eine gerichtete Menge vorliegt (Es ist dabei „$\preccurlyeq = \supseteq$“).

Definition 3.20. Sei $(I, \preccurlyeq)$ eine geordnete Indexmenge. Eine Familie

$$M_i,\ i \in I\,,$$

von Mengen nennt man ein *geordnetes System von Mengen*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Zu $i \preccurlyeq j$ gibt es eine Abbildung $\varphi_{ij} \colon M_i \to M_j$.
(2) Zu $i \preccurlyeq j$ und $j \preccurlyeq k$ ist $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$.

Ist die Indexmenge zusätzlich gerichtet, so spricht man von einem *gerichteten System von Mengen*.

Wenn die beteiligten Mengen M_i allesamt Gruppen (Ringe) sind und alle Abbildungen zwischen ihnen Gruppenhomorphismen (Ringhomomorphismen), so spricht man von einem geordneten bzw. gerichteten System von Gruppen (Ringen).

Definition 3.21. Es sei M_i, $i \in I$, ein gerichtetes System von Mengen. Dann nennt man

$$\operatorname{colim}_{\,i \in I} M_i = \uplus_{i \in I} M_i / \sim$$

den *Kolimes* (oder *induktiven Limes*) des Systems. Dabei bezeichnet $\sim$ die Äquivalenzrelation, bei der zwei Elemente $m \in M_i$ und $n \in M_j$ als äquivalent erklärt werden, wenn es ein $k \in I$ mit $i, j \preccurlyeq k$ und mit

$$\varphi_{ik}(m) = \varphi_{jk}(n)$$

gibt.

Bei dieser Definition ist insbesondere ein Element $s_i \in M_i$ äquivalent zu seinem Bild $\varphi_{ik}(s_i) \in M_k$ für alle $i \preccurlyeq k$. Wenn ein gerichtetes System von Gruppen (Ringen) vorliegt, so kann man auf dem soeben eingeführten Kolimes der Mengen auch eine Gruppenstruktur (Ringstruktur) definieren. Dies beruht darauf, dass zwei Elemente in diesem Kolimes, die durch $s_i \in M_i$ und $s_j \in M_j$ repräsentiert seien, mit ihren Bildern in M_k $(i, j \preccurlyeq k)$ identifiziert werden können. Dann kann man dort die Gruppenverknüpfung erklären, siehe Aufgabe 3.13. Unser Hauptbeispiel für ein gerichtetes System ist das durch einen topologischen Filter gerichtete System zu einer Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X, also das System

$$\mathcal{F}(U), U \in F.$$

Definition 3.22. Zu einer Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X und einem Punkt $P \in X$ nennt man

$$\mathcal{F}_P := \operatorname{colim}_{P \in U} \Gamma(U, \mathcal{F})$$

den *Halm* der Prägarbe im Punkt P.

Insbesondere gibt es zu jedem Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ und jedem Punkt $P \in U$ ein eindeutig definiertes Element $s_P \in \mathcal{F}_P$, das der Keim von s im Punkt P heißt. Die Abbildung

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_P,\ s \longmapsto s_P,$$

heißt *Restriktionsabbildung* und wird mit $\rho_{U,P}$ bezeichnet. Zu $P \in V \subseteq U$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{U,V}} & \mathcal{F}(V) \\ & \rho_{U,P} \searrow & \downarrow \rho_{V,P} \\ & & \mathcal{F}_P \quad . \end{array}$$

Etwas allgemeiner ist die folgende Definition.

Definition 3.23. Zu einer Prägarbe $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum X und einem topologischen Filter F nennt man

$$\mathcal{G}_F := \operatorname{colim}_{U \in F} \Gamma(U, \mathcal{G})$$

den *Halm* der Prägarbe im Filter F.

3.5. **Homomorphismen von Prägarben.**

Definition 3.24. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben auf einem topologischen Raum X. Ein *Homomorphismus von Prägarben*

$$\varphi\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

ist eine Familie von Abbildungen

$$\varphi_U\colon \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

für jede offene Menge $U \subseteq X$ derart, dass zu jeder offenen Inklusion $U \subseteq V$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{U,V} \downarrow & & \downarrow \rho_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

kommutiert.

Definition 3.25. Ein Homomorphismus von Prägarben $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ auf X heißt *Isomorphismus*, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ eine Bijektion $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ vorliegt

Lemma 3.26. *Es sei X ein topologischer Raum und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ Prägarben auf X. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Identität*

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

ist ein Homomorphismus von Prägarben.

(2) *Wenn $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ Homomorphismen von Prägarben sind, so ist auch die Verknüpfung $\psi \circ \varphi$ ein Homomorphismus von Prägarben.*

(3) *Zu einer Unterprägarbe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ist die natürliche Inklusion ein Homomorphismus von Prägraben.*

Beweis. Siehe Aufgabe 3.17. □

Lemma 3.27. *Ein Morphismus von Prägarben*

$$\varphi\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

auf einem topologischen Raum X definiert für jeden Punkt $P \in X$ eine Abbildung

$$\varphi_P\colon \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P$$

zwischen den Halmen, die mit den Restriktionsabbildungen verträglich sind. Das heißt, dass zu $P \in U$ die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \stackrel{\varphi_U}{\longrightarrow} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{U,P} \downarrow & & \downarrow \rho_{U,P} \\ \mathcal{F}_P & \stackrel{\varphi_P}{\longrightarrow} & \mathcal{G}_P \end{array}$$

kommutativ sind.

Beweis. Sei $s \in \mathcal{F}_P$. Das bedeutet, dass es eine offene Umgebung U, $P \in U \subseteq X$, und ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U,P}(s) = s_P$ gibt. Wir setzen

$$\varphi_P(s) := \rho_{U,P}(\varphi_U(s))$$

an und müssen zeigen, dass dies wohldefiniert, also unabhängig vom gewählten Repräsentanten s (und U) ist. Sei $t \in \mathcal{F}(V)$ ein weiterer Repräsentant. Wegen $s_P = t_P$ gibt es eine offene Umgebung

$$P \in W \subseteq U \cap V$$

mit $s|_W = t|_W$. Somit ist

$$\varphi_U(s)|_W = \varphi_W(s|_W) = \varphi_W(t|_W) = \varphi_V(t)|_W$$

und somit ist erst recht

$$\rho_{U,P}(\varphi_U(s)) = \rho_{V,P}(\varphi_V(t)).$$

□

3. Arbeitsblatt

Das *Kroneckerprodukt* zu Matrizen

$$A = (a_{ij})_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n}$$

und

$$B = (b_{k\ell})_{1 \le \ell \le p,\, 1 \le k \le r}$$

ist durch

$$(a_{ij} \cdot b_{k\ell})_{1 \le i \le m,\, 1 \le \ell \le p;\, 1 \le j \le n,\, 1 \le k \le r}$$

gegeben.

Aufgabe 3.1. Berechne das Kroneckerprodukt der beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \text{und} \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.2. Es sei K ein Körper und

$$A = (a_{ij})_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n}$$

und

$$B = (b_{k\ell})_{1 \le \ell \le p,\, 1 \le k \le r}$$

Matrizen mit den zugehörigen linearen Abbildungen $A\colon K^n \to K^m$ bzw. $B\colon K^r \to K^p$. Zeige, dass das Tensorprodukt dieser linearen Abbildungen bezüglich der Basen $e_j \otimes e_k$, $1 \le j \le n$, $1 \le k \le r$, von $K^n \otimes K^r$ und $e_i \otimes e_\ell$, $1 \le i \le m$, $1 \le \ell \le p$, von $K^m \otimes K^p$ durch das Kroneckerprodukt von A und B beschrieben wird.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass das Tensorprodukt des Möbiusbandes mit sich selbst ein triviales Geradenbündel ist.

Aufgabe 3.4. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben auf dem topologischen Raum X. Zeige, dass durch $U \mapsto \mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U)$ mit den natürlichen Produktabbildungen eine Prägarbe auf X gegeben ist.

Aufgabe 3.5. Es sei I eine Indexmenge und sei $\mathcal{F}_i$, $i \in I$, eine Familie von Prägarben auf dem topologischen Raum X. Zeige, dass durch $U \mapsto \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$ mit den natürlichen Produktabbildungen eine Prägarbe auf X gegeben ist.

Aufgabe 3.6. Interpretiere Beispiel 3.8 im Sinne von Beispiel 3.12.

Aufgabe 3.7. Es sei $p\colon V \to X$ ein reelles Vektorbündel vom Rang m auf einem topologischen Raum X. Zeige, dass zu jeder offenen Menge $U \subseteq X$, auf der V trivial ist, die zugehörige Prägarbe der stetigen Schnitte isomorph (in welchem Sinn?) zu $C^0(U, \mathbb{R})^m$ ist.

Aufgabe 3.8. Zeige, dass die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, (S^1, mit der Winkeladdition), die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ topologische Gruppen sind.

Aufgabe 3.9. Es sei G eine topologische Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeige, dass auf jedem topologischen Raum X die Prägarbe $C^0(-, H)$ eine Unterprägarbe von $C^0(-, G)$ ist.

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G, die zugleich eine Gruppe ist, für die die Inversenabbildung und die Gruppenverknüpfung differenzierbare Abbildungen sind, heißt (reelle) *Lie-Gruppe*.

Aufgabe 3.10. Zeige, dass die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, (S^1, mit der Winkeladdition), die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ Lie-Gruppen sind.

Aufgabe 3.11. Zeige, dass das Tangentialbündel auf einer Lie-Gruppe trivial ist.

Tipp: Zeige, dass man den Tangentialraum am neutralen Element in sinnvoller Weise in die anderen Tangentialräume transportieren kann.

Aufgabe 3.12. Sei I eine gerichtete Indexmenge und sei M_i, $i \in I$, ein gerichtetes System von Mengen. Es sei N eine weitere Menge und zu jedem $i \in I$ sei eine Abbildung

$$\psi_i\colon\ M_i \longrightarrow N$$

mit der Eigenschaft gegeben, dass $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ ist für alle $i \preccurlyeq j$ (wobei φ_{ij} die Abbildungen des Systems bezeichnen). Beweise die universelle Eigenschaft des Kolimes, nämlich, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\psi\colon\ \operatorname{colim}_{i \in I} M_i \longrightarrow N$$

derart gibt, dass $\psi_i = \psi \circ j_i$ ist, wobei $j_i : M_i \to \operatorname{colim}_{i \in I} M_i$ die natürlichen Abbildungen sind.

Zeige ferner, dass falls M_i eine gerichtetes System von Gruppen und falls N ebenfalls eine Gruppe ist und alle ψ_i Gruppenhomomorphismen sind, dass dann auch ψ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 3.13. Sei I eine gerichtete Indexmenge und sei G_i, $i \in I$, ein gerichtetes System von kommutativen Gruppen. Zeige, dass der Kolimes eine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 3.14. Sei R ein kommutativer Ring und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Auf S betrachten wir folgende (partielle) Ordnung, und zwar sagen wir $f \preccurlyeq g$, falls f eine Potenz von g teilt. Zeige, dass die kommutativen Ringe

$$R_f,\, f \in S\,,$$

ein gerichtetes System bilden, und dass für den Kolimes

$$\operatorname{colim}_{f \in S} R_f \, = \, R_S$$

gilt.

Aufgabe 3.15. Zeige, dass der Halm des Tangentialbündels einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit in einem Punkt nur von der Dimension der Mannigfaltigkeit (in diesem Punkt) abhängt.

Aufgabe 3.16. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben auf dem topologischen Raum X und $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ ihre Produktprägarbe. Zeige, dass für den Halm in jeden Punkt $P \in X$ die Beziehung

$$(\mathcal{F} \times \mathcal{G})_P \, = \, \mathcal{F}_P \times \mathcal{G}_P$$

gilt.

Aufgabe 3.17. Es sei X ein topologischer Raum und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ Prägarben auf X. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Identität

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

ist ein Homomorphismus von Prägarben.

(2) Wenn $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und $\psi \colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ Homomorphismen von Prägarben sind, so ist auch die Verknüpfung $\psi \circ \varphi$ ein Homomorphismus von Prägarben.

(3) Zu einer Unterprägarbe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ist die natürliche Inklusion ein Homomorphismus von Prägraben.

Aufgabe 3.18. Es sei I eine Indexmenge und sei $\mathcal{F}_i$, $i \in I$, eine Familie von Prägarben auf dem topologischen Raum X mit der Produktprägarbe $\prod_{i\in I} \mathcal{F}_i$. Es sei $\mathcal{G}$ eine weitere Prägarbe auf X. Zeige, dass ein Prägarbenmorphismus

$$\psi\colon \mathcal{G} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}_i$$

das gleiche ist wie eine Familie von Prägarbenmorphismen

$$\psi_i\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}_i.$$

4. Vorlesung - Garben

4.1. **Garben.**

Definition 4.1. Es sei X ein topologischer Raum. Unter einer *Garbe* $\mathcal{F}$ auf X versteht man eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X, die die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(1) Zu jeder offenen Überdeckung $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ und Elementen $s, t \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U,U_i}(s) = \rho_{U,U_i}(t)$ für alle $i \in I$ gilt $s = t$.
(2) Zu jeder offenen Überdeckung $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ und Elementen $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\rho_{U_i,U_i\cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j,U_i\cap U_j}(s_j)$ für alle $i, j \in I$ gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_i = \rho_{U,U_i}(s)$ für alle $i \in I$.

Diese Eigenschaften nennt man die Serreschen Bedingungen. Die erste fordert, dass man die Übereinstimmung von Schnitten lokal auf einer offenen Überdeckung überprüfen kann, die zweite fordert, dass zusammenpassende lokale Schnitte von einem globalen Schnitt herkommen. Stellvertretend für viele ähnliche Beispiele zeigen wir, dass die Prägarbe der Schnitte zu $p\colon Y \to X$ eine Garbe auf X ist.

Beispiel 4.2. Wir knüpfen an Beispiel 3.12 an, d.h.h es seien X und Y topologische Räume und es sei

$$p\colon Y \longrightarrow X$$

eine fixierte stetige Abbildung, und es sei

$$U \mapsto S(U,Y) = \left\{ s : U \to p^{-1}(U) \mid s \text{ stetiger Schnitt zu } p \right\}$$

die Prägarbe der stetigen Schnitte in Y. Dies ist eine Garbe. Die erste Serresche Bedingung ist erfüllt, da zwei Schnitte übereinstimmen, wenn sie in jedem Punkt $P \in U$ den gleichen Wert haben, was bei einer offenen Überdeckung lokal getestet werden kann. Die zweite Serresche Bedingung ist erfüllt, da man zu einer Familie von stetigen verträglichen Schnitten

$$s_i \colon U_i \longrightarrow Y|_{U_i}$$

direkt einen Schnitt

$$s \colon U \longrightarrow Y|_U$$

definieren kann, der diese simultan fortsetzt. Die Stetigkeit folgt, da diese lokal getestet werden kann.

Beispiel 4.3. Zu einer topologischen Gruppe G und einem topologischen Raum X ist durch $U \mapsto C^0(U,G)$ eine Garbe gegeben, die Garbe der stetigen Funktionen mit Werten in G. Es handelt sich um eine Garbe von Gruppen. Die Garbeneigenschaften beruhen darauf, dass die Gleichheit von stetigen Abbildungen punktweise getestet werden kann und dass sich stetige Abbildungen, die auf offenen Mengen definiert sind und auf den Durchschnitten übereinstimmen, zu einer globalen stetigen Abbildung fortsetzen.

Lemma 4.4. *Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf einem topologischen Raum X. Es seien Schnitte $s,t \in \mathcal{F}(X)$ gegeben, die $s_P = t_P$ in den Halmen $\mathcal{F}_P$ für alle Punkte $P \in X$ erfüllen. Dann ist $s = t$.*

Beweis. Aufgrund der Veraussetzung gibt es zu jedem Punkt $P \in X$ eine offene Umgebung $P \in U_P \subseteq X$ derart, dass

$$\rho_{X,U_P}(s) = \rho_{X,U_P}(t)$$

ist. Somit ist

$$X = \bigcup_{P \in X} U_P$$

und aus der ersten Garbeneigenschaft folgt $s = t$. □

4.2. **Garbenmorpismen.**

Ein Garbenmorphismus ist einfach ein Prägarbenmorphismus zwischen Garben. Dennoch gibt es einige gewichtige Besonderheiten, die sich auf Surjektivität, Bild, lokaler Isomorphietest beziehen.

Lemma 4.5. *Es sei X ein topologischer Raum und $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1)
$$\varphi_U \colon \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$
ist injektiv für jede offene Menge $U \subseteq X$.

(2) *Die Halmabbildungen*

$$\varphi_P \colon \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P$$

sind injektiv für alle Punkte $P \in X$.

Beweis. Die Hinrichtung ist klar. Zum Beweis der Rückrichtung seien Schnitte $s, t \in \mathcal{F}(X)$ mit $\varphi(s) = \varphi(t)$ in $\mathcal{G}(X)$ gegeben. Dann ist $\varphi(s)_P = \varphi(t)_P$ in jedem Halm $\mathcal{G}_P$ und damit nach Voraussetzung (unter Verwendung von Lemma 3.27) auch $s_P = t_P$ in jedem Halm $\mathcal{F}_P$. Aus Lemma 4.4 folgt $s = t$. □

Lemma 4.6. *Es sei* X *ein topologischer Raum und* $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *ein Garbenmorphismus. Dann ist* φ *genau dann ein Garbenisomorphismus, wenn für jeden Punkt* $P \in X$ *die Halmabbildung*

$$\varphi_P \colon \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P$$

ein Isomorphismus ist.

Beweis. Die Hinrichtung ist trivial. Für die Rückrichtung ist zu zeigen, dass

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ bijektiv ist. Ohne Einschränkung sei $U = X$. Die Injektivität ergibt sich aus Lemma 4.5. Zum Nachweis der Surjektivität sei nun $t \in \mathcal{G}(X)$ vorgegeben. Zu jedem Punkt $P \in X$ gibt es ein eindeutiges

$$s_P \in \mathcal{F}_P$$

mit

$$\varphi_P(s_P) = t_P.$$

Jedes s_P wird repräsentiert durch ein

$$r_P \in \mathcal{F}(U_P),$$

wobei U_P eine offene Umgebung von P bezeichnet. Dabei hat $\varphi(r_P)$ die Eigenschaft, dass es im Halm $\mathcal{G}_P$ mit t_P übereinstimmt. Daher gibt es eine eventuell kleinere offene Umgebung $P \in V_P \subseteq U_P$, auf der $\varphi(r_P)|_{V_P} = t|_{V_P}$ gilt. Wir ersetzen U_P durch V_P und haben eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{P \in X} V_P$$

und Schnitte

$$r_P \in \mathcal{F}(V_P),$$

die jeweils auf $t|_{V_P}$ abbilden. Wir betrachten zwei Schnitte r_P und r_Q auf dem Durchschnitt $V_P \cap V_Q$. Für einen Punkt

$$Z \in V_P \cap V_Q$$

ist $(r_P)_Z = (r_Q)_Z$, da beide unter der bijektiven Abbildung φ_Z auf t_Z abgebildet werden. Nach Lemma 4.4 folgt

$$r_P|_{V_P \cap V_Q} = r_Q|_{V_P \cap V_Q} .$$

Somit gibt es aufgrund der zweiten Garbeneigenschaft ein globales Element $r \in \mathcal{F}(X)$ mit

$$r|_{V_P} = r_P$$

für alle P. Wegen der ersten Garbeneigenschaft ist $\varphi(r) = t$, da dies auf den V_P gilt. $\square$

Diese Aussage gilt weder für Prägarben (man betrachte beispielsweise eine Vergarbung einer Prägarbe) noch ohne die Voraussetzung, dass es überhaupt einen Homomorphismus gibt. Zwei Garben, die halmweise zueinander isomorph sind, müssen nicht isomorph sein. Wichtige Beispiele dazu sind lokal freie Garben, die lokal isomorph zu freien Garben sind, aber im Allgemeinen selbst nicht frei sind.

Es ist auf den ersten Blick sicher überraschend und vielleicht auch enttäuschend, dass sich bei einem Garbenmorphismus die Surjektivität auf der Ebene der offenen Mengen und auf der Halmebene unterscheiden. Was aber zunächst wie ein Defizit aussieht, ist in Wirklichkeit eine Stärke der Garbentheorie, da sich in der globalen Nichtsurjektivität von halmweise surjektiven Morphismen topologische Eigenschaften des zugrunde liegenden Raumes widerspiegeln.

Definition 4.7. Ein Garbenmorphismus $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen Garben auf einem topologischer Raum X heißt *surjektiv*, wenn für jeden Punkt $P \in X$ die Halmabbildung

$$\varphi_P\colon \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P$$

surjektiv ist.

Diese Eigenschaft ist deutlich schwächer als die Eigenschaft, dass auf jeder offenen Menge eine surjektive Abbildung vorliegt.

Beispiel 4.8. Wir betrachten den stetigen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1,\ t \longmapsto (\cos t,\, \sin t)\,,$$

also die trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises. Dies induziert einen Garbenmorphismus

$$C^0(-,\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(-,S^1)$$

auf jedem topologischen Raum X. Einer stetigen reellwertigen Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf $U \subseteq X$ wird die Hintereinanderschaltung

$$\varphi \circ f\colon U \longrightarrow S^1$$

zugeordnet. Dieser Garbenmorphismus ist surjektiv, da φ lokal umkehrbar ist. Er ist aber im Allgemeinen nicht auf jeder offenen Teilmenge surjektiv.

Wenn beispielsweise $X = S^1$ ist, so besitzt die Identität auf S^1 keine stetige Liftung nach $\mathbb{R}$

Lemma 4.9. *Zu Garben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum X ist die Zuordnung*

$$U \longmapsto \operatorname{Mor}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

selbst eine Garbe.

Beweis. Da ein Garbenmorphismus

$$\varphi\colon \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$$

eine Abbildung

$$\Gamma(V, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{G})$$

für jede offene Teilmenge $V \subseteq U$ beinhaltet, gibt es unmittelbar eine Einschränkung

$$\varphi|_V\colon \mathcal{F}|_V \longrightarrow \mathcal{G}|_V.$$

Das bedeutet, dass

$$U \longmapsto \operatorname{Mor}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

eine Prägarbe ist. Zum Nachweis der Garbeneigenschaften sei

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

eine offene Überdeckung. Es seien

$$\varphi, \psi\colon \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$$

Garbenmorphismen derart, dass die Einschränkungen

$$\varphi_i = \varphi|_{U_i} = \psi|_{U_i} = \psi_i$$

übereinstimmen. Es sei $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ mit den Einschränkungen $s_i := s|_{U_i}$. Es ist dann

$$\varphi(s_i) = \psi(s_i).$$

Somit stimmen

$$\varphi(s), \psi(s) \in \Gamma(U, \mathcal{G})$$

lokal überein und damit stimmen sie wegen der Garbeneigenschaft auch direkt überein.

Zum Nachweis der zweiten Garbeneigenschaft seien Garbenmorphismen

$$\varphi_i\colon \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$$

gegeben, die die Verträglichkeitsbedingung

$$\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$$

erfüllen. Es ist die Existenz eines Garbenmorphismus

$$\varphi\colon \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$$

nachzuweisen, dessen Einschränkungen die vorgegebenen φ_i ergibt. Sei hierzu wieder $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$. Sei

$$t_i = \varphi_i(s|_{U_i}).$$

Wegen

$$(s|_{U_i})|_{U_i \cap U_j} = \big(s|_{U_j}\big)|_{U_i \cap U_j}$$

ist

$$\begin{aligned} (t_i)|_{U_i \cap U_j} &= (\varphi_i(s|_{U_i}))|_{U_i \cap U_j} \\ &= \big(\varphi_i|_{U_i \cap U_j}\big(s|_{U_i \cap U_j}\big)\big) \\ &= \big(\varphi_j|_{U_i \cap U_j}\big(s|_{U_i \cap U_j}\big)\big) \\ &= \big(\varphi_j\big(s|_{U_j}\big)\big)|_{U_i \cap U_j} \\ &= (t_j)|_{U_i \cap U_j} \end{aligned}$$

und somit bilden die t_i eine verträgliche Familie von Schnitten. Daher gibt es eine eindeutig bestimmtes Element $t \in \Gamma(U, \mathcal{G})$ mit $t_i = t|_{U_i}$. Die Festlegung $\varphi(s) := t$ ergibt somit eine Abbildung

$$\varphi\colon \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}),$$

deren Einschränkungen die vorgegebenen φ_i sind. □

Korollar 4.10. *Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X und es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf X. Zu jedem $i \in I$ sei ein Garbenmorphismus*

$$\alpha_i\colon \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$$

gegeben, der

$$\alpha_i|_{U_i \cap U_j} = \alpha_j|_{U_i \cap U_j}$$

für alle i, j erfüllt. Dann gibt es einen eindeutigen Garbenmorphismus

$$\alpha\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

mit $\alpha|_{U_i} = \alpha_i$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 4.9. □

Korollar 4.11. *Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf einem topologischen Raum X und es seien*

$$\alpha, \beta\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

Garbenmorphismen. Dann ist $\alpha = \beta$ genau dann, wenn $\alpha_p = \beta_P$ für jeden Punkt $P \in X$ gilt.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 4.9 und Lemma 4.4. □

4. Arbeitsblatt

Aufgabe 4.1. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf dem topologischen Raum X. Zeige, dass durch $U \mapsto \mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U)$ mit den natürlichen Produktabbildungen eine Garbe auf X gegeben ist.

Aufgabe 4.2. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf einem nicht zusammenhängenden Raum X mit einer Zerlegung $X = U \uplus V$ in disjunkte nichtleere offene Mengen. Zeige $\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(U) \times \mathcal{G}(V)$.

Aufgabe 4.3. Es sei X ein topologischer Raum mit einer Zerlegung $X = Y \uplus Z$ in disjunkte offene nichtleere Teilmengen. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y und $\mathcal{H}$ eine Garbe auf Z. Zeige, dass durch

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U \cap Y) \times \mathcal{H}(U \cap Z)$$

für $U \subseteq X$ eine Garbe auf X definiert ist.

Aufgabe 4.4. Es sei X ein Hausdorffraum mit zumindest zwei Punkten und es sei $M \neq \emptyset$. eine Menge. Zeige, dass die konstante Prägarbe zu M keine Garbe ist.

Aufgabe 4.5. Zeige, dass die Einschränkung einer Garbe auf eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ eine Garbe ist.

Aufgabe 4.6. Zeige, dass der Halm der Garbe der holomorphen Funktionen in $0 \in \mathbb{C}$ gleich dem Ring der konvergenten Potenzreihen in einer Variablen ist.

Aufgabe 4.7. Es sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus zwischen Garben auf einem topologischen Raum X und es sei $\varphi_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ surjektiv für jede offene Menge $U \subseteq X$. Zeige, dass dann auch jede Halmabbildung $\varphi_P\colon \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ surjektiv ist.

Aufgabe 4.8. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X. Zeige $\mathcal{G}(\emptyset) = 0$.

5. Vorlesung - Vergarbung

5.1. **Vergarbung.**

Man kann einer Prägarbe in kanonischer Weise eine Garbe zuordnen, ihre *Vergarbung*.

Definition 5.1. Zu einer Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X nennt man die durch

$$\widetilde{\mathcal{F}}(U) := \{(s_P)_{P \in U} \in \prod_{P \in U} \mathcal{F}_P \mid \text{ für alle } P \in U \text{ gibt es } P \in V \subseteq U \text{ und } t \in \mathcal{F}(V) \text{ mit } s_Q = t_Q \text{ in } \mathcal{F}_Q \text{ für alle } Q \in V\}$$

und die natürlichen Restriktionsabbildungen gegebene Prägarbe die *Vergarbung* von $\mathcal{F}$.

Die in dieser Definition auftretende Bedingung, dass die Schnitte die gleichen Keime in den Halmen definieren, nennt man auch die *Kompatibilitätsbedingung*.

Lemma 5.2. *Es sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X und $\widetilde{\mathcal{F}}$ die Vergarbung zu $\mathcal{F}$. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Es gibt einen natürlichen Prägarben-Morphismus*
$$\mathcal{F} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}},$$
der durch
$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}(U),\, s \longmapsto (s_P)_{P \in U},$$
gegeben ist.

(2) *Es ist*
$$\widetilde{\mathcal{F}}_P \cong \mathcal{F}_P$$
für jeden Punkt $P \in X$.

(3) *Die Vergarbung ist eine Garbe.*

(4) *Wenn $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, so ist die natürliche Morphismus $\mathcal{F} \to \widetilde{\mathcal{F}}$ ein Isomorphismus.*

(5) *Zu jedem Prägarben-Morphismus*
$$\psi\colon\, \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$
in eine Garbe $\mathcal{G}$ gibt es eine eindeutige Faktorisierung
$$\tilde{\psi}\colon\, \widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{G}.$$

Beweis. (1) Ein Element $s \in \mathcal{F}(U)$ definiert ein Tupel $s_P, P \in U$, das direkt die Kompatibilitätsbedingung erfüllt. Somit gibt es eine wohldefinierte Abbildung

$$\varphi_U\colon\, \mathcal{F}(U) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}(U).$$

Zu $V \subseteq U$ liegt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \prod_{P \in U} \mathcal{F}_P \\ \rho_{U,V} \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \prod_{P \in V} \mathcal{F}_P \end{array}$$

vor. Die Kommutativität beruht darauf, dass die Keime zu einem Schnitt im Halm eines Punktes nur von den offenen Umgebungen des Punktes abhängen.

(2) Wegen (1) und Lemma 3.27 hat man eine natürliche Abbildung

$$\mathcal{F}_P \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}_P.$$

Zum Nachweis der Surjektivität sei $s \in \widetilde{\mathcal{F}}_P$ gegeben, und s sei repräsentiert durch $s' \in \widetilde{\mathcal{F}}(U)$. Dies wird in einer offenen Umgebung $V \subseteq U$ von P durch ein Element

$$s'' \in \mathcal{F}(V)$$

repräsentiert. Dann ist der Keim $s''_P \in \mathcal{F}_P$ direkt ein Urbild von s.

Zum Nachweis der Injektivität seien $s, t \in \mathcal{F}_P$ mit $\varphi(s)_P = \varphi(t)_P$ gegeben. Wir können annehmen, dass s und t als Schnitte von $\mathcal{F}$ auf der gleichen offenen Menge U gegeben sind. Die Gleichheit im Halm der Vergarbung besagt, dass es eine offene Menge $P \in V$ mit

$$(s_Q)_{Q \in V} = (t_Q)_{Q \in V}$$

gibt. Dann ist insbesondere $s_P = t_P$.

(3) Es sei

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

eine offene Überdeckung und seien $s, t \in \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}})$ Schnitte mit $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ für alle i. Dann gilt insbesondere

$$s_P = t_P$$

für jeden Punkt $P \in U$, da ja jeder Punkt $P \in U$ in einem der U_i enthalten ist. Somit gilt insbesondere Gleichheit im Produkt der Halme und dies bedeutet die Gleichheit in der Vergarbung.

Seien nun Schnitte

$$s_i \in \widetilde{\mathcal{F}}(U_i)$$

mit $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ gegeben. Dies bedeutet zunächst, dass es zu jedem Punkt $P \in U$ einen eindeutigen Keim s_P gibt, der durch eines der s_i festgelegt ist. Das Tupel s_P, $P \in U$, erfüllt dann aber direkt die Kompatibilitätsbedingung.

(4) Nach (1) hat man einen Prägarben-Morphismus

$$\mathcal{F} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}$$

der nach (2) halmweise bijektiv ist. Nach Voraussetzung liegt links und nach (3) liegt rechts eine Garbe vor. Also ist nach Lemma 4.6 die Abbildung ein Isomorphismus.

(5) Siehe Aufgabe 5.2.

□

5.2. **Homomorphismen von Garben von Gruppen.**

Definition 5.3. Es sei X ein topologischer Raum und seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben von kommutativen Gruppen auf X. Ein Garbenmorphismus $\varphi\colon\ \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt *Homomorphismus von Garben kommutativer Gruppen*, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Abbildung

$$\varphi_U\colon\ \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Beispiel 5.4. Zu einem stetigen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon\ F \to G$ zwischen topologischen Gruppen F und G wird auf jedem topologischen Raum X ein Homomorphismus von Garben von Gruppen festgelegt, indem auf jeder offenen Teilmenge U die Zuordnung

$$C^0(U, F) \longrightarrow C^0(U, G),\ f \longmapsto \varphi \circ f,$$

betrachtet wird.

Definition 5.5. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\varphi\colon\ \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Dann nennt man die durch

$$(\operatorname{kern} \varphi)(U) \ := \ \operatorname{kern} \varphi_U$$

definierte Untergarbe von $\mathcal{F}$ die *Kerngarbe* zu φ.

Es handelt sich dabei genauer um eine Untergarbe von kommutativen Gruppen, d.h. für jede offene Teilmenge liegt eine Untergruppe von $\mathcal{F}$ vor, siehe Aufgabe 5.6.

Definition 5.6. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\varphi\colon\ \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Dann nennt man die Vergarbung der durch

$$(\operatorname{bild} \varphi)(U) \ := \ \operatorname{bild} \varphi_U$$

gegebenen Prägarbe die *Bildgarbe* zu φ.

Die Bildgarbe ist nach Lemma 5.2 (5) in natürlicher Weise eine Untergarbe von $\mathcal{G}$, und zwar eine Untergarbe von kommutativen Gruppen. Sie wird mit $\operatorname{bild} \varphi$ bezeichnet.

Beispiel 5.7. Es sei X ein topologischer Raum und

$$\varphi\colon\, X \times \mathbb{R}^n \longrightarrow X \times \mathbb{R}^m$$

ein Homomorphismus zwischen trivialen Vektorbündeln. Dieser wird durch eine stetige Abbildung

$$M\colon\, X \longrightarrow \operatorname{Mat}_{m\times n}(C^0(X,\mathbb{R}))$$

beschrieben, d.h. jedem Punkt wird in stetiger Weise eine Matrix zugeordnet, die für diesen Punkt eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ beschreibt. Dies kann man unmittelbar als Homomorphismus von Garben von Gruppen auf X auffassen, nämlich als

$$C^0(-,\mathbb{R})^n \longrightarrow C^0(-,\mathbb{R})^m,\ \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist der Garbenmorphismus auf der Ebene der Schnitte in den Bündeln. In Beispiel 1.2 liegt zu $X = \mathbb{R}^3$ die Abbildung

$$\varphi\colon\, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R},\ (r,s,t;u,v,w) \longmapsto (r,s,t;ru+sv+tw),$$

bzw.

$$M\colon\, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \operatorname{Mat}_{1\times 3}(K),\ (r,s,t) \longmapsto (r,s,t),$$

vor.

Die Kerngarbe besteht über U einfach aus

$$(\operatorname{kern}\varphi)(U) \,=\, \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in C^0(U,\mathbb{R})^n \mid M \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = 0 \right\} \,\subseteq\, C^0(U,\mathbb{R})^n.$$

5.3. **Die Quotientengarbe.**

Definition 5.8. Zu einer Garbe $\mathcal{G}$ von kommutativen Gruppen und einer Untergarbe von Gruppen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ nennt man die Vergarbung der Prägarbe $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ die *Quotientengarbe* zu $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$

Die Quotientengarbe wird mit $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ bezeichnet. Da vergarbt wird, muss nicht unbedingt $(\mathcal{G}/\mathcal{F})(U) = \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ gelten. Es gilt aber $(\mathcal{G}/\mathcal{F})_P = \mathcal{G}_P/\mathcal{F}_P$ für jeden Punkt $P \in X$, siehe Aufgabe 5.11.

Lemma 5.9. *Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ einer Untergarbe von Gruppen mit der Quotientengarbe $\mathcal{G}/\mathcal{F}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(1) *Jedes Element $s \in \Gamma(X,\mathcal{G}/\mathcal{F})$ wird repräsentiert durch eine Familie (U_i,g_i), $i \in I$, wobei $X = \bigcup_{i\in I}$ eine offene Überdeckung ist und $g_i \in \Gamma(U_i,\mathcal{G})$ Schnitte sind mit*

$$g_i|_{U_i\cap U_j} - g_j|_{U_i\cap U_j} \,\in\, \Gamma(U_i \cap U_j,\mathcal{F}),$$

und jede solche Familie liegt ein Element in $\Gamma(X,\mathcal{G}/\mathcal{F})$ fest.

(2) *Zwei solche Familien* (U_i, g_i) (U_i, h_i) *(also zur gleichen Überdeckung) definieren genau dann das gleiche Element in* $\Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F})$*, wenn*

$$g_i - h_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$$

für alle i *ist.*

(3) *Zwei Familien* (U_i, g_i) *und* (V_j, h_j) *definieren genau dann das gleiche Element in* $\Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F})$*, wenn auf einer (jeder) gemeinsamen Verfeinerung der beiden Überdeckungen die Differenzen zu* $\mathcal{F}$ *gehören.*

Beweis. (1) Der Garbenhomomorphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{F}$ ist surjektiv und daher gibt es zu einem Schnitt $s \in \Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F})$ lokal Urbilder in $\mathcal{G}$. D.h. es gibt eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Elemente $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{G})$, die auf $s|_{U_i}$ abbilden. Somit bildet

$$g_i|_{U_i \cap U_j} - g_j|_{U_i \cap U_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{G})$$

auf 0 ab und daher gehört diese Differenz zum Kern, also zu $\mathcal{F}$. Wenn umgekehrt eine solche Familie gegeben ist, so definiert dies über die Vergarbungsabbildung Restklassen

$$[g_i] \in \Gamma(U_i, \mathcal{G}/\mathcal{F}).$$

Dabei ist

$$[g_i]|_{U_i \cap U_j} - [g_j]|_{U_i \cap U_j} = [g_i|_{U_i \cap U_j} - g_j|_{U_i \cap U_j}] = 0$$

und somit sind diese Klassen verträglich und definieren einen globalen Schnitt der Quotientengarbe.

(2) Seien die Familien (U_i, g_i) und (U_i, h_i) gegeben. Durch Übergang zu den Differenzen können wir annehmen, dass $h_i = 0$ ist. Es ist dann zu zeigen, dass (U_i, g_i) genau dann das Nullelement in der Quotientengarbe definiert, wenn alle g_i zu $\Gamma(U_i, \mathcal{F})$ gehören. Wenn die g_i überall das Nullelement definieren, so gilt dies auch in den Halmen und somit gilt, dass $g_i \in \mathcal{F}_P$ in jedem Punkt $P \in U_i$ gilt. Damit ist $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$. Die Rückrichtung ist klar.

(3) Die Gleichheit von Schnitten einer Garbe kann man lokal auf einer beliebigen offenen Überdeckung testen. Daher folgt dies aus (2) und daraus, dass man die Zugehörigkeit zu einer Untergarbe ebenfalls lokal testen kann.

□

5. Arbeitsblatt

Aufgabe 5.1. Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Zeige, dass durch die Zuordnung

$$U \mapsto \prod_{P \in U} \mathcal{F}_P$$

(die Produktmenge aus allen Halmen zu U) mit den natürlichen Projektionen eine Prägarbe gegeben ist, und dass es einen natürlichen Prägarbenhomomorphismus von $\mathcal{F}$ in diese Prägarbe gibt.

Aufgabe 5.2. Es sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X und $\widetilde{\mathcal{F}}$ die Vergarbung zu $\mathcal{F}$. Zeige, dass es zu jedem Prägarben-Morphismus

$$\psi\colon\ \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

in eine Garbe $\mathcal{G}$ eine eindeutige Faktorisierung

$$\tilde{\psi}\colon\ \widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{G}$$

gibt.

Die Vergarbung einer konstanten Prägarbe nennt man *lokal konstante Garbe* und manchmal auch einfach *konstante Garbe*.

Aufgabe 5.3. Es sei $\mathcal{F}$ eine konstante Prägarbe auf einem topologischen Raum X zur Menge M. Zeige, dass der Halm der Vergarbung von $\mathcal{F}$ in jedem Punkt $P \in X$ gleich M ist.

Aufgabe 5.4. Es sei G eine diskrete topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Es sei $\mathcal{G}$ die konstante Prägarbe auf X zu G. Zeige, dass die Vergarbung von $\mathcal{G}$ gleich $C^0(-, G)$ ist.

Aufgabe 5.5.*

Es sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ eine Untergarbe. Es sei $t \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ mit $t_P \in \mathcal{F}_P$ für alle $P \in X$. Zeige $t \in \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Aufgabe 5.6. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\varphi\colon\ \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Zeige, dass durch $(\operatorname{kern} \varphi)(U) := \operatorname{kern} \varphi_U$ eine Garbe von Gruppen auf X definiert ist.

Aufgabe 5.7. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\varphi\colon\ \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn $\operatorname{kern} \varphi$ die Nullgarbe ist.

Aufgabe 5.8. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\varphi\colon\ \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn $\operatorname{bild} \varphi = \mathcal{G}$ ist.

Aufgabe 5.9. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Zeige, dass für jeden Punkt $P \in X$ die Beziehung $(\operatorname{bild}\varphi)_P = \operatorname{bild}(\varphi_P)$ ist.

Aufgabe 5.10. Es sei eine Garbe $\mathcal{G}$ von kommutativen Gruppen und eine Untergarbe von Gruppen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gegeben. Zeige, dass es einen kanonischen surjektiven Garbenhomomorphismus von kommutativen Gruppen

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{F}$$

gibt.

Aufgabe 5.11. Es sei eine Garbe $\mathcal{G}$ von kommutativen Gruppen und eine Untergarbe von Gruppen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gegeben, und es sei $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ die Quotientengarbe. Zeige

$$(\mathcal{G}/\mathcal{F})_P = \mathcal{G}_P/\mathcal{F}_P$$

für jeden Punkt $P \in X$.

6. Vorlesung - Exaktheit

6.1. **Exaktheit.**

Definition 6.1. Es sei X ein topologischer Raum, es seien $\mathcal{F}_n$ Garben von kommutativen Gruppen auf X und es seien $\varphi_n\colon \mathcal{F}_{n-1} \to \mathcal{F}_n$ Homomorphismen. Man sagt, dass ein *Garbenkomplex* vorliegt, wenn

$$\operatorname{bild}\varphi_n \subseteq \operatorname{kern}\varphi_{n+1}$$

gilt.

Definition 6.2. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\mathcal{F}_\bullet$ ein Komplex von Garben von kommutativen Gruppen auf X. Man sagt, dass der Komplex *exakt* ist, wenn

$$\operatorname{bild}\varphi_n = \operatorname{kern}\varphi_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Lemma 6.3. *Es sei X ein topologischer Raum und es sei*

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

ein Komplex von Garben von kommutativen Gruppen auf X. Dann ist der Komplex genau dann exakt, wenn für jeden Punkt $P \in X$ der Komplex

$$\mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P \longrightarrow \mathcal{H}_P$$

exakt ist.

Beweis. Wir benennen die Situation mit

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}\,.$$

Nach Korollar 4.11 liegt ein Garbenkomplex genau dann vor, wenn sämtliche Halmabbildungen Komplexe sind. Sei der Komplex exakt, also

$$\operatorname{bild}\alpha = \operatorname{kern}\beta.$$

Es sei $P \in X$ fixiert und sei $s \in \mathcal{G}_P$ mit $\beta_P(s) = 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von P auf der s durch einen Schnitt s repräsentiert wird und eine kleinere offene Umgebung $V \subseteq U$, worauf $\beta_V(s|_V) = 0$ ist. Das Element (wir nennen die Einschränkung wieder s) $s \in \mathcal{G}(V)$ gehört also zum Kern von β_V und daher zum (Garben-)Bild von α. D.h. es gibt eine offene Umgebung $P \in W \subseteq V$, auf der s im Bild von

$$\alpha_W\colon\, \mathcal{F}(W) \longrightarrow \mathcal{G}(W)$$

liegt. Daher liegt auch der Keim s im Bild von α_P. □

Definition 6.4. Ein exakter Komplex

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

von Garben von kommutativen Gruppen heißt *kurze exakte Sequenz.*

Hierbei ist insbesondere die vordere Abbildung injektiv und die hintere Abbildung (Garben)-surjektiv.

Lemma 6.5. *Es sei*

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von kommutativen topologischen Gruppen (mit stetigen Gruppenhomomorphismen). Es trage F die induzierte Topologie von G und die Surjektion $p\colon G \to H$ habe die Eigenschaft, dass es zu jedem Element $h \in H$ eine offene Umgebung $h \in W \subseteq H$ und einen stetigen Schnitt zu p gibt. Dann ist für jeden topologischen Raum X die zugehörige Sequenz der Garben der stetigen Abbildungen in diese Gruppen, also

$$0 \longrightarrow C^0(-,F) \longrightarrow C^0(-,G) \longrightarrow C^0(-,H) \longrightarrow 0\,,$$

ebenfalls exakt.

Beweis. Es ist klar, dass ein Komplex von Garben von kommutativen Gruppen auf X vorliegt. Die Injektivität links ist ebenfalls klar. Zur Exaktheit in der Mitte: Wenn zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ eine stetige Abbildung $\varphi\colon U \to G$ die Eigenschaft besitzt, dass $p \circ \varphi$ die Nullabbildung ist, so liegt das Bild von φ in F. Da F die induzierte Topologie von G trägt, ist auch die Abbildung $\varphi\colon U \to F$ stetig. Zur Garbensurjektivität rechts: Es sei $P \in X$ ein Punkt und

$$\psi\colon\, V \longrightarrow H$$

eine auf einer offenen Umgebung von P definierte stetige Abbildung nach H. Es sei $\psi(P) = h$. Nach Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung $h \in W \subseteq H$ und einen Schnitt $s\colon W \to G$ mit $p \circ s = \mathrm{Id}_W$. Wir betrachten

$$U := V \cap \psi^{-1}(W).$$

Dann ist $s \circ \psi$ (eingeschränkt auf U) ein stetiger Schnitt von G, der unter p auf ψ abgebildet wird. □

Beispiel 6.6. Wir betrachten die kurze exakte *Exponentialsequenz*

$$0 \longrightarrow 2\pi \mathrm{i}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times \longrightarrow 0$$

von topologischen Gruppen. Die Exaktheit in der Mitte beruht auf Satz 21.5 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) (2), die Homomorphieeigenschaft beruht auf der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und die komplexe Exponentialfunktion bildet nach Satz 21.6 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) surjektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab (sie ist eine Überlagerung). Da es lokal einen Logarithmus gibt, sind die Voraussetzungen von Lemma 6.5 erfüllt. Somit gibt es zu jedem topologischen Raum X eine kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow C^0(-,\mathbb{Z}) \longrightarrow C^0(-,\mathbb{C}) \longrightarrow C^0(-,\mathbb{C}^\times) \longrightarrow 0\,,$$

die die (stetige komplexe) *Exponentialsequenz* heißt. Links steht die lokal konstante Garbe mit Werten in $\mathbb{Z}$, in der Mitte die Garbe der komplexwertigen stetigen Funktionen und rechts die Garbe der nullstellenfreien komplexwertigen stetigen Funktionen. Wenn man $X = \mathbb{C}^\times$ setzt, so ist die globale Auswertung der hinteren Abbildung nicht surjektiv, da die Identität nicht im Bild liegt.

6.2. **Globale Auswertung.**

Lemma 6.7. *Es sei X ein topologischer Raum und sei*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{G} \xrightarrow{d'} \mathcal{H}$$

ein Komplex von Garbenhomomorphismen von Garben von kommutativen Gruppen auf X. Dann ist auch

$$\Gamma(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{H})$$

ein Komplex.

Beweis. Die Voraussetzung bedeutet einfach, dass $d' \circ d$ die Nullabbildung ist. Dann ist insbesondere die globale Auswertung die Nullabbildung. □

Lemma 6.8. *Es sei X ein topologischer Raum. Es sei*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

ein exakter Komplex von Garbenhomomorphismen von Garben von kommutativen Gruppen auf X. Dann ist auch der Komplex

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{H})$$

exakt.

Beweis. Dass ein Komplex vorliegt ist klar nach Lemma 6.7. Die Exaktheit bedeutet, dass für jeden Punkt $P \in X$ der Komplex

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P \longrightarrow \mathcal{H}_P$$

der Halme exakt ist. Sei $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ und $d(s) = 0$ in $\Gamma(X, \mathcal{G})$. Dann ist $d(s)_P = 0$ in jedem Punkt und somit ist $s_P = 0$ für jeden Punkt. Also ist $s = 0$ und die linke Abbildung ist injektiv. Sei nun $t \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ mit $d'(t) = 0$ in $\Gamma(X, \mathcal{H})$. Die Exaktheit in den Halmen bedeutet, dass für jeden Punkt P der Keim t_P zu $\mathcal{F}_P$ gehört. Daraus folgt Aufgabe 5.5, dass t selbst zu $\mathcal{F}$ gehört. □

Die vorstehende Aussage bedeutet, dass die globale Auswertung einer Garbe von abelschen Gruppen ein (kovarianter, additiver) linksexakter Funktor ist.

6.3. **Rückzug und Vorschub.**

Bisher haben wir nur Garben und ihre Beziehungen untereinander auf einem gegebenen topologischen Raum behandelt. Wir betrachten nun den Fall, wo topologische Räume durch eine stetige Abbildung miteinander verbunden sind.

Definition 6.9. Zu einer stetigen Abbildung

$$\varphi \colon X \longrightarrow Y$$

und einer Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X nennt man die durch

$$(\varphi_*)\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}\big(\varphi^{-1}(U)\big)$$

gegebene Prägarbe auf Y die unter φ *vorgeschobene Prägarbe*.

Da zu offenen Mengen $V \subseteq W$ auch $\varphi^{-1}(V) \subseteq \varphi^{-1}(W)$ gilt, hat man natürliche Restriktionsabbildungen und erhält somit in der Tat eine Prägarbe.

Lemma 6.10. *Zu einer stetigen Abbildung*

$$\varphi \colon X \longrightarrow Y$$

und einer Garbe $\mathcal{F}$ auf X ist die vorgeschobene Prägarbe $\varphi_*\mathcal{F}$ eine Garbe.

Beweis. Es sei

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i$$

eine offene Überdeckung einer offenen Menge $V \subseteq Y$. Dann bilden die $\varphi^{-1}(V_i)$, $i \in I$, eine offene Überdeckung von $\varphi^{-1}(V)$. Seien $s, t \in \varphi_*\mathcal{F}(V)$ mit $s|_{V_i \cap V_j} = t|_{V_i \cap V_j}$ gegeben. Dies bedeutet unmittelbar $s, t \in \mathcal{F}(\varphi^{-1}(V))$ und

$$s|_{\varphi^{-1}(V_i) \cap \varphi^{-1}(V_j)} = s|_{\varphi^{-1}(V_i \cap V_j)} = t|_{\varphi^{-1}(V_i \cap V_j)} = t|_{\varphi^{-1}(V_i) \cap \varphi^{-1}(V_j)}.$$

Daher ist (nach der ersten Garbeneigenschaft von $\mathcal{F}$) $s = t$ in $\mathcal{F}(\varphi^{-1}(V))$, also $s = t$ in $\varphi_* \mathcal{F}(V)$.

Seien nun $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ mit

$$s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}.$$

Dies bedeutet zurückübersetzt nach X unmittelbar, dass kompatible Schnitte in $\mathcal{F}(\varphi^{-1}(V_i))$ vorliegen, denen ein Schnitt in $\mathcal{F}(\varphi^{-1}(V)) = \varphi_* \mathcal{F}(V)$ entspricht. □

Lemma 6.11. *Zu einer stetigen Abbildung*

$$\varphi \colon X \longrightarrow Y,$$

einem Punkt $Q \in Y$ und einer Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X ist der Halm der vorgeschobenen Prägarbe $\varphi_* \mathcal{F}$ im Punkt Q gleich

$$\operatorname{colim}_{Q \in V} \mathcal{F}\big(\varphi^{-1}(V)\big) = \operatorname{colim}_{\{U \subseteq X \mid \textit{ es gibt eine offene Umgebung } Q \in V \textit{ mit } \varphi^{-1}(V) \subseteq U\}} \mathcal{F}(U).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 6.5. □

Der Halm der vorgeschobenen Prägarbe ist also der Halm der Ausgangsgarbe in einem Filter (nämlich dem Urbildfilter des Umgebungsfilters $U(Q)$), aber im Allgemeinen nicht in einem Punkt.

Definition 6.12. Zu einer stetigen Abbildung

$$\varphi \colon X \longrightarrow Y$$

und einer Prägarbe $\mathcal{G}$ auf Y nennt man auf einer offenen Menge $U \subseteq X$ durch

$$\operatorname{colim}_{V \subseteq Y, U \subseteq \varphi^{-1}(V)} \mathcal{G}(V)$$

gegebene Prägarbe auf X die unter φ *zurückgezogene Prägarbe.*

Definition 6.13. Zu einer stetigen Abbildung $\varphi \colon X \to Y$ und einer Garbe $\mathcal{G}$ auf Y nennt man die Vergarbung der zurückgezogenen Prägarbe die *zurückgezogene Garbe.*

Sie wird mit $\varphi^{-1}\mathcal{G}$ bezeichnet.

Lemma 6.14. *Zu einer stetigen Abbildung $\varphi \colon X \to Y$ und einer Garbe $\mathcal{G}$ auf Y ist der Halm der zurückgezogenen Garbe in einem Punkt $P \in X$ gleich dem Halm von $\mathcal{G}$ in $\varphi(P)$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 6.6. □

6. Arbeitsblatt

Es seien X und Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung

$$p\colon Y \longrightarrow X$$

heißt *Überlagerung*, wenn es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und eine Familie diskreter topologischer Räume F_i, $i \in I$, derart gibt, dass $p^{-1}(U_i)$ homöomorph zu $U_i \times F_i$ (versehen mit der Produkttopologie) ist, wobei die Homöomorphien mit den Abbildungen nach U_i verträglich sind.

Aufgabe 6.1. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow S^1,\, t \longmapsto (\cos t, \sin t),$$

eine Überlagerung ist.

Aufgabe 6.2. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\},\, z \longmapsto \exp z,$$

eine Überlagerung ist.

Aufgabe 6.3. Zeige, dass es bei einer Überlagerung $p\colon Y \to X$ zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $x \in U \subseteq X$ und einen stetigen Schnitt $s\colon U \to p^{-1}(U)$ zu p gibt.

Aufgabe 6.4. Es seien F und H kommutative topologische Gruppen und es sei $G = F \times H$ ihre Produktgruppe (versehen mit der Produkttopologie) und es sei

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

die zugehörige kurze exakte Sequenz. Zeige, dass zu jedem topologischen Raum X eine kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow C^0(-,F) \longrightarrow C^0(-,G) \longrightarrow C^0(-,H) \longrightarrow 0$$

vorliegt, für die die globale Auswertung hinten stets surjektiv ist.

Aufgabe 6.5. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, $Q \in Y$ ein Punkt und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Zeige, dass der Halm der vorgeschobenen Prägarbe $\varphi_*\mathcal{F}$ im Punkt Q gleich

$$\operatorname{colim}_{Q \in V} \mathcal{F}\big(\varphi^{-1}(V)\big) = \operatorname{colim}_{\{U \subseteq X \mid \text{ es gibt } Q \in V \text{ mit } \varphi^{-1}(V) \subseteq U\}} \mathcal{F}(U)$$

ist.

Aufgabe 6.6. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ einer stetige Abbildung und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y. Zeige, dass der Halm der zurückgezogenen Garbe in einem Punkt $P \in X$ gleich dem Halm von $\mathcal{G}$ in $\varphi(P)$ ist.

Aufgabe 6.7. Es sei X eine Menge mit zwei Topologien τ_1 und τ_2 derart, dass die Identität

$$\varphi\colon X_1 = (X, \tau_1) \longrightarrow X_2 = (X, \tau_2)$$

stetig ist, die erste Topologie ist also eine Verfeinerung der zweiten Topologie. Es sei $\mathcal{F}_1$ eine Garbe auf X_1 und $\mathcal{F}_2$ eine Garbe auf X_2. Bestimme $\varphi_*\mathcal{F}_1$ und $\varphi^{-1}\mathcal{F}_2$. Wie sieht es aus, wenn τ_1 die diskrete Topologie und τ_2 die Klumpentopologie ist.

Aufgabe 6.8. Es sei X ein topologischer Raum und $\varphi\colon X \to \{P\}$ die konstante Abbildung. Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Bestimme $\varphi_*\mathcal{F}$.

Aufgabe 6.9. Es sei X ein topologischer Raum und $P \in X$ ein Punkt mit der zugehörigen Abbildung $i\colon \{P\} \to X$. Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf $\{P\}$. Beschreibe die Garbe $i_*\mathcal{F}$ auf den offenen Mengen von X. Wie sehen die Halme von $i_*\mathcal{F}$ aus, wenn P ein abgeschlossener Punkt ist?

Solche Garben nennt man *Wolkenkratzergarbe*.

Aufgabe 6.10. Es sei X ein topologischer Raum und $\varphi\colon X \to \{P\}$ die konstante Abbildung. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf $\{P\}$. Bestimme $\varphi^{-1}\mathcal{G}$.

Aufgabe 6.11. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y und es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Zeige, dass es einen natürlichen Garbenmorphismen

$$\varphi^{-1}(\varphi_*\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}$$

auf X gibt.

Aufgabe 6.12. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y und es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y. Zeige, dass es einen natürlichen Garbenmorphismen

$$\mathcal{G} \longrightarrow \varphi_*(\varphi^{-1}\mathcal{G})$$

auf Y gibt.

Aufgabe 6.13. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y. Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y. Zeige, dass es eine natürliche Bijektion zwischen den Garbenmorphismen

$$\psi\colon \varphi^{-1}\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$$

auf X und den Garbenmorphismen

$$\theta\colon \mathcal{G} \longrightarrow \varphi_*\mathcal{F}$$

auf Y gibt.

Aufgabe 6.14. Es seien L_1, L_2, M Mengen und

$$p_1\colon L_1 \longrightarrow M$$

und

$$p_2\colon L_2 \longrightarrow M$$

Abbildungen. Wir definieren

$$L_1 \times_M L_2 := \{(x_1, x_2) \mid \varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2)\} \subseteq L_1 \times L_2.$$

(1) Zeige, dass es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L_1 \times_M L_2 & \longrightarrow & L_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_2 & \longrightarrow & M \end{array}$$

gibt.

(2) Es sei T eine weitere Menge und $\psi_1\colon T \to L_1$ und $\psi_2\colon T \to L_2$ Abbildungen mit

$$p_1 \circ \psi_1 = p_2 \circ \psi_2.$$

Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\psi\colon T \longrightarrow L_1 \times_M L_2$$

derart gibt, dass die Projektionen auf L_1 bzw. L_2 mit ψ_1, ψ_2 übereinstimmen.

Aufgabe 6.15. Es seien L_1, L_2, M topologische Räume und

$$p_1\colon L_1 \longrightarrow M$$

und

$$p_2\colon L_2 \longrightarrow M$$

stetige Abbildungen. Wir definieren

$$L_1 \times_M L_2 := \{(x_1, x_2) \mid \varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2)\} \subseteq L_1 \times L_2$$

mit der induzierten Topologie.

(1) Zeige, dass es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L_1 \times_M L_2 & \longrightarrow & L_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_2 & \longrightarrow & M \end{array}$$

mit stetigen Abbildungen gibt.

(2) Es sei T eine weiterer topologischer Raum und $\psi_1 \colon T \to L_1$ und $\psi_2 \colon T \to L_2$ stetige Abbildungen mit

$$p_1 \circ \psi_1 = p_2 \circ \psi_2.$$

Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung

$$\psi \colon T \longrightarrow L_1 \times_M L_2$$

derart gibt, dass die Projektionen auf L_1 bzw. L_2 mit ψ_1, ψ_2 übereinstimmen.

Aufgabe 6.16. Es seien X und Y topologische Räume und $\varphi \colon Y \to X$ eine stetige Abbildung. Es sei $p \colon V \to X$ ein Vektorbündel über X. Zeige, dass $Y \times_X V$ (siehe Aufgabe 6.15) ein Vektorbündel über Y ist.

Aufgabe 6.17. Es sei X ein topologischer Raum und seien $p \colon V \to X$ und $q \colon W \to X$ Vektorbündel über X. Zeige, dass $V \times_X W$ (siehe Aufgabe 6.15) ein Vektorbündel über X ist, das mit der direkten Summe von Vektorbündeln übereinstimmt.

Aufgabe 6.18. Es seien X, Y und Z topologische Räume und seien $\varphi \colon Y \to X$ und $p \colon Z \to X$ stetige Abbildungen. Es sei

$$p_Y \colon Y \times_X Z \longrightarrow Y.$$

Zeige, dass ein stetiger Schnitt $s \colon Y \to Y \times_X Z$ das gleiche ist wie eine stetige Abbildung $t \colon Y \to Z$ mit $p \circ t = \varphi$.

Aufgabe 6.19. Es seien X, Y und Z topologische Räume und seien $\varphi \colon Y \to X$ und $p \colon Z \to X$ stetige Abbildungen. Es sei $p_Y \colon Y \times_X Z \to Y$. Es sei $\mathcal{G}$ die Garbe der stetigen Schnitte zu p auf X. Zeige, dass der Rückzug $\varphi^* \mathcal{G}$ mit der Garbe der Schnitte zu p_Y übereinstimmt.

7. Vorlesung - Beringte Räume

7.1. Beringte Räume.

Definition 7.1. Ein topologischer Raum, der mit einer Garbe von kommutativen Ringen versehen ist, heißt *beringter Raum*.

Ein beringter Raum wird oft in der Form $(X, \mathcal{O}_X)$ angegeben, wobei X der zugrunde liegende Raum ist und $\mathcal{O}_X$ die Garbe von kommutativen Ringen ist. Diese heißt die *Strukturgarbe* des beringten Raumes. Die Auswertung $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(U)$ nennt man auch den *Schnittring* zur offenen Menge $U \subseteq X$ und $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ den *globalen Schnittring*. Im Anschluss an Beispiel 3.9 bzw. Beispiel 3.10 haben wir die folgenden Standardbeispiele.

Beispiel 7.2. Es sei X ein topologischer Raum. Zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ ist

$$\mathcal{C}(U) = C^0(U, \mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

ein kommutativer Ring und die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{C}(U)$ ist mit den natürlichen Restriktionsabbildungen eine Garbe, wodurch X zu einem beringten Raum wird.

Beispiel 7.3. Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq M$ durch

$$C^1(U, \mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig differenzierbar}\}$$

ein kommutativer Ring gegeben. Diese Zuordnung ist eine Garbe, wodurch M zu einem beringten Raum wird.

Beispiel 7.4. Auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M ist zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq M$ durch

$$C^1(U, \mathbb{C}) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

ein kommutativer Ring gegeben. Diese Zuordnung ist eine Garbe, wodurch M zu einem beringten Raum wird.

Beispiel 7.5. Es sei R ein kommutativer Ring und $X = \{P\}$ ein einpunktiger topologischer Raum. Dieser wird durch die Festlegung $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) := R$ und $\Gamma(\emptyset, \mathcal{O}_X) := 0$ zu einem beringten Raum.

Definition 7.6. Zu einem Punkt $P \in X$ in einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ nennt man den Halm der Strukturgarbe den *Halm* im Punkt P.

Er wird mit $\mathcal{O}_{X,P}$ oder kurz mit $\mathcal{O}_P$ bezeichnet.

7.2. Morphismen von beringten Räumen.

Zu einer stetigen Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen gehört zu jeder offenen Teilmenge $V \subseteq Y$ der Ringhomomorphismus

$$C^0(V, \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\varphi^{-1}(V), \mathbb{R}),\ f \longmapsto f \circ \varphi.$$

Für diese zurückgezogene stetige Funktion schreibt man auch $\varphi^* f$. Diese Schreibweise verwenden wir auch in der folgenden abstrakten Definition.

Definition 7.7. Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ beringte Räume. Ein *Morphismus beringter Räume* ist eine stetige Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ zusammen mit einer Familie von Ringhomomorphismen

$$\varphi_V^*\colon \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$$

zu jeder offenen Menge $V \subseteq Y$, die mit den Restriktionsabbildungen verträglich sind.

Die Verträglichkeit bedeutet, dass für offene Mengen $W \subseteq V \subseteq Y$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) & \stackrel{\varphi_V^*}{\longrightarrow} & \Gamma(\varphi^{-1}(V), \mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(W, \mathcal{O}_Y) & \stackrel{\varphi_W^*}{\longrightarrow} & \Gamma(\varphi^{-1}(W), \mathcal{O}_X) \end{array}$$

kommutiert. Ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ von beringten Räumen induziert für jeden Punkt $P \in X$ einen Ringhomomorphismus der Halme

$$\mathcal{O}_{Y,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P},$$

wobei ein $f \in \mathcal{O}_{Y,\varphi(P)}$, das durch $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ mit einer offenen Umgebung $\varphi(P) \in V$ repräsentiert wird, auf den Keim von $\varphi^*(f) \in \Gamma(\varphi^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$ abgebildet wird.

Definition 7.8. Ein Morphismus beringter Räume $\varphi\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $\psi\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ beringter Räume mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_X$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Y$ (als Identität von beringten Räumen) gibt.

7.3. **Verklebungsdaten für beringte Räume.**

Die folgende Konstruktion ist eine Erweiterung von Lemma 2.6.

Definition 7.9. Unter einem *Verklebungsdatum* für beringte Räume versteht man den folgenden Datensatz.

(1) Eine Familie $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$, $i \in I$, von beringten Räumen.
(2) Für jedes Paar (i, j) eine offene Teilmenge $U_{ij} \subseteq U_i$ (mit $U_{ii} = U_i$).
(3) Für jedes Paar (i, j) einen Isomorphismus

$$\varphi_{ji}\colon \left(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}\right) \longrightarrow \left(U_{ji}, \mathcal{O}_{U_{ji}}\right)$$

von beringten Räumen (mit $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{(U_i, \mathcal{O}_{U_i})}$.)

(4) Für Indizes $i, j, k \in I$ ist die *Kozykelbedingung*

$$\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$$

als Homomorphismus von $U_{ik} \cap U_{ij}$ nach U_k erfüllt.

Lemma 7.10. *Es sei ein Verklebungsdatum* $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$, $i \in I$, *für beringte Räume gegeben. Dann gibt es einen beringten Raum* $(X, \mathcal{O}_X)$, *eine offene Überdeckung* $X = \bigcup_{i \in I} V_i$ *und Isomorphismen* $\psi_i \colon U_i \to V_i$ *derart, dass*

$$\psi_i(U_{ij}) = V_i \cap V_j$$

ist und

$$\psi_i|_{U_{ij}} = \psi_j|_{U_{ji}} \circ \varphi_{ji}$$

gilt.

Beweis. Die Existenz eines zugrunde liegenden Raumes X ergibt sich aus Lemma 2.6. Zu einer offenen Menge $W \subseteq X$ liegt eine Überdeckung

$$W = \bigcup_{i \in I} W \cap V_i$$

vor und wir setzen

$$\Gamma(W, \mathcal{O}_X) := \left\{ (s_i, i \in I) \mid s_i \in \Gamma(\psi_i^{-1}(W \cap V_i), \mathcal{O}_{U_i}),\ \varphi_{ji}\left(s_i|_{\psi_i^{-1}(W) \cap U_{ij}} \right) = s_j|_{\psi_j^{-1}(W) \cap U_{ji}} \right\}.$$

Dies ist eine Garbe auf X von kommutativen Ringen, die auf den V_i über die ψ_i mit den vorgegebenen Garben auf U_i übereinstimmt. $\square$

7.4. **Lokal beringte Räume.**

Definition 7.11. Ein beringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *lokal beringt*, wenn für jeden Punkt $P \in X$ der Halm $\mathcal{O}_P$ ein lokaler Ring ist.

Beispiel 7.12. Ein topologischer Raum X ist mit der Garbe der stetigen Funktionen $C^0(-, \mathbb{R})$ ein lokal beringter Raum: Für jeden Punkt $P \in X$ und eine in einer offenen Umgebung von x definierte stetige Funktion f gilt $f(P) \neq 0$ genau dann, wenn es eine offene Umgebung gibt, auf der f invertierbar ist. Daher sind die Halme $\mathcal{O}_P$ lokale Ringe und X ist lokal beringt.

Entsprechendes gilt auf einer reellen oder komplexen Mannigfaltigkeit.

Definition 7.13. Zu einem lokal beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und einem Punkt $P \in X$ nennt man den Restekörper des lokalen Ringes $\mathcal{O}_P$ den *Restekörper* von P. Er wird mit $\kappa(P)$ bezeichnet.

Der Restekörper bei einem topologischen Raum versehen mit der Garbe der stetigen Funktionen ist einfach $\mathbb{R}$, siehe Aufgabe 7.16.

Definition 7.14. Zu einem lokal beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, einem Punkt $x \in X$ und einer globalen Funktion $f \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ nennt man den Wert von f im Restekörper $\kappa(x)$ von x die *Auswertung* von f in x. Sie wird mit $f(x)$ bezeichnet.

IN einem lokal beringten Raum hat man zu jedem $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ und jedem Punkt $P \in X$ die Äquivalenz $f(P) = 0$ in $\kappa(P)$ genau dann, wenn $f_P \in \mathfrak{m}_P$ genau dann, wenn f_P ist keine Einheit in $\mathcal{O}_{X,P}$.

Definition 7.15. Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ lokal beringte Räume. Ein *Morphismus lokal beringter Räume* von X nach Y ist ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ der beringten Räume, für den die induzierten Ringhomomorphismen

$$\varphi_P^*\colon \mathcal{O}_{Y,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$$

für jeden Punkt $P \in X$ lokale Homomorphismen sind.

7.5. **Der Invertierbarkeitsort.**

Lemma 7.16. *Zu einem lokal beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und einer globalen Funktion $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ist*

$$X_f := \{P \in X \mid f(P) \neq 0 \text{ in } \kappa(P)\}$$

offen.

Beweis. Zunächst ist $f(P) = 0$ im Restekörper genau dann, wenn $f \in \mathfrak{m}_P$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_P$ gilt, und dies ist genau dann der Fall, wenn f in $\mathcal{O}_P$ nicht invertierbar ist. Sei $P \in X_f$. Dann ist f in $\mathcal{O}_P$ invertierbar und es gibt $g \in \mathcal{O}_P$ mit $gf = 1$. Es gibt eine offene Umgebung $P \in U \subseteq X$ mit (einem Repräsentanten)

$$g \in \Gamma(U, \mathcal{O})$$

und eine eventuell kleinere offene Umgebung U' mit $fg = 1$. Auf dieser offenen Umgebung ist somit f invertierbar und es gilt $P \in U' \subseteq X_f$. Die Vereinigung dieser offenen Umgebungen zeigt, dass X_f offen ist. $\square$

Die Menge der Punkte, für die f als Element im Halm $\mathcal{O}_P$ nicht 0 ist, muss hingegen nicht offen sein, siehe Beispiel 11.17.

Definition 7.17. Zu einem lokal beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und einer globalen Funktion $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ nennt man

$$X_f := \{P \in X \mid f(P) \neq 0 \text{ in } \kappa(P)\}$$

den *Invertierbarkeitsort* von f.

Nach Aufgabe 7.20 ist f in $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X)$ eine Einheit.

Lemma 7.18. *Es seien X und Y lokal beringte Räume und $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus lokal beringter Räume. Dann gilt für die Invertierbarkeitsorte zu $f \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ die Beziehung*

$$\varphi^{-1}(Y_f) = X_{\varphi^* f}.$$

Beweis. Das Element f ist in $\Gamma(Y_f, \mathcal{O}_Y)$ eine Einheit und der Ringhomomorphismus

$$\Gamma(Y_f, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(Y_f), \mathcal{O}_X)$$

zeigt, dass $\varphi^* f$ in $\Gamma(\varphi^{-1}(Y_f), \mathcal{O}_X)$ eine Einheit ist, was $\varphi^{-1}(Y_f) \subseteq X_{\varphi^* f}$ bedeutet. Für einen Punkt

$$P \in X_{\varphi^* f}$$

ist $\varphi^* f$ eine Einheit im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,P}$. Wegen der Lokalität des Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{Y,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$$

muss auch $f \in \mathcal{O}_{Y,\varphi(P)}$ eine Einheit sein, was $\varphi(P) \in Y_f$ und damit

$$P \in \varphi^{-1}(Y_f)$$

bedeutet. □

7. Arbeitsblatt

Aufgabe 7.1. Zeige, dass jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ eines beringten Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ wieder ein beringter Raum ist.

Aufgabe 7.2. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum mit $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Zeige, dass für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ebenfalls $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = 0$ ist.

Aufgabe 7.3. Es sei X ein topologischer Raum, versehen mit der Garbe der reellwertigen Funktionen, und $U \subseteq X$ eine dichte offene Teilmenge. Zeige, dass die Restriktionsabbildung

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X),\ f \longmapsto f|_U,$$

injektiv ist.

Aufgabe 7.4. Es sei X ein topologischer Raum, versehen mit der Garbe der reellwertigen Funktionen, und $U \subseteq X$ eine dichte offene Teilmenge. Zeige, dass die Restriktionsabbildung

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X),\ f \longmapsto f|_U,$$

nicht surjektiv sein muss.

Aufgabe 7.5. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum. Zeige, dass die Zuordnung, die einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ die Einheitengruppe $(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))^\times$ des kommutativen Ringes $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ zuordnet, eine Garbe von kommutativen Gruppen ist.

Diese Garbe bekommt einen eigenen Namen.

Zu einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ nennt man die auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ durch

$$\Gamma\big(U, \mathcal{O}_X^\times\big) := (\Gamma(U, \mathcal{O}_X))^\times$$

definierte Garbe die *Einheitengarbe* auf X.

Aufgabe 7.6. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von Morphismen beringter Räume wieder ein Morphismus beringter Räume ist.

Aufgabe 7.7. Zeige, dass zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ eines beringten Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus beringter Räume

$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

vorliegt.

Aufgabe 7.8. Es seien X und Y topologische Räume und $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeige, dass dies einen Morphismus lokal beringter Räume induziert.

Aufgabe 7.9. Es seien L und M differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $\varphi\colon L \to M$ eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dies einen Morphismus lokal beringter Räume induziert.

Aufgabe 7.10. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die wir einerseits mit der Garbe der stetigen Funktionen $C^0(-, \mathbb{R})$ und andererseits mit der Garbe der differenzierbaren Funktionen $C^1(-, \mathbb{R})$ zu einem beringten Raum machen. Zeige, dass es einen Morphismus beringter Räume $(M, C^0(-, \mathbb{R})) \to (M, C^1(-, \mathbb{R}))$ gibt, der topologisch die Identität ist, der aber kein Isomorphismus von beringten Räumen ist.

In den folgenden Aufgaben stehen lokale Ringe im Mittelpunkt.

Aufgabe 7.11. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass R genau dann ein lokaler Ring ist, wenn $a + b$ nur dann eine Einheit ist, wenn a oder b eine Einheit ist.

Aufgabe 7.12. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) R hat genau ein maximales Ideal
(2) Die Menge der Nichteinheiten $R \setminus R^{\times}$ bildet ein Ideal in R.

Aufgabe 7.13. Sei R ein lokaler Ring mit Restekörper K. Zeige, dass R und K genau dann die gleiche Charakteristik haben, wenn R einen Körper enthält.

Aufgabe 7.14.*
Sei R ein lokaler Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R. Zeige, dass
$$R^\times \longrightarrow (R/\mathfrak{a})^\times$$
surjektiv ist.

Aufgabe 7.15. Bestimme die Unterringe der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die lokal sind.

Aufgabe 7.16. Es sei X ein topologischer Raum, versehen mit der Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen. Zeige, dass der Restekörper in jedem Punkt von X gleich $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 7.17. Zeige, dass der einzige Körperisomorphismus
$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
die Identität ist.

Aufgabe 7.18. Es sei X ein topologischer Raum, versehen mit der Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen. Wir betrachten dies als einen abstrakten beringten Raum, d.h. wir vergessen, dass es sich um Funktionen handelt, aber wir kennen nach wie vor den topologischen Raum und die Ringe und ihre Restriktionsabbildungen. Lässt sich daraus die Bedeutung der Ringelemente als Funktionen rekonstruieren?

Aufgabe 7.19. Es sei X ein topologischer Raum, versehen mit der Garbe der stetigen komplexwertigen Funktionen. Zeige, dass durch die Zuordnung
$$(X, C^0(-,\mathbb{C})) \longrightarrow (X, C^0(-,\mathbb{C})),$$
die topologisch die Identität ist, und jede Funktion auf einer offenen Menge in ihre komplex-konjugierte Funktion überführt, ein Automorphismus beringter Räume ist. Folgere, dass man aus der Kenntnis von $(X, C^0(-,\mathbb{C}))$ als abstraktem beringten Raum nicht die Wirkungsweise der Ringelemente als Funktionen rekonstruieren kann.

Aufgabe 7.20. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) f ist eine Einheit in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.
(2) Es gibt eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ derart, dass die Einschränkungen $s|_{U_i}$ Einheiten sind.
(3) Der Keim $f_P \in \mathcal{O}_{X,P}$ ist eine Einheit für jeden Punkt $P \in X$.

Aufgabe 7.21. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum. Zeige, dass durch

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \tau(X),\ f \longmapsto X_f,$$

ein Monoidhomomorphismus zwischen dem multiplikativen Monoid des globalen Schnittringes und dem Monoid der offenen Teilmengen von M (mit dem Durchschnitt als Verknüpfung) gegeben ist.

8. Vorlesung - Das Spektrum

Bisher haben wir beringte Räume betrachtet, bei denen der zugrunde liegende Raum in einem gewissen Sinn zuerst da war, ein beliebiger topologischer Raum, eine reelle Mannigfaltigkeit, eine komplexe Mannigfaltigkeit, und woraus sich in natürlicher Weise eine Garbe von kommutativen Ringen als eine Garbe von stetigen, differenzierbaren, holomorphen Funktionen entwickelt hat. Als Funktionen waren die einzelnen Elemente dieser Ringe vertraut, die Ringe selbst waren aber im Allgemeinen sehr groß und unübersichtlich. Man kann sich umgekehrt fragen, inwiefern man jeden kommutativen Ring als einen globalen Schnittring eines beringten Raumes erhalten kann, oder ob es einen beringten Raum gibt, der die Eigenschaften des Ringes besonders gut widerspiegelt und hilft, die Ringe besser zu verstehen. Diese Fragen werden wir in dieser und der folgenden Vorlesung positiv beantworten. Die dabei entstehenden beringten Räume sind zugleich die lokalen Bausteine der algebraischen Geometrie.

8.1. **Das Spektrum eines kommutativen Ringes.**

Definition 8.1. Zu einem kommutativen Ring R nennt man die Menge der Primideale von R das *Spektrum* von R, geschrieben

$$\operatorname{Spek}(R).$$

Man spricht auch von einem *affinen Schema*.

Definition 8.2. Auf dem Spektrum eines kommutativen Ringes R ist die *Zariski-Topologie* dadurch gegeben, dass zu einer beliebigen Teilmenge $T \subseteq R$ die Mengen

$$D(T) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid T \not\subseteq \mathfrak{p}\}$$

als offen erklärt werden.

Für einelementige Teilmengen $T = \{f\}$ schreiben wir $D(f)$ statt $D(\{f\})$.

Lemma 8.3. *Die Zariski-Topologie auf dem Spektrum* $\operatorname{Spek}(R)$ *eines kommutativen Ringes R ist in der Tat eine Topologie.*

Beweis. Es ist $D(0) = \emptyset$ und $D(1) = \operatorname{Spek}(R)$, da jedes Primideal die 0 und kein Primideal die 1 enthält.

Zu einer beliebigen Familie T_i, $i \in I$, aus Teilmengen $T_i \subseteq R$ ist

$$\bigcup_{i \in I} D(T_i) \;=\; D\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right).$$

Dabei ist die Inklusion $\subseteq$ klar, da $T_i \subseteq \bigcup_{i \in I} T_i$ gilt und da aus $S \subseteq T$ stets $D(S) \subseteq D(T)$ folgt. Für die andere Inklusion sei $\mathfrak{p} \in D\big(\bigcup_{i \in I} T_i\big)$. D.h. es gibt ein $f \in \bigcup_{i \in I} T_i$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Somit gibt es ein $i \in I$ mit $f \in T_i$ und daher $\mathfrak{p} \in D(T_i)$ für dieses i.

Zu einer endlichen Familie $T_1, \ldots, T_n$ aus Teilmengen $T_i \subseteq R$ ist

$$\bigcap_{i=1}^{n} D(T_i) \;=\; D(T_1 \cdots T_n).$$

Dabei bezeichnet $T_1 \cdots T_n$ die Menge aller Produkte $f_1 \cdots f_n$ mit $f_i \in T_i$. Hierbei ist die Inklusion $\supseteq$ klar. Für die umgekehrte Inklusion sei $\mathfrak{p} \in D(T_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ vorausgesetzt. Das bedeutet, dass es $f_i \in T_i$ mit $f_i \notin \mathfrak{p}$ gibt. Aufgrund der Primidealeigenschaft ist dann $f_1 \cdots f_n \notin \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in D(T_1 \cdots T_n)$. $\square$

Wir betrachten das Spektrum stets als topologischen Raum. Die Primideale sind die Punkte dieses Raumes. Wir schreiben häufig $X = \operatorname{Spek}(R)$ und $x \in X$, um die geometrische Sichtweise zu betonen. Für das Primideal, das durch x repräsentiert wird, schreibt man dann wiederum $\mathfrak{p}_x$.

Die Komplemente der offenen Mengen, also die abgeschlossenen Mengen in der Zariski-Topologie, werden mit

$$V(T) \;=\; \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(R) \mid T \subseteq \mathfrak{p}\}$$

bezeichnet.

Proposition 8.4. *Für das Spektrum $X = \operatorname{Spek}(R)$ eines kommutativen Ringes R gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Es ist $D(T) = D(\mathfrak{a})$, wobei $\mathfrak{a}$ das durch T erzeugte Ideal (Radikal) in R sei. Man kann sich also bei der Beschreibung der offenen Teilmengen auf die Radikale von R beschränken.*
(2) *Für eine Familie $\mathfrak{a}_i$, $i \in I$, von Idealen in R ist*

$$\bigcup_{i \in I} D(\mathfrak{a}_i) \;=\; D\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right).$$

(3) *Für eine endliche Familie $\mathfrak{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$, von Idealen in R ist*

$$\bigcap_{i=1}^{n} D(\mathfrak{a}_i) \;=\; D\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i\right) \;=\; D(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n).$$

(4) *Es ist $D(\mathfrak{a}) = X$ genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ das Einheitsideal ist.*
(5) *Es ist $D(\mathfrak{a}) \subseteq D(\mathfrak{b})$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{b})$ gilt.*

(6) *Das Spektrum ist genau dann leer, wenn R der Nullring ist.*
(7) *Es ist $D(\mathfrak{a}) = \emptyset$ genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ nur nilpotente Elemente enthält.*
(8) *Die offenen Mengen $D(f)$, $f \in R$, bilden eine Basis der Topologie.*
(9) *Eine Familie von offenen Mengen $D(\mathfrak{a}_i)$, $i \in I$, ist genau dann eine Überdeckung von X, wenn die Ideale $\mathfrak{a}_i$ zusammen das Einheitsideal erzeugen.*

Beweis. (1). Die Inklusion $\subseteq$ ist klar. Die andere Inklusion beweisen wir durch Kontraposition und nehmen $\mathfrak{p} \notin D(T)$ an. Dann ist $T \subseteq \mathfrak{p}$ und somit gilt

$$\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{p},$$

da ein Primideal ein Radikalideal ist. Daher ist auch $\mathfrak{p} \notin D(\operatorname{rad}(\mathfrak{a}))$. (2) und (3) sind klar nach (1) und dem Beweis zu Lemma 8.3. (4). Wenn $\mathfrak{a}$ nicht das Einheitsideal ist, so gibt es nach Aufgabe 8.1 ein maximales Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$, also $\mathfrak{m} \notin D(\mathfrak{a})$. (5). Die Implikation von rechts nach links ist klar. Für die Umkehrung sei $\mathfrak{a} \not\subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{b})$ vorausgesetzt. Dann gibt es ein $f \in \mathfrak{a}$ mit $f^n \notin \mathfrak{b}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es auch ein Primideal $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Also ist $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{p} \notin D(\mathfrak{b})$. (6). Der Nullring besitzt kein Primideal. Ein vom Nullring verschiedener kommutativer Ring besitzt nach Aufgabe 8.1 maximale Ideale. (7). Jedes Primideal enthält sämtliche nilpotenten Elemente, also ist $V(\mathfrak{a}) = X$ für ein solches Ideal. Wenn dagegen $\mathfrak{a}$ ein nicht nilpotentes Element f enthält, so gibt es nach Aufgabe 8.5 auch ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$, also ist $\mathfrak{p} \in D(f) \subseteq D(\mathfrak{a})$. (8). Dies folgt direkt aus $D(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$. (9) folgt aus und (2) und (4). $\square$

Proposition 8.5. *Für das Spektrum $X = \operatorname{Spek}(R)$ eines kommutativen Ringes R gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Der Abschluss einer Teilmenge $T \subseteq X$ ist $V\left(\bigcap_{x \in T} \mathfrak{p}_x\right)$.*
(2) *Der Abschluss eines Punktes $x \in X$ ist $V(\mathfrak{p}_x)$.*
(3) *Ein Punkt $x \in \operatorname{Spek}(R)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{p}_x$ ein maximales Ideal ist.*

Beweis. (1). Für $y \in T$ ist $y \in V(\mathfrak{p}_y) \subseteq V\left(\bigcap_{x \in T} \mathfrak{p}_x\right)$, so dass die angegebene Menge eine abgeschlossene Menge ist, die T umfasst. Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal mit $\mathfrak{q} \in V\left(\bigcap_{x \in T} \mathfrak{p}_x\right)$, also $\bigcap_{x \in T} \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{q}$. Um zu zeigen, dass $\mathfrak{q}$ auch zum Abschluss von T gehört, muss man zeigen, dass T jede offene Umgebung von $\mathfrak{q}$ schneidet. Sei also $\mathfrak{q} \in D(f)$, d.h. $f \notin \mathfrak{q}$. Dann ist auch $f \notin \bigcap_{x \in T} \mathfrak{p}_x$ und somit gibt es ein $x \in T$ mit $f \notin \mathfrak{p}_x$. Also ist $\mathfrak{p}_x \in D(f)$ und somit $T \cap D(f) \neq \emptyset$. (2) ist ein Spezialfall von (1). (3) folgt aus (2). $\square$

Korollar 8.6. *Das Spektrum $X = \operatorname{Spek}(R)$ eines kommutativen Ringes R ist quasikompakt.*

Beweis. Nach Proposition 8.4 (9) ist $X = \bigcup_{i \in I} D(\mathfrak{a}_i)$ genau dann, wenn die Ideale $\mathfrak{a}_i$, $i \in I$, zusammen das Einheitsideal erzeugen. Das von der Familie erzeugte Ideal besteht aus allen endlichen Summen $f_1 + \cdots + f_n$ mit $f_j \in \mathfrak{a}_{i_j}$.

Wenn also das Einheitsideal erzeugt wird, so bedeutet dies, dass es eine endliche Auswahl $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ und Elemente $f_j \in \mathfrak{a}_{i_j}$ mit $\sum_{j=1}^n f_j = 1$ gibt. Dann ist aber

$$X = D(1) = \bigcup_{j=1}^n D(f_j) = \bigcup_{j=1}^n D(\mathfrak{a}_{i_j})$$

und somit ist eine endliche überdeckende Teilfamilie gefunden. □

Das Spektrum ist nur in Ausnahmesituationen ein Hausdorffraum, d.h. im Allgemeinen kann man zwei Punkte des Spektrums nicht durch offene Umgebungen trennen.

Beispiel 8.7. Ein Körper hat bekanntlich nur zwei Ideale, nämlich das Einheitsideal K, das kein Primideal ist, und das Nullideal 0, das ein Primideal ist. Das Spektrum eines Körpers besteht also aus einem einzigen Punkt.

Beispiel 8.8. Die Primideale in $\mathbb{Z}$ sind einerseits die maximalen Ideale (p), wobei p eine Primzahl ist, und andererseits das Nullideal 0. Die maximalen Ideale bilden die abgeschlossenen Punkte von Spek$\,(\mathbb{Z})$. Das Nullideal ist darin ein weiterer nicht abgeschlossener Punkt. Die einzige abgeschlossene Menge, in der dieser Punkt enthalten ist, ist die ganze Menge. Die abgeschlossenen Mengen in Spek$\,(\mathbb{Z})$ sind neben der Gesamtmenge die endlichen Teilmengen aus maximalen Idealen.

Man visualisiert Spek$\,(\mathbb{Z})$ als eine (gedachte Gerade), auf der die Primzahlen diskret liegen, während der Nullpunkt ein fetter Punkt ist, der die gesamte Gerade repräsentiert.

Beispiel 8.9. Für den Polynomring $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ über einem Körper K vermitteln die sogenannten Punktideale eine gute geometrische Vorstellung von Spek$\,(R)$. Ein Punktideal hat die Form

$$(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \ldots, X_n - a_n)$$

zu einem festen Tupel $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$. Ein Punktideal ist der Kern des durch $X_i \mapsto a_i$ festgelegten K-Algebrahomomorphismus

$$\varphi_a \colon R \longrightarrow K$$

und daher ein maximales Ideal. Diese Zuordnung definiert insgesamt eine injektive Abbildung

$$K^n \longrightarrow \text{Spek}\,(R).$$

Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, so werden dadurch sogar alle maximale Ideale von R erfasst. Daher stellt man sich das Spektrum des Polynomrings in n Variablen als den affinen Raum vor, der allerdings auch noch weitere nichtabgeschlossene Punkte enthält. Zu einem Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ besitzt $V(f) \cap K^n$ eine anschauliche Interpretation: Es ist $a \in V(f) \cap K^n$ genau dann, wenn $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ ist.

8.2. **Funktorielle Eigenschaften.**

Proposition 8.10. *Es sei*

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Zuordnung*

$$\varphi^*\colon\ \operatorname{Spek}(S) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R),\ \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^*(\mathfrak{p}) := \varphi^{-1}(\mathfrak{p}),$$

ist (wohldefiniert und) stetig.

(2) *Es ist* $(\varphi^*)^{-1}(D(\mathfrak{a})) = D(\mathfrak{a}S)$ *für jedes Ideal* $\mathfrak{a} \subseteq R$.

(3) *Für einen weiteren Ringhomomorphismus*

$$\psi\colon\ S \longrightarrow T$$

gilt $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Beweis. Die Abbildung ist nach Aufgabe 8.9 wohldefiniert. Zur Stetigkeit ist die Aussage (2) zu zeigen. Wir argumentieren mit den abgeschlossenen Mengen. Für ein Primideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spek}(S)$ ist $\varphi^*(\mathfrak{q}) \in V(\mathfrak{a})$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ist. Dies ist äquivalent zu $\varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{q}$ und ebenso zu $\mathfrak{a}S \subseteq \mathfrak{q}$. (3) ist klar. $\square$

Die in der vorstehenden Aussage eingeführte stetige Abbildung heißt *Spektrumsabbildung* (zu dem gegebenen Ringhomomorphismus). Bei einem Unterring $R \subseteq S$ geht es einfach um die Zuordnung $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \cap R$. In diesem Fall spricht man auch von „Runterschneiden".

Proposition 8.11. *Es sei R ein kommutativer Ring. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu einem Ideal* $\mathfrak{a} \subseteq R$ *und der Restklassenabbildung*

$$q\colon\ R \longrightarrow R/\mathfrak{a}$$

ist die Spektrumsabbildung

$$q^*\colon\ \operatorname{Spek}(R/\mathfrak{a}) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

eine abgeschlossene Einbettung, deren Bild $V(\mathfrak{a})$ *ist.*

(2) *Zu einem multiplikativen System* $M \subseteq R$ *ist die zur kanonischen Abbildung*

$$\iota\colon\ R \longrightarrow R_M$$

gehörige Abbildung

$$\iota^*\colon\ \operatorname{Spek}(R_M) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

injektiv, und das Bild besteht aus der Menge der Primideale von R, die zu M disjunkt sind.

(3) *Zu* $f \in R$ *ist die zur kanonischen Abbildung*

$$\iota\colon\ R \longrightarrow R_f$$

gehörige Abbildung

$$\iota^*\colon\ \operatorname{Spek}(R_f) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

eine offene Einbettung, deren Bild gleich $D(f)$ *ist.*

Beweis. (1) folgt aus Aufgabe 8.6: Die Primideale in $R/\mathfrak{a}$ entsprechen über $\mathfrak{p} \mapsto q^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$ den Primidealen von R, die $\mathfrak{a}$ enthalten. Die angegebene Abbildung ist also bijektiv und hat das beschriebene Bild. Zu einem Ideal $\mathfrak{b} \subseteq R/\mathfrak{a}$ und einem Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R/\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ genau dann, wenn

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{a} \,=\, q^{-1}(\mathfrak{b}) \,\subseteq\, \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$$

gilt. Also ist das Bild von $V(\mathfrak{b})$ gleich $V(\mathfrak{b}+\mathfrak{a})$ und damit abgeschlossen. Für (2) siehe Aufgabe 8.7. (3). Da für ein Primideal $\mathfrak{p}$ und ein Element $f \in R$ die Beziehung $f \notin \mathfrak{p}$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{p}$ zum multiplikativen System $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ disjunkt ist, folgt aus Teil (2), dass die Abbildung injektiv ist und dass ihr Bild gleich $D(f)$ ist. Das gleiche Argument, angewendet auf $g \in R$ bzw. $\frac{g}{1} \in R_f$ zeigt, dass das Bild von $D(g) \subseteq \operatorname{Spek}(R_f)$ gleich $D(fg)$ und damit offen ist. □

Lemma 8.12. *Es sei*

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus zwischen zwei kommutativen Ringen und es sei

$$\varphi^*\colon\ \operatorname{Spek}(S) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R),\ \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^*(\mathfrak{p}),$$

die zugehörige Spektrumsabbildung. Dann ist die Faser über einem Primideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spek}(R)$ *gleich* $\operatorname{Spek}\big((S/\mathfrak{q}S)_{\varphi(R\setminus\mathfrak{q})}\big)$. *D.h. die Faser besteht aus allen Primidealen* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(S)$ *mit* $\mathfrak{q}S \subseteq \mathfrak{p}$ *und mit* $\mathfrak{p} \cap \varphi(R \setminus \mathfrak{q}) = \emptyset$.

Beweis. Aufgrund von Proposition 8.11 müssen wir nur die zweite Formulierung beweisen. Für ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq S$ gilt $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ genau dann, wenn sowohl $\varphi(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{p}$ als auch $\varphi(R \setminus \mathfrak{q}) \subseteq S \setminus \mathfrak{p}$ gilt. Die erste Bedingung ist zu $\mathfrak{q}S \subseteq \mathfrak{p}$ und die zweite Bedingung ist zu

$$\varphi(R \setminus \mathfrak{q}) \cap \mathfrak{p} \,=\, \emptyset$$

äquivalent. □

Insbesondere ist die Faser eines Spektrumsmorphismus über einem Punkt selbst wieder das Spektrum eines Ringes. Ein Spezialfall der vorstehenden Aussage ist, dass die Faser über einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ gleich $\operatorname{Spek}(S/\mathfrak{m}S)$ ist, da in diesem Fall aus $\mathfrak{m}S \subseteq \mathfrak{p}$ sofort $\mathfrak{m} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ folgt und wegen der Maximalität Gleichheit gelten muss. Bei einem Integritätsbereich R und dem Nullideal erübrigt es sich, das Erweiterungsideal zu betrachten, die Faser wird einfach durch $\operatorname{Spek}\big(S_{\varphi(R\setminus\{0\})}\big)$ beschrieben.

Korollar 8.13. *Es sei*

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen und es sei

$$\varphi^*\colon\ \operatorname{Spek}(S) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R),\ \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^*(\mathfrak{p}),$$

die zugehörige Spektrumsabbildung. Dann ist die Faser über einem Primideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spek}(R)$ *genau dann leer, wenn* $\mathfrak{q}S \cap \varphi(R \setminus \mathfrak{q}) \neq \emptyset$.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 8.12 und Proposition 8.4 (6). □

8. Arbeitsblatt

Aufgabe 8.1. Sei R ein vom Nullring verschiedener kommutativer Ring. Zeige unter Verwendung des Lemmas von Zorn, dass es maximale Ideale in R gibt.

Aufgabe 8.2. Zeige, dass ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in einem kommutativen Ring R ein Primideal ist.

Aufgabe 8.3.*

Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Ideal. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ genau dann ein Primideal ist, wenn der Restklassenring $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 8.4. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring R. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ genau dann ein Primideal ist, wenn $\mathfrak{a}$ der Kern eines Ringhomomorphismus $\varphi\colon\ R \to K$ in einen Körper K ist.

Aufgabe 8.5. Es sei R ein kommutativer Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $M \subseteq R$ ein multiplikatives System mit $\mathfrak{a} \cap M = \emptyset$. Zeige mit dem Lemma von Zorn, dass es dann auch ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ und mit $\mathfrak{p} \cap M = \emptyset$ gibt.

Aufgabe 8.6. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/\mathfrak{a}$. Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die $\mathfrak{a}$ umfassen.

Aufgabe 8.7. Sei R ein Integritätsbereich und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass die Primideale in R_S genau denjenigen Primidealen in R entsprechen, die mit S einen leeren Durchschnitt haben.

Aufgabe 8.8. Beschreibe das Spektrum $\operatorname{Spek}(R_{\mathfrak{p}})$ einer Lokalisierung eines kommutativen Ringes R an einem Primideal $\mathfrak{p}$.

Aufgabe 8.9. Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in S. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in R ist.

Zeige durch ein Beispiel, dass das Urbild eines maximalen Ideales kein maximales Ideal sein muss.

Aufgabe 8.10. Es sei

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus zwischen den kommutativen Ringen R und S und es sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(S)$ ein Primideal. Zeige, dass es natürliche Ringhomomorphismen

$$R_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \longrightarrow S_{\mathfrak{p}}$$

(zwischen den Lokalisierungen) und

$$\kappa\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})\big) \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p})$$

(zwischen den Restekörpern) gibt.

Aufgabe 8.11.*

Sei K ein Körper und seien R und S integre, endlich erzeugte K-Algebren. Es sei

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow S$$

ein K-Algebrahomomorphismus und $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal in S mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$. Die Abbildung induziere einen Isomorphismus $R_{\mathfrak{m}} \to S_{\mathfrak{n}}$. Zeige, dass es dann auch ein $f \in R$, $f \notin \mathfrak{m}$, gibt derart, dass $R_f \to S_{\varphi(f)}$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 8.12. Zeige, dass die Spektrumsabbildung zur Reduktion

$$R \longrightarrow R/\mathfrak{n}_R$$

eines kommutativen Ringes R eine Homöomorphie ist.

Aufgabe 8.13. Sei R ein kommutativer Ring, der einen Körper der positiven Charakteristik $p > 0$ enthalte (dabei ist p eine Primzahl). Zeige, dass die Abbildung

$$R \longrightarrow R,\ f \longmapsto f^p,$$

ein Ringhomomorphismus ist, den man den *Frobeniushomomorphismus* nennt.

Aufgabe 8.14. Es sei R ein kommutativer Ring der positiven Charakteristik $p > 0$. Zeige, dass die Spektrumsabbildung zum Frobeniushomomorphismus

$$R \longrightarrow R,\ f \longmapsto f^p,$$

eine Homöomorphie ist.

Aufgabe 8.15. Es sei R ein kommutativer Ring. Bestimme die Fasern zur Spektrumsabbildung zur Ringerweiterung $R \subseteq R[X_1, \ldots, X_n]$.

Aufgabe 8.16. Bestimme die Fasern der Spektrumsabbildung zu $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$.

Wenn der Grundkörper die komplexen Zahlen sind, so gibt es auf dem $\mathbb{C}$-Spektrum auch eine komplexe Topologie, die wesentlich feiner als die Zariski-Topologie ist. Dies wird in den folgenden Aufgaben entwickelt.

Aufgabe 8.17. Es sei R eine endlich erzeugte kommutative $\mathbb{C}$-Algebra. Zeige, dass es auf dem $\mathbb{C}$-Spektrum $\mathbb{C}\text{−Spek}\ (R)$ eine *natürliche Topologie* (oder *komplexe Topologie*) gibt, die im Falle des Polynomringes $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ mit der metrischen Topologie auf dem $\mathbb{C}^n$ übereinstimmt. Zeige ferner, dass zu einem $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ zwischen endlich erzeugten $\mathbb{C}$-Algebren R und S die induzierte Abbildung

$$\mathbb{C}-\text{Spek}\ (S) \longrightarrow \mathbb{C}-\text{Spek}\ (R)$$

stetig in der natürlichen Topologie ist.

Aufgabe 8.18. Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto P(z),$$

die Eigenschaft besitzt, dass Urbilder von beschränkten Teilmengen $T \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt sind.

Aufgabe 8.19. Es seien $F_1, \ldots, F_k \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ Polynome mit der Eigenschaft, dass der dadurch definierte $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismus

$$\mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_k] \longrightarrow \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n],\ Y_j \longmapsto F_j,$$

ganz ist. Zeige, dass die zugehörige Abbildung

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^k,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_n)),$$

die Eigenschaft besitzt, dass Urbilder von beschränkten Teilmengen $T \subseteq \mathbb{C}^k$ wieder beschränkt sind.

Man folgere, dass in der vorstehenden Situation die Abbildung F eigentlich ist, dass also Urbilder kompakter Teilmengen wieder kompakt sind, und dass F abgeschlossen ist.

Aufgabe 8.20. Bestimme die Fasern der Spektrumsabbildung zu $\mathbb{Q}[X] \subseteq \mathbb{R}[X]$. Welche sind endlich?

Aufgabe 8.21. Es sei $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen und es sei

$$\varphi^*\colon \text{ Spek}\,(S) \longrightarrow \text{Spek}\,(R),\, \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^*(\mathfrak{p}),$$

die zugehörige Spektrumsabbildung. Zeige, dass die Faser über einem Primideal $\mathfrak{p} \in \text{Spek}\,(R)$ in kanonischer Weise homöomorph zu $\text{Spec}\,(S \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}))$ ist.

9. Vorlesung - Affine Schemata

9.1. **Affine Schemata.**

Es sei

$$X = \text{Spek}\,(R)$$

das mit der Zariski-Topologie versehene Spektrum eines kommutativen Ringes R. Wenn R ein Körper ist, so besteht das Spektrum allein aus einem einzigen Punkt, nämlich dem Nullideal, das zugleich das maximale Ideal ist, und beinhaltet so gesehen sehr wenig Information. Der kontravariante Funktor

$$\text{Kom Ringe} \longrightarrow \text{Top},\, R \longmapsto \text{Spek}\,(R),$$

verliert also Information. Wir wollen dass Spektrum mit einer zusätztlichen Struktur anreichern, damit man daraus den Ring rekonstruieren kann. Dazu definieren wir eine (Struktur-)Garbe auf dem Spektrum. Zu einem Ring ist dann das Spektrum zusammen mit dieser Strukturgarbe eine sinnvolle Geometrisierung, nämlich ein beringter Raum.

Beispiel 9.1. Es sei $X = \text{Spek}\,(R)$ das Spektrum eines kommutativen Ringes R. Darauf definiert man eine Prägarbe von kommutativen Ringen, indem man zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ die Festlegung

$$\mathcal{P}(U) = \text{colim}_{U \subseteq D(f)}\, R_f$$

macht, mit den natürlichen Ringhomomorphismen $R_f \to R_g$ zu

$$U \subseteq D(g) \subseteq D(f).$$

Dies ist mit den natürlichen Ringhomomorphismen eine Prägarbe. Dabei ist $\mathcal{P}(D(f)) = R_f$ und insbesondere $\mathcal{P}(X) = R$, da das gerichtete System das finale Objekt $D(f)$ enthält. Der Halm dieser Prägarbe in einem Punkt $\mathfrak{p} \in X$ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{colim}_{\mathfrak{p} \in U} \mathcal{P}(U) &= \operatorname{colim}_{\mathfrak{p} \in D(f)} \mathcal{P}(D(f)) \\ &= \operatorname{colim}_{f \notin \mathfrak{p}} R_f \\ &= R_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Dies ist keine Garbe. Ihre Vergarbung ist die Strukturgarbe auf dem Spektrum.

Definition 9.2. Es sei $X = \operatorname{Spek}(R)$ das Spektrum eines kommutativen Ringes R. Unter der *Strukturgarbe* auf X versteht man die Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \subseteq X$ den kommutativen Ring

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \Big\{ (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U} \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} R_{\mathfrak{p}} \mid \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es } a, b \in R \text{ mit } \mathfrak{p} \in D(b) \subseteq U \text{ und } s_{\mathfrak{q}} = \frac{a}{b} \text{ in } R_{\mathfrak{q}} \text{ für alle } \mathfrak{q} \in D(b) \Big\}$$

und jeder Inklusion $U \subseteq U'$ die natürliche Projektion zuordnet.

Lemma 9.3. *Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ auf dem Spektrum $X = \operatorname{Spek}(R)$ eines kommutativen Ringes R ist eine Garbe von kommutativen Ringen.*

Beweis. Die angegebene Definition ist einfach die Vergarbung der in Beispiel 9.1 beschriebenen Prägarbe, wobei wir lediglich die Verträglichkeitsbedingung statt mit beliebigen offenen Umgebungen mit den Basisumgebungen formuliert haben. □

Definition 9.4. Das Spektrum $X = \operatorname{Spek}(R)$ eines kommutativen Ringes R zusammen mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ nennt man das *affine Schema* zu R.

Ein Element $q \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ nennt man eine auf U definierte algebraische (oder rationale oder reguläre) Funktion.

Bemerkung 9.5. Zu einem Integritätsbereich R lässt sich die Strukturgarbe besonders einfach beschreiben, zu einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ ist einfach

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in U} R_{\mathfrak{p}},$$

wobei der Durchschnitt im Quotientenkörper $Q(R)$ genommen wird, in dem sämtliche Lokalisierungen $R_{\mathfrak{p}}$ Unterringe sind. Die Funktionen auf U sind also einfach diejenigen rationalen Elemente aus $Q(R)$, die in allen Punkten aus U definiert sind. Dabei gilt

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} R_{\mathfrak{p}} = R$$

nach Lemma 16.4 (Kommutative Algebra). Entsprechend gilt

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in D(f)} R_{\mathfrak{p}} = R_f .$$

Wenn eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ vorliegt, so ist

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in U} R_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in D(f_i)} R_{\mathfrak{p}} \right) = \bigcap_{i \in I} R_{f_i} .$$

Beispiel 9.6. Wir betrachten $R = K[X,Y]/(XY)$ über einem Körper K. Auf der offenen Menge

$$U = D(X,Y) = D(X) \cup D(Y) = \operatorname{Spec}(R) \setminus \{(X,Y)\}$$

ist diejenige Funktion, die auf der (punktierten) Geraden $V(X) \cap U = D(Y)$ den Wert 0 und auf der (punktierten) Geraden $V(Y) \cap U$ den Wert 1 besitzt, eine algebraische Funktion. Durch diese Festlegung ist für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in U$ ein $s_{\mathfrak{p}} \in R_{\mathfrak{p}}$ gegeben. Bei

$$\mathfrak{p} \in V(X) \cap U = D(Y)$$

ist $0 = \frac{0}{Y}$ eine Beschreibung als Bruch und bei

$$\mathfrak{p} \in V(Y) \cap U = D(X)$$

ist $1 = \frac{X}{X}$ eine Beschreibung als Bruch.

Bemerkung 9.7. Zu einem Integritätsbereich R mit Quotientenkörper $Q(R)$ und einer rationalen Funktion $q \in Q(R)$ gibt es eine größte offene Menge $U \subseteq \operatorname{Spek}(R)$, auf der q definiert ist. Es ist nämlich $U = D(\mathfrak{a})$ mit dem sogenannten *Nennerideal*

$$\mathfrak{a} = \{r \in R \mid rq \in R\}.$$

Wenn $q \in R_{\mathfrak{p}}$ gilt, so ist $q = \frac{s}{r}$ mit $r \notin \mathfrak{p}$, r gehört zum Nennerideal und somit ist $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{a})$. Dieses Argument rückwärts gelesen ergibt die andere Implikation. Die Menge $D(f)$ ist der maximale Definitionsort für $1/f$.

Satz 9.8. *Es sei R ein faktorieller Integritätsbereich. Dann ist für offene Mengen $U \subseteq \operatorname{Spek}(R)$ die Zuordnung*

$$U \longrightarrow \operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} R_f$$

gleich der Strukturgarbe auf $\operatorname{Spek}(R)$.

Beweis. Die angegebene Zuordnung ist eine Prägarbe von kommutativen Ringen, deren Vergarbung gleich der Strukturgarbe ist. Wir müssen also zeigen, dass diese Prägarbe im faktoriellen Fall bereits eine Garbe ist. Es sei

$$q \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \subseteq Q(R)$$

von 0 verschieden. Wegen der Faktorialität gibt es eine gekürzte Darstellung

$$q = \frac{a}{f}.$$

Wir behaupten $U \subseteq D(f)$, sei also $\mathfrak{p} \in U$. Da q auf U definiert ist, gibt es nach Bemerkung 8.5 eine Darstellung $q = \frac{b}{g} = \frac{a}{f}$ mit $g \notin \mathfrak{p}$. Dies bedeutet $fb = ag$ in R. Jeder Primfaktor von f teilt ag aber nicht a, also muss er g teilen. Daher umfasst das Radikal von f das Radikal von g und somit ist $\mathfrak{p} \in D(g) \subseteq D(f)$. □

Diese Aussage gilt insbesondere für den Polynomring bzw. den affinen Raum.

Beispiel 9.9. Wir betrachten den Integritätsbereich

$$R = K[X,Y,Z,W]/(WX - ZY)$$

über einem Körper K und die offene Teilemenge $D(X,Y) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$. Nach Bemerkung 8.5 ist

$$q = \frac{Z}{X} = \frac{W}{Y}$$

eine auf U definierte algebraische Funktion, also ein Element aus $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Es gibt aber außer den Einheiten kein Element $f \in R$ mit $(X,Y) \subseteq (f)$, da X und Y irreduzibel sind. Deshalb ist q kein Schnitt der Prägarbe aus Beispiel 9.1 über U, aber ein Schnitt ihrer Vergarbung.

Lemma 9.10. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ das affine Schema zu einem kommutativen Ring R und es sei $x \in X$ ein Punkt, der dem Primideal $\mathfrak{p}$ entspreche. Dann ist der Halm der Strukturgarbe gleich*

$$\mathcal{O}_x = R_{\mathfrak{p}}.$$

Beweis. Dies ergibt sich aus Beispiel 9.1 und Lemma 5.2 (2). □

Korollar 9.11. *Ein affines Schema ist ein lokal beringter Raum.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 9.10 und Satz 16.3 (Kommutative Algebra). □

Lemma 9.12. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ das affine Schema zu einem kommutativen Ring R und es sei $f \in R$. Dann ist*

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = R_f.$$

Insbesondere ist der globale Schnittring gleich $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = R$.

Beweis. Wir beweisen den angeführten Spezialfall. Es gibt einen natürlichen Ringhomomorphismus $R \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Dieser ist injektiv, da man das Nullsein eines Elementes lokal testen kann, vergleiche Lemma Anhang 1.1. Zum Nachweis der Surjektivität sei $q \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ein globales Element. Dies bedeutet, dass es eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$$

und Elemente

$$q_i = \frac{a_i}{f_i^{k_i}},$$

die als Schnitte über

$$D(f_i) \cap D(f_j) \,=\, D(f_i f_j),$$

also als Elemente in $R_{f_i f_j}$ übereinstimmen. Nach Korollar 8.6 können wir annehmen, dass I endlich ist. Ferner können wir die k_i durch ihr Maximum k ersetzen (was natürlich die lokalen Zähler a_i auch ändert). Die Verträglichkeit $\frac{a_i}{f_i^k} = \frac{a_j}{f_j^k}$ bedeutet die Existenz von Gleichungen

$$(f_i f_j)^m a_i f_j^k \,=\, (f_i f_j)^m a_j f_i^k$$

in R, wobei wir m als ein Maximum gewählt haben. Nach Proposition 8.4 ((2), (4)) erzeugen die f_i, $i \in I$, das Einheitsideal. Dies gilt dann auch für die f_i^{m+k}, $i \in I$, d.h. es gibt $g_i \in R$ mit

$$1 \,=\, \sum_{i \in I} g_i f_i^{m+k}.$$

Wir setzen

$$a \,:=\, \sum_{i \in I} g_i a_i f_i^m.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} a f_j^{m+k} &= \left(\sum_{i \in I} g_i a_i f_i^m \right) f_j^{m+k} \\ &= \sum_{i \in I} g_i (f_i f_j)^m a_i f_j^k \\ &= \sum_{i \in I} g_i (f_i f_j)^m a_j f_i^k \\ &= a_j f_j^m \left(\sum_{i \in I} g_i f_i^{m+k} \right) \\ &= a_j f_j^m . \end{aligned}$$

Dies bedeutet wiederum $a = \frac{a_j}{f_j^k} = q_j$ in R_{f_j}, d.h. der Schnitt wird von einem Ringelement repräsentiert.

Wir betrachten nun die Situation auf $D(f)$. Diese entspricht aber der behandelten Situation, wenn man R_f als neuen Ring ansetzt. □

Lemma 9.13. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ das affine Schema zu einem kommutativen Ring R und es sei $f \in R$. Dann ist $D(f) = \operatorname{Spec}(R_f)$.*

Beweis. Nach Proposition 8.11 (3) induziert der kanonische Ringhomomorphismus $R \to R_f$ eine offene Einbettung

$$\operatorname{Spek}(R_f) \longrightarrow D(f) \subseteq \operatorname{Spek}(R).$$

Nach Satz 9.12 ist links und rechts der Schnittring gleich R_f. Entsprechendes gilt für jede offene Teilmenge $D(g) \subseteq D(f)$, und dadurch ist die Strukturgarbe links und rechts festgelegt, so dass ein Isomorphismus von beringten Räumen vorliegt. □

9. Arbeitsblatt

Aufgabe 9.1. Bestimme diejenigen Unterringe von $\mathbb{Q}$, die als Schnittringe auf $\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$ und diejenigen Unterringe, die als Halme in $\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$ auftreten.

Aufgabe 9.2. Es sei $T \subseteq \mathbb{P}$ eine Teilmenge der Primzahlen. Zeige, dass die Menge

$$R_T = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \text{ lässt sich mit einem Nenner schreiben, in dem nur Primzahlen aus } T \text{ vorkommen}\}$$

ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist. Was ergibt sich bei $T = \emptyset$, $T = \{3\}$, $T = \{2,5\}$, $T = \mathbb{P}$?

Aufgabe 9.3. Es sei $R = \mathbb{Z}[\frac{2}{3}]$ der von $\mathbb{Z}$ und $2/3$ erzeugte Unterring von $\mathbb{Q}$. Zeige, dass R alle rationalen Zahlen enthält, die sich mit einer Potenz von 3 im Nenner schreiben lassen.

Aufgabe 9.4. Sei R ein kommutativer Ring und sei $f \in R$ mit zugehöriger Nenneraufnahme R_f. Beweise die R-Algebraisomorphie

$$R_f \cong R[T]/(Tf - 1).$$

Aufgabe 9.5. Es sei R ein kommutativer Ring und $f, g \in R$ Elemente. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Es ist $D(f) \subseteq D(g)$ (im Spektrum von R).
(2) Es ist $\operatorname{rad}((f)) \subseteq \operatorname{rad}((g))$.
(3) Es ist $f \in \operatorname{rad}((g))$.
(4) Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n \in (g)$
(5) Das Element g teilt eine Potenz von f.
(6) Es ist g eine Einheit in R_f.
(7) Es gibt einen R-Algebrahomomorphismus $R_g \to R_f$.

Aufgabe 9.6. Sei R ein kommutativer Ring, $f \in R$ ein Element und R_f die zugehörige Nenneraufnahme. Zeige, dass f genau dann nilpotent ist, wenn R_f der Nullring ist.

Aufgabe 9.7. Es sei R ein Integritätsbereich und $U \subseteq X = \text{Spek}\,(R)$ eine offene Teilmenge. Zeige

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{f \neq 0,\, D(f) \subseteq U} R_f,$$

wobei der Durchschnitt im Quotientenkörper $Q(R)$ genommen wird.

Aufgabe 9.8. Sei R ein Hauptidealbereich mit Quotientenkörper $Q = Q(R)$. Zeige, dass jeder Zwischenring S, $R \subseteq S \subseteq Q$, eine Nenneraufnahme ist.

Aufgabe 9.9. Zeige, dass für die in Beispiel 9.6 betrachtete offene Menge $U = D(X + Y)$ gilt. Beschreibe die dort betrachtete Funktion mit dem Nenner $X + Y$.

Aufgabe 9.10. Es sei R ein faktorieller Integritätsbereich und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal der Höhe ≥ 2. Zeige, dass die Restriktionsabbildung

$$R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(X \setminus \{\mathfrak{m}\}, \mathcal{O}_X)$$

bijektiv ist.

Aufgabe 9.11. Finde zu $R = K[X, Y, Z]/(XY - Z^n)$ auf $U = D(X, Z) \subseteq \text{Spek}\,(R)$ definierte rationale Funktionen, die man nicht mit einem optimalen Nenner schreiben kann.

Aufgabe 9.12. Es sei $X = \text{Spek}\,(R)$ das Spektrum eines kommutativen Ringes R und $f \in R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass $D(f)$ mit der Invertierbarkeitsort X_f übereinstimmt.

Aufgabe 9.13. Es sei $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen. Zeige, dass man die Spektrumsabbildung

$$\varphi^*\colon \text{ Spek}\,(S) \longrightarrow \text{Spek}\,(R)$$

in natürlicher Weise zu einem Morphismus lokal beringter Räume machen kann.

10. Vorlesung - Schemata

10.1. Schemata.

Definition 10.1. Ein *Schema* ist ein beringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ derart, dass es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ gibt, für die die $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ affine Schemata sind.

Lemma 10.2. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $P \in X$ ein Punkt. Dann gibt es zu jeder offenen Umgebung $P \in U$ eine offene affine Umgebung $P \in V \subseteq U$.*

Beweis. Es sei

$$P \in W = \operatorname{Spec}(R)$$

eine offene affine Umgebung von P. Dann ist $P \in U \cap W \subseteq \operatorname{Spek}(R)$ eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spek}(R)$ und damit von der Form $U \cap W = D(\mathfrak{a})$ mit einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$. Wegen $D(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$ ist

$$P \in D(f) \subseteq D(\mathfrak{a}) \subseteq U$$

für ein f und $D(f)$ ist affin nach Lemma 9.13. $\square$

Lemma 10.3. *Eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ eines Schemas $(X, \mathcal{O}_X)$ besitzt eine Überdeckung mit affinen offenen Mengen und ist somit selbst ein Schema.*

Beweis. Als offene Teilmengen eines beringten Raumes ist U ebenfalls ein beringter Raum. Die Existenz der affinen Überdeckung folgt unmittelbar aus Lemma 10.2. $\square$

Definition 10.4. Eine offene Teilmenge $U \subseteq X = \operatorname{Spek}(R)$ eines affinen Schemas X nennt man ein *quasiaffines Schema*.

Definition 10.5. Zu einem lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ nennt man

$$\operatorname{Spek}(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$$

das *punktierte Spektrum* von R.

Als beringte Räume kann man Schemata grundsätzlich entlang offener Teilmengen im Sinne von Lemma 7.10 miteinander verkleben. Wir geben dafür zwei Beispiele.

Beispiel 10.6. Wir betrachten die affine Gerade zweifach, also $U = \mathbb{A}_K^1 = \operatorname{Spek}(K[S])$ und $V = \mathbb{A}_K^1 = \operatorname{Spek}(K[T])$ mit den offenen Teilmengen $U' = \mathbb{A}_K^1 \setminus \{(S)\} = \operatorname{Spek}(K[S, S^{-1}]) \subset \mathbb{A}_K^1$ und $V' = \mathbb{A}_K^1 \setminus \{(T)\} = \operatorname{Spek}(K[T, T^{-1}]) \subset \mathbb{A}_K^1$. Wir betrachten den Isomorphismus

$$\varphi \colon U' \longrightarrow V',$$

der durch $S \mapsto T$ festgelegt ist und wir wollen U und V im Sinne von Lemma 7.10 miteinander verkleben. Das sich ergebende Gebilde X ist ein Schema, das man die in einem Punkt verdoppelte Gerade nennt. Die beiden durch (S) bzw. (T) gegebenen Punkte auf X nennen wir P bzw. Q. Es liegt das kommutative Diagramm (von Restriktionshomomorphismen)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = K[S] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(V, \mathcal{O}_X) = K[S] & \longrightarrow & \Gamma(U', \mathcal{O}_X) = K[S, S^{-1}] \end{array}$$

vor, wobei wir die Identifizierung $S = T$ vorgenommen haben. Aus der Garbenbedingung folgt

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = K[S]$$

und die globalen Funktionen haben in P und in Q den gleichen Wert. Mit einer ähnlichen Überlegung lässt sich zeigen, dass die Halme $\mathcal{O}_{X,P} = \mathcal{O}_{X,Q} = K[S]_{(S)}$ übereinstimmen (alles spielt sich im Funktionenkörper $K(S)$ ab).

Beispiel 10.7. Wir betrachten die affine Gerade zweifach, also $U = \mathbb{A}^1_K = \operatorname{Spek}(K[S])$ und $V = \mathbb{A}^1_K = \operatorname{Spek}(K[T])$ mit den offenen Teilmengen $U' = \mathbb{A}^1_K \setminus \{(S)\} = \operatorname{Spek}(K[S, S^{-1}]) \subset \mathbb{A}^1_K$ und $V' = \mathbb{A}^1_K \setminus \{(T)\} = \operatorname{Spek}(K[T, T^{-1}]) \subset \mathbb{A}^1_K$. Wir betrachten den Isomorphismus

$$\varphi \colon U' \longrightarrow V',$$

der durch $S \mapsto T^{-1}$ festgelegt ist und wir wollen U und V im Sinne von Lemma 7.10 miteinander verkleben. Das sich ergebende Gebilde $X = \mathbb{P}^1_K$ ist ein Modell für die projektive Gerade über K. Die beiden durch (S) bzw. (T) gegebenen Punkte auf X nennen wir P bzw. Q. Wenn bei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ (mit der metrischen Topologie) eine Folge in U' gegen $P \in U$ konvergiert, so divergiert sie in V bestimmt gegen unendlich.

Es liegt das kommutative Diagramm (von Restriktionshomomorphismen)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\left(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}\right) & \longrightarrow & \Gamma\left(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}\right) = K[S] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma\left(V, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}\right) = K[T] = K[S^{-1}] & \longrightarrow & \Gamma\left(U', \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}\right) = K[S, S^{-1}] \end{array}$$

vor, wobei wir die Identifizierung $S = T^{-1}$ vorgenommen haben. Aus der Garbenbedingung folgt

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = K,$$

da nur die konstanten Funktionen sowohl in $K[S]$ als auch in $K[S^{-1}]$ sind (es wird der Durchschnitt im Funktionenkörper $K(S)$ genommen). Es ist $\mathcal{O}_{X,P} = K[S]_{(S)}$ und $\mathcal{O}_{X,Q} = K[S^{-1}]_{(S^{-1})}$.

10.2. **Morphismen von Schemata.**

Definition 10.8. Ein *Schemamorphismus*

$$\varphi \colon X \longrightarrow Y$$

zwischen Schemata X und Y ist ein Morphismus der lokal beringten Räume.

Wir wollen zuerst die zu einem Ringhomomorphismus $\theta\colon R \to S$ gehörende Spektrumsabbildung

$$\operatorname{Spek}(S) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

zu einem Schemamorphismus machen. Dies ergibt sich als Spezialfall des folgenden Satzes.

Satz 10.9. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum und $Y = \operatorname{Spek}(R)$ ein affines Schema. Dann gibt es zu jedem Ringhomomorphismus $\theta\colon R \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ einen eindeutig bestimmten Morphismus lokal beringter Räume $X \to Y$, der θ als globalen Homomorphismus besitzt.*

Beweis. Wegen Lemma 7.18 muss

$$\varphi(x) = \left\{ f \in R \mid x \notin X_{\theta(f)} \right\} = (\rho_x \circ \theta)^{-1}(\mathfrak{m}_x)$$

für jeden Punkt $x \in X$ sein, wobei $\rho_x\colon \Gamma(X, \mathcal{O}) \to \mathcal{O}_{X,x}$ den Restriktionshomomorphismus in den Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ und $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ das maximale Ideal bezeichnet. Dadurch ist wiederum eine stetige Abbildung festgelegt, da sie ja

$$\varphi^{-1}(D(f)) = X_{\theta(f)}$$

erfüllt, die $D(f)$ nach Proposition 8.4 (8) eine Basis bilden und da die $X_{\theta(f)}$ nach Lemma 7.16 offen sind. Zu jedem $f \in R$ liegen die Ringhomomorphismen

$$R \xrightarrow{\theta} \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(X_{\theta(f)}, \mathcal{O}_X)$$

vor, wobei $\theta(f)$ rechts zu einer Einheit wird. Nach Satz 15.13 (Kommutative Algebra) gibt es daher einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$R_f \longrightarrow \Gamma(X_{\theta(f)}, \mathcal{O}_X),$$

der mit diesem Ringhomomorphismus verträglich ist. Durch die Garbeneigenschaft ist daher auch ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus

$$\Gamma(D(\mathfrak{a}), \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(D(\mathfrak{a})), \mathcal{O}_X)$$

für jede offene Menge $D(\mathfrak{a})$ festgelegt. Es gilt nämlich mit $D(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ die Beziehung

$$\Gamma(D(\mathfrak{a}), \mathcal{O}_Y) = \left\{ (s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} R_{f_i} \mid s_i = s_j \text{ in } R_{f_i f_j} \right\}$$

und

$$\Gamma(\varphi^{-1}(D(\mathfrak{a})), \mathcal{O}_X) = \left\{ (t_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \Gamma(X_{\theta(f_i)}, \mathcal{O}_X) \mid t_i = t_j \text{ in } \Gamma(X_{\theta(f_i f_j)}, \mathcal{O}_X) \right\}.$$

Da wir rechts auf den R_{f_i} bzw. $R_{f_i f_j}$ wohldefinierte Ringhomomorphismen haben, und da dabei die Gleichungen berücksichtigt werden, ergibt sich ein Ringhomomorphismus von oben nach unten. Diese Festlegungen liefern in der Tat einen Morphismus lokal beringter Räume. $\square$

Korollar 10.10. *Es seien R und S kommutative Ringe und $\theta\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Schemamorphismus* $\operatorname{Spek}(S) \to \operatorname{Spek}(R)$, *der θ als globalen Homomorphismus besitzt. Topologisch handelt es sich um die Spektrumsabbildung.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 10.9. Die Überlegung zu Beginn des Beweises von diesem Satz zeigt, dass es sich um die Spektrumsabbildung handelt. □

Korollar 10.11. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum. Dann gibt es einen kanonischen Morphismus lokal beringter Räume* $X \to \operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$. *Dabei wird ein Punkt $x \in X$ auf die Charakteristik seines Restekörpers $\kappa(x)$ abgebildet.*

Beweis. Der kanonische Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

legt nach Satz 10.9 einen eindeutig bestimmten Morphismus lokal beringter Räume

$$X \longrightarrow \operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$$

fest. □

Korollar 10.12. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum. Dann definiert jede globale Funktion $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ einen eindeutig bestimmten Morphismus lokal beringter Räume $X \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$, wobei die Variable (der affinen Geraden) auf f abgebildet wird. Wenn $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ eine K-Algebra über einem Körper K ist, so definiert f auch einen Morphismus lokal beringter Räume $X \to \mathbb{A}^1_K$. Dabei wird ein Punkt $x \in X$ auf den Kern des Ringhomomorphismus*

$$K[T] \longrightarrow \kappa(x),\, T \longmapsto f(x),$$

abgebildet.

Beweis. Das Ringelement $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ definiert einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[T] \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, nämlich den Einsetzungshomomorphismus. Nach Satz 10.9 gibt es dazu einen eindeutig bestimmten Morphismus lokal beringter Räume

$$(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \operatorname{Spek}(\mathbb{Z}[T]) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}.$$

Der Zusatz ergibt sich entsprechend. □

Korollar 10.13. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum. Dann definiert jedes Funktionstupel $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ einen eindeutig bestimmten Morphismus lokal beringter Räume $X \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$, wobei die Variable T_i (des affinen Raumes) auf f_i abgebildet wird. Wenn $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ eine R-Algebra über einem* *kommutativen Ring R ist, so definieren die $f_1, \ldots, f_n$ auch einen Morphismus lokal beringter Räume $X \to \mathbb{A}_R^n$. Dabei wird ein Punkt $x \in X$ auf den Kern des Ringhomomorphismus*

$$R[T_1, \ldots, T_n] \longrightarrow \kappa(x),\, T_i \longmapsto f_i(x),$$

abgebildet.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.3. □

Ein Morphismus in einen affinen Raum ist also nichts anderes als ein Tupel von globalen Funktionen.

Wenn

$$\varphi\colon\ X \longrightarrow Y$$

ein Morphismus ist, so ist für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ auch die induzierte Abbildung

$$\varphi^{-1}(V) \longrightarrow V$$

ein Morphismus. Wenn V zusätzlich affin ist, so wird ein solcher Morphismus lokal (bezogen auf Y) wegen Satz 10.9 durch einen Ringhomomorphismus gegeben. Dies bedeutet, dass ein Schemamorphismus $\varphi\colon\ X \to Y$ mit Hilfe einer affinen Überdeckung

$$Y = \bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spek}(R_i)$$

im Wesentlichen durch die Ringhomomorphismen

$$R_i \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(V_i), \mathcal{O}_X)$$

bestimmt ist.

10.3. **Schema über Basisschema.**

Bei einer kommutativen K-Algebra A über einem Körper K ist durch den kanonischen Ringhomomorphismus $K \to A$ eine kanonische Spektrumsabbildung

$$\operatorname{Spek}(A) \longrightarrow \operatorname{Spek}(K)$$

festgelegt, die ja topologisch einfach die konstante Abbildung ist, die aber dennoch festlegt, wie die Konstanten aus K zu interpretieren sind. Im Kontext von Schemata wird die Rolle eines Grundringes von einem Basisschema übernommen.

Definition 10.14. Ein Schema X zusammen mit einem fixierten Morphismus $p\colon\ X \to S$ zu einem weiteren Schema S heißt ein *Schema über S*. Dabei heißt S das *Basisschema*.

Häufig ist das Basisschema einfach das Spektrum eines Körpers. Wegen Korollar 10.11 ist jedes Schema in eindeutiger Weise ein Schema über Spek$\,(\mathbb{Z})$. Bei einem Schema über Spek$\,(R)$ spricht man auch von einem Schema über R. Die Rolle von Algebrahomomorphismen wird durch Morphismen übernommen, die mit der Basis verträglich sind.

Definition 10.15. Es seien X und Y Schemata über dem Basisschema S. Ein Schemamorphismus $\varphi\colon X \to Y$ heißt *Schemamorphismus über* S, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 10.16. Ein Schemamorphismus $\varphi\colon X \to Y$ heißt *von endlichem Typ*, wenn es eine affine offene Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ derart gibt, dass es endliche affine Überdeckungen

$$\varphi^{-1}(V_i) = \bigcup_{i \in I_j} U_i$$

gibt so, dass zu jedem $i \in I_j$ die Ringhomomorphismen

$$\Gamma(V_j, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$$

von endlichem Typ sind.

10.4. **Einbettungen.**

Definition 10.17. Ein Schemamorphismus $f\colon Y \to X$ heißt *offene Einbettung*, wenn f einen Isomorphismus mit einer offenen Teilmenge von X induziert.

Definition 10.18. Ein Schemamorphismus $f\colon Y \to X$ heißt *abgeschlossene Einbettung*, wenn das Bild $f(Y)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X ist, ein Homöomorphismus $Y \to f(Y)$ vorliegt und der zugehörige Garbenhomomorphismus $\mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_Y$ surjektiv ist.

Definition 10.19. Ein Schemamorphismus $f\colon Y \to X$ heißt *Einbettung*, wenn es eine Faktorisierung

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X$$

mit einer offenen Einbettung g und einer abgeschlossenen Einbettung h gibt.

10. Arbeitsblatt

Aufgabe 10.1. Man gebe ein Beispiel eines quasiaffinen, aber nicht affinen Schemas.

Aufgabe 10.2. Man gebe ein Beispiel eines quasiaffinen, aber nicht quasikompakten Schemas.

Aufgabe 10.3. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum. Zeige, dass jedes Funktionstupel $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ einen eindeutig bestimmten Morphismus lokal beringter Räume $X \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ definiert, wobei die Variable T_i (des affinen Raumes) auf f_i abgebildet wird.

Aufgabe 10.4. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Zeige, dass X genau dann ein affines Schema ist, wenn der kanonische Morphismus

$$X \longrightarrow \operatorname{Spek}\left(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)\right)$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 10.5. Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeige, dass der kanonische Morphismus

$$X \longrightarrow \operatorname{Spek}\left(C^1(X, \mathbb{R})\right)$$

injektiv ist.

Aufgabe 10.6. Es sei R ein kommutativer Ring und A, B seien kommutative R-Algebren. Zeige, dass ein R-Algebrahomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ dasselbe ist wie ein Schemamorphismus $\psi\colon \operatorname{Spek}(B) \to \operatorname{Spek}(A)$ über $\operatorname{Spek}(R)$.

11. Vorlesung - Topologische Eigenschaften

Ein Schema hat, verglichen mit einem metrischen Raum, topologisch eher ungewöhnliche Eigenschaften, die wir hier vorstellen wollen. Wir beginnen mit der Irreduzibilität.

11.1. **Irreduzible Räume.**

Definition 11.1. Ein topologischer Raum V heißt *irreduzibel*, wenn $V \neq \emptyset$ ist und es keine Zerlegung $V = Y \cup Z$ mit abgeschlossenen Mengen $Y, Z \subset V$ gibt.

Lemma 11.2. *Ein topologischer Raum $X \neq \emptyset$ ist genau dann irreduzibel, wenn für nichtleere offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ auch der Durchschnitt $U \cap V$ nicht leer ist.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Definition, da für die abgeschlossenen Teilmengen $Y = X \setminus U$ und $Z = X \setminus V$ die Beziehung $X = Y \cup Z$ genau dann gilt, wenn $U \cap V = \emptyset$ ist. □

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raumes X heißt irreduzibel, wenn sie als topologischer Raum mit der induzierten Topologie irreduzibel ist.

Lemma 11.3. *Es sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist die abgeschlossene Teilmenge*

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$$

genau dann irreduzibel, wenn das Radikal zu $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist.

Beweis. Wir können direkt annehmen, dass $\mathfrak{a}$ ein Radikal ist. Ferner ist es nicht das Einheitsideal. Wenn $V(\mathfrak{a})$ nicht irreduzibel ist, so gibt es eine nichttriviale Zerlegung

$$V(\mathfrak{a}) = Y \cup Z = V(\mathfrak{b}) \cup V(\mathfrak{c}),$$

wobei wir $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ als Radikale ansetzen können. Das bedeutet $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$. Wegen $V(\mathfrak{b}), V(\mathfrak{c}) \subset V(\mathfrak{a})$ ist nach Proposition 8.4 (5)

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$$

Somit gibt es $f \in \mathfrak{b}$, $f \notin \mathfrak{a}$, und $g \in \mathfrak{c}$, $g \notin \mathfrak{a}$. Daher ist

$$fg \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{a},$$

und $\mathfrak{a}$ ist kein Primideal.

Wenn umgekehrt $\mathfrak{a}$ kein Primideal ist, so gibt es Elemente $f, g \notin \mathfrak{a}$ und $fg \in \mathfrak{a}$. Dann ist $D(fg) \subseteq D(\mathfrak{a})$ und somit

$$D(fg) \cap V(\mathfrak{a}) = \emptyset.$$

Da $\mathfrak{a}$ ein Radikal ist, ist $f^n \notin \mathfrak{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Aufgabe 8.5 gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Also ist

$$D(f) \cap V(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$$

und entsprechend für $D(g)$. Nach Lemma 11.2 ist $V(\mathfrak{a})$ nicht irreduzibel. □

Es liegt also durch $\mathfrak{p} \leftrightarrow V(\mathfrak{p})$ eine Korrespondenz zwischen den Primidealen und den abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen des Spektrums vor. Die maximalen Ideale entsprechen den einzelnen abgeschlossenen Punkten, die minimalen Primideale entsprechen den sogenannten irreduziblen Komponenten des Spektrums, siehe weiter unten.

Definition 11.4. Zu einem topologischen Raum X und einer abgeschlossenen irreduziblen Teilmenge $Y \subseteq X$ nennt man einen Punkt $\eta \in Y$ mit der Eigenschaft, dass für jede offene Menge $U \subseteq X$ die Beziehung $U \cap Y \neq \emptyset$ genau dann gilt, wenn $\eta \in U$ ist, den *generischen Punkt* von Y.

Lemma 11.5. *In einem Schema X besitzt jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge $Y \subseteq X$ einen eindeutig bestimmten generischen Punkt.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist Y nicht leer. Sei $P \in Y$ ein Punkt und $P \in W = \operatorname{Spek}(R)$ eine offene affine Umgebung. Es ist dann

$$Y \cap W \subseteq W$$

eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge in einem affinen Schema. Nach Lemma 11.3 ist $Y \cap W = V(\mathfrak{p})$ mit einem Primideal $\mathfrak{p} \in W$. Wir behaupten, dass $\mathfrak{p}$ der generische Punkt von Y ist. Wenn $U \subseteq X$ offen und $Y \cap U$ nicht leer ist, so ist auch $Y \cap U \cap W$ wegen der Irreduzibilität von Y nicht leer und daher $\mathfrak{p} \in U$. Der generische Punkt ist eindeutig bestimmt, da er als Punkt im affinen Schema W eindeutig bestimmt ist. □

11.2. **Die Krulldimension.**

Definition 11.6. Zu einem topologischen Raum X nennt man die maximale Länge von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen

$$X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_{n-1} \subset X_n$$

in X die *Krulldimension* des Raumes.

Lemma 11.7. *Die Krulldimension eines kommutativen Ringes stimmt mit der Krulldimension seines Spektrums* $\operatorname{Spek}(R)$ *überein.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 11.3 und Proposition 8.4 (5). □

11.3. **Noethersche Räume.**

Definition 11.8. Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn in ihm jede aufsteigende Kette

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \ldots$$

von offenen Mengen *stationär* wird, d.h. es gibt ein n mit

$$U_n = U_{n+1} = U_{n+2} = \ldots.$$

Lemma 11.9. *Ein topologischer Raum X ist genau dann noethersch, wenn in ihm jede offene Teilmenge quasikompakt ist.*

Beweis. Zunächst ist in einem noetherschen Raum jede offene Teilmenge selbst noethersch. Für die Hinrichtung genügt es also zu zeigen, dass X quasikompakt ist. Sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung und angenommen, es gäbe keine endliche Teilüberdeckung. Dann kann man eine echt aufsteigende unendliche Kette von offenen Teilmengen der Form

$$V_n = \bigcup_{i \in I_n} U_i$$

mit $I_n \subseteq I$ endlich konstruieren. Sei umgekehrt jede offene Teilmenge quasikompakt und eine aufsteigende Kette $U_k \subseteq U_{k+1}$ gegeben. Dann ist

$$U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$$

offen und quasikompakt und daher gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Dies bedeutet, dass es einen Index n mit $U_n = U_k$ für alle $k \geq n$ gibt. $\square$

Für einen noetherschen Raum gilt: jede nichtleere Teilmenge von offenen Mengen (abgeschlossenen Mengen) besitzt ein maximales (minimales) Element. Dies kann man vorteilhaft als Beweisprinzip einsetzen (*Beweis durch noethersche Induktion*): Man möchte zeigen, dass eine gewisse Eigenschaft E für alle abgeschlossenen Teilmengen gilt, und man betrachtet die Menge derjenigen abgeschlossenen Teilmengen, die E nicht erfüllen. Man möchte zeigen, dass die Menge leer ist, und nimmt an, dass sie nicht leer ist. Dann besitzt sie auch ein minimales Element, und dies muss man dann zum Widerspruch führen. Die Gültigkeit dieses Beweisprinzips beruht darauf, dass man in einer nichtleeren Menge ohne einem minimalen Element eine unendlich absteigende Kette konstruieren kann. Ein typisches Beispiel für dieses Beweisprinzip liefert der Beweis der folgenden Aussage.

Satz 11.10. *Für jeden noetherschen topologischen Raum X gibt es eine eindeutige Zerlegung $X = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ in abgeschlossene irreduzible Teilmengen.*

Beweis. Die Existenz beweisen wir durch noethersche Induktion über die abgeschlossenen Teilmengen von X. Angenommen, nicht jede abgeschlossene Teilmenge habe eine solche Zerlegung. Dann gibt es auch eine minimale Teilmenge, sagen wir $V \subseteq X$, ohne eine solche Zerlegung. Diese Menge V kann nicht irreduzibel sein, sondern es gibt eine nicht-triviale Darstellung $V = V_1 \cup V_2$. Da V_1 und V_2 echte Teilmengen von V sind, gibt es für diese beiden jeweils endliche Darstellungen als Vereinigung von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen. Diese beiden vereinigen sich zu einer endlichen Darstellung von V, was ein Widerspruch ist. Zur Eindeutigkeit. Seien

$$X = V_1 \cup \ldots \cup V_k = W_1 \cup \ldots \cup W_m$$

zwei Zerlegungen in irreduzible Teilmengen (jeweils ohne Inklusionsbeziehung). Es ist

$$V_1 = V_1 \cap X = V_1 \cap (W_1 \cup \ldots \cup W_m) = (V_1 \cap W_1) \cup \ldots \cup (V_1 \cap W_m).$$

Da V_1 irreduzibel ist, muss $V_1 \subseteq W_j$ für ein j sein. Umgekehrt ist mit dem gleichen Argument $W_j \subseteq V_i$ für ein i, woraus $i = 1$ und $V_1 = W_j$ folgt. Ebenso findet sich V_2 etc. in der Zerlegung rechts wieder, so dass die Zerlegung eindeutig ist. $\square$

Die dabei auftretenden Mengen nennt man die *irreduziblen Komponenten* des Raumes.

Definition 11.11. Ein Schema X heißt *noethersch*, wenn es durch endlich viele affine Schemata zu noetherschen Ringen überdeckt werden kann.

Insbesondere ist das Spektrum zu einem noetherschen Ring ein noethersches Schema.

Lemma 11.12. *Ein noethersches Schema ist ein noetherscher topologischer Raum.*

Beweis. Eine endliche Vereinigung von noetherschen Räumen ist wieder noethersch, deshalb können wir direkt davon ausgehen, dass ein Spektrum zu einem noetherschen Ring vorliegt. Wir müssen gemäß Lemma 11.9 zeigen, dass eine jede offene Teilmenge $U = D(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$ quasikompakt ist. Da R noethersch ist, gilt $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_n)$ und daher

$$D(\mathfrak{a}) = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_n)$$

nach Proposition 8.4 (2). Nach Korollar 8.6 in Verbindung mit Proposition 8.11 sind die $D(f_i)$ quasikompakt, also auch ihre endliche Vereinigung. □

Mit unseren bisher entwickelten topologischen Methoden können wir direkt das folgende rein algebraische Resultat beweisen.

Lemma 11.13. *In einem noetherschen kommutativen Ring gibt es nur endlich viele minimale Primideale.*

Beweis. Siehe Aufgabe 11.15. □

11.4. **Integre Schemata.**

Definition 11.14. Ein beringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *reduziert*, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ der Ring $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ reduziert ist.

Definition 11.15. Ein Schema X heißt *integer*, wenn es irreduzibel und reduziert ist.

Lemma 11.16. *In einem integren Schema sind die Restriktionsabbildungen*

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$$

zu $\emptyset \neq V \subseteq U \subseteq X$ injektiv.

Beweis. Sei $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ nicht 0. Die Menge

$$X_f = \{P \in X \mid f(P) \neq 0\}$$

ist offen nach Lemma 7.16 und wegen der Reduziertheit nicht leer. Wegen der Irreduzibilität von X ist $X_f \cap V$ ebenfalls nicht leer und somit ist die Restriktion von f auf V ebenfalls nicht 0. □

Beispiel 11.17. Sei K ein Körper und $R = K[X,Y]/(X^2, XY)$. Es ist $\mathfrak{q} = (X)$ das einzige minimale Primideal von R und daher ist $\operatorname{Spek}(R)$ irreduzibel. Wegen $Y \notin \mathfrak{q}$ und $XY = 0$ gilt in der Lokalisierung $R_{\mathfrak{q}}$ die Gleichheit $X = 0$, und es ist

$$R_{\mathfrak{q}} = K[Y]_{(0)} = K(Y)$$

ein Körper. Die Restriktionsabbildung $R \to R_{\mathfrak{q}}$ ist nicht injektiv. Es ist

$$D(X) = \emptyset,$$

das Element X ist aber in der Lokalisierung $R_{(X,Y)}$ nicht 0.

Lemma 11.18. *In einem integren Schema X ist zu jeder nichtleeren offenen Menge $U \subseteq X$ der Schnittring $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ein Integritätsbereich.*

Beweis. Da U offen und nicht leer ist, gibt es eine nichtleere offene affine Teilmenge

$$V = \text{Spek}\,(R) \subseteq U.$$

Nach Lemma 11.16 genügt es zu zeigen, dass R ein Integritätsbereich ist. Es sei $\mathfrak{a}$ das Nilradikal von R. Wegen der Irreduzibilität von V, die aus der Irreduzibilität von X folgt, ist nach Lemma 11.3 das Ideal $\mathfrak{a}$ ein Primideal. Da die Reduziertheit nach Aufgabe 10.14 eine lokale Eigenschaft ist, gilt $\mathfrak{a} = 0$. Das Nullideal ist also ein Primideal und damit ist R ein Integritätsbereich. □

Lemma 11.19. *Zu einem integren Schema ist der Halm der Strukturgarbe im generischen Punkt ein Körper.*

Beweis. Den Halm kann man ausgehend von einer beliebigen nichtleeren affinen offenen Teilmenge U bestimmen. Diese haben die Form $U = \text{Spek}\,(R)$ mit einem kommutativen Ring R, der aufgrund von Lemma 11.18 ein Integritätsbereich ist. Der generische Punkt entspricht dabei dem Nullideal, und die Lokalisierung am Nullideal ergibt den Quotientenkörper von R. □

Definition 11.20. Zu einem integren Schema nennt man den Halm der Strukturgarbe im generischen Punkt den *Funktionenkörper* von X.

In einem integren Schema ist der Schnittring zu jeder nichtleeren offenen Menge ein Unterring des Funktionenkörpers.

11. Arbeitsblatt

Aufgabe 11.1. Zeige, dass in einem irreduziblen topologischen Raum X jede nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$ dicht ist.

Aufgabe 11.2. Zeige, dass ein metrischer Raum X nur dann irreduzibel ist, wenn er einpunktig ist.

Aufgabe 11.3. Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge mit der induzierten Topologie. Zeige, dass Y genau dann irreduzibel ist, wenn der Abschluss $\overline{Y}$ irreduzibel ist.

Man sagt, dass ein topologischer Raum die *Trennungseigenschaft* T_0 erfüllt, wenn es zu je zwei Punkten $x \neq y$ eine offene Menge U mit $x \in U$ und $y \notin U$ oder eine offene Menge V mit $x \notin V$ und $y \in V$ gibt.

Man sagt, dass ein topologischer Raum die *Trennungseigenschaft* T_1 erfüllt, wenn jeder Punkt $x \in X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 11.4. Zeige, dass ein Schema die Trennungseigenschaft $T0$ erfüllt.

Aufgabe 11.5. Zeige, dass für ein affines Schema $X = \operatorname{Spek}(R)$ folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) In R ist jedes Primideal maximal.
(2) In X ist jeder Punkt abgeschlossen.
(3) X ist ein Hausdorffraum.

Aufgabe 11.6. Man gebe ein Beispiel für ein nulldimensionales affines Schema $X = \operatorname{Spek}(R)$, das nicht diskret ist.

Aufgabe 11.7. Es sei $Y \subseteq X$ eine irreduzible Teilmenge in einem topologischen Raum X und $\eta \in Y$ ein Punkt. Zeige, dass η genau dann ein generischer Punkt von Y ist, wenn $\overline{\{\eta\}} = Y$ ist.

Aufgabe 11.8. Es sei $X = \operatorname{Spek}(R)$ das Spektrum zu einem kommutativen Ring R und $Y = V(\mathfrak{p}) \subseteq X$ die abgeschlossene Teilmenge zu einem Primideal $\mathfrak{p}$. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ der generische Punkt von $V(\mathfrak{p})$ ist.

Aufgabe 11.9.*

Es sei $M \neq \emptyset$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Zeige, dass es eine Kette von abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$$

derart gibt, dass die abgeschlossene Untermannigfaltigkeit M_i die Dimension i besitzt.

Aufgabe 11.10. Es sei X ein noetherscher topologischer Raum. Zeige, dass dann auch jede Teilmenge $Y \subseteq X$ mit der induzierten Topologie wieder noethersch ist.

Aufgabe 11.11. Es sei X ein noetherscher topologischer Raum. Zeige, dass jede Teilmenge $Y \subseteq X$ mit der induzierten Topologie quasikompakt ist.

Aufgabe 11.12. Zeige, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der metrischen Topologie kein noetherscher topologischer Raum ist.

Aufgabe 11.13.*

Es sei R ein kommutativer Ring und $\operatorname{Spek}(R) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ mit $f_i \in R$. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R mit der Eigenschaft, dass die Erweiterungsideale $\mathfrak{a}R_{f_i}$ endlich erzeugt sind. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt ist.

Aufgabe 11.14.*

Es sei R ein kommutativer Ring und $X = \operatorname{Spek}(R)$ das zugehörige affine Schema. Zeige, dass X genau dann ein noethersches Schema ist, wenn R ein noetherscher Ring ist.

Aufgabe 11.15. Zeige, dass es in einem noetherschen kommutativen Ring nur endlich viele minimale Primideale gibt.

Aufgabe 11.16. Man gebe ein Beispiel eines nicht-noetherschen Ringes, dessen Reduktion ein Körper ist.

Sei R ein kommutativer Ring. Ein multiplikatives System $F \subseteq R$ nennt man einen *Ultrafilter*, wenn $0 \notin F$ ist und wenn F maximal mit dieser Eigenschaft ist.

Aufgabe 11.17. Sei R ein kommutativer Ring und sei $F \subset R$ ein Ultrafilter. Zeige, dass das Komplement von F ein minimales Primideal in R ist.

Aufgabe 11.18. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein reduzierter beringter Raum.
(2) Für jeden Punkt $P \in X$ ist der Halm $\mathcal{O}_{X,P}$ reduziert.

Aufgabe 11.19. Zeige, dass für ein Schema die Integrität im Allgemeinen keine lokale Eigenschaft ist.

12. Vorlesung - Projektives Spektrum

12.1. **Das projektive Spektrum eines graduierten Ringes.**

Das projektive Spektrum wird üblicherweise für $\mathbb{N}$-graduierte Ringe eingeführt. Da man aber in der Konstruktion Nenneraufnahmen an homogenen Elementen betrachtet, wobei auch negative Grade auftreten, ist es sinnvoller, von Anfang an mit $\mathbb{Z}$-Graduierungen zu arbeiten.

Definition 12.1. Zu einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring nennt man das von allen homogenen Elementen von einem Grad $\neq 0$ erzeugte Ideal das *irrelevante Ideal*. Es wird mit R_+ bezeichnet.

Im positiv-graduierten Fall ist dies einfach das Ideal $\bigoplus_{n \geq 1} R_n$. Bei negativen Graden kann es auch das Einheitsideal sein.

Definition 12.2. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter kommutativer Ring. Dann nennt man die Menge der homogenen Primideale von R, die nicht R_+ umfassen, das *projektive Spektrum* von R. Es wird mit $\operatorname{Proj}(R)$ bezeichnet.

Definition 12.3. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter kommutativer Ring. Dann nennt man die Menge der homogenen Primideale von R, die nicht R_+ umfassen, zusammen mit der Topologie, bei der die Teilmengen

$$D_+(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(R) \mid \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}\}$$

als offen erklärt werden, das *projektive Spektrum* von R.

Es handelt sich in der Tat um eine Topologie. Es ist

$$D_+(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a} \text{ homogen}} D_+(f)$$

mit

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(R) \mid f \notin \mathfrak{p}\}.$$

Diese $D_+(f)$ bilden eine Basis der Topologie.

Definition 12.4. Das projektive Spektrum des Polynomrings $R[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ nennt man den *projektiven Raum* der Dimension n über R.

Zu einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring S bezeichnet man den Ring der nullten Stufe mit S_0. Wenn R $\mathbb{N}$-graduiert ist, so ist R_0 häufig ein einfacher Ring, beispielsweise ein Körper, aber wenn $f \in R$ ein homogenes Element mit einem positiven Grad ist, so ist die Nenneraufnahme R_f in natürlicher Weise $\mathbb{Z}$-graduiert und $(R_f)_0$ kann beliebig kompliziert sein.

Zu einem homogenen Primideal $\mathfrak{p}$ ist $R \setminus \mathfrak{p}$ ein multiplikatives System und entsprechend ist der Durchschnitt von $R \setminus \mathfrak{p}$ mit der Menge aller homogenen Elemente ein multiplikatives System. Der Ring der nullten Stufe zu dieser Nenneraufnahme spielt eine besondere Rolle, er wird mit

$$R_{(\mathfrak{p})} = (R_{(R \setminus \mathfrak{p}) \cap \{\text{homogene Elemente}\}})_0$$

bezeichnet.

Lemma 12.5. *Zu einem homogenen Primideal $\mathfrak{p}$ in einem $\mathbb{N}$-graduierten Ring R ist $R_{(\mathfrak{p})}$ ein lokaler Ring.*

Beweis. Seien $r, s \in R_{(\mathfrak{p})}$ Nichteinheiten. Dann ist $r = \frac{a}{f}$ und $s = \frac{b}{g}$ mit homogenen Elementen $f, g \notin \mathfrak{p}$ und homogenen Elementen $a, b \in R$, die jeweils den gleichen Grad wie ihre Nenner haben. Dabei ist $a, b \in \mathfrak{p}$, da andernfalls eine Einheit vorliegen würde. Daher ist $ag + bf \in \mathfrak{p}$ und somit ist

$$\frac{a}{f} + \frac{b}{g} = \frac{ag + bf}{fg}$$

ebenfalls eine Nichteinheit in $R_{(\mathfrak{p})}$. □

Definition 12.6. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das mit der Zariski-Topologie versehene projektive Spektrum von R. Unter der *Strukturgarbe* auf Y versteht man die Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \subseteq Y$ den kommutativen Ring

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) = \left\{ (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U} \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} R_{(\mathfrak{p})} \mid \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es homogene Elemente } a, b \in R \text{ mit } \mathfrak{p} \in D_+(b) \subseteq U \text{ und } s_{\mathfrak{q}} = \frac{a}{b} \text{ in } R_{(\mathfrak{q})} \text{ für alle } \mathfrak{q} \in D_+(b) \right\}$$

und jeder Inklusion $U \subseteq V$ die natürliche Projektion zuordnet.

Diese Definition beinhaltet insbesondere, dass in jeder Darstellung die Differenz $\operatorname{grad}(a) - \operatorname{grad}(b)$ gleich 0 ist. Man kann dies als Vergarbung der durch

$$D_+(\mathfrak{a}) \mapsto \operatorname{colim}_{D_+(\mathfrak{a}) \subseteq D_+(f)} (R_f)_0$$

definierten Prägarbe auffassen, wodurch klar wird, dass eine Garbe aus kommutativen Ringen vorliegt.

Definition 12.7. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring. Unter dem *projektiven Spektrum* $Y = \operatorname{Proj}(R)$ versteht man das mit der Zariski-Topologie und der Strukturgarbe versehene projektive Spektrum von R.

Lemma 12.8. *Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring, der zumindest eine homogene Einheit positiven Grades besitze. Dann ist die Abbildung*

$$\operatorname{Proj}(R) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R_0),\ \mathfrak{p} \longmapsto \mathfrak{p} \cap R_0,$$

eine Bijektion, die bezüglich der Zariski-Topologien eine Homöomorphie und bezüglich der Strukturgarben ein Isomorphismus ist. Ferner ist dabei

$$R_{(\mathfrak{p})} = (R_0)_{\mathfrak{p} \cap R_0}.$$

Beweis. Zunächst ist $\mathfrak{p}_0 := \mathfrak{p} \cap R_0$ ein Primideal und die Abbildung ist wohldefiniert. Es sei g eine Einheit positiven Grades. Wir behaupten, dass sich $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{p}_0$ rekonstruieren lässt, und zwar sind die homogenen Elemente von $\mathfrak{p}$, die ja das Ideal festlegen, gleich

$$\mathfrak{p} \cap H = \left\{ h \text{ homogen} \mid \text{ es gibt } i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } g^i h^j \in \mathfrak{p}_0 \right\}.$$

Dabei ist die Inklusion $\subseteq$ klar, da man i und j so wählen kann, dass der Grad von $g^i h^j$ gleich 0 wird. Wenn umgekehrt $g^i h^j \in \mathfrak{p}_0$ ist, so ist zunächst $h^j \in \mathfrak{p}$ und wegen der Primeigenschaft dann auch $h \in \mathfrak{p}$. Damit ist die Abbildung injektiv. Zum Nachweis der Surjektivität sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal aus R_0 und wir betrachten das von

$$\left\{ h \text{ homogen} \mid \text{ es gibt } i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } g^i h^j \in \mathfrak{q} \right\}$$

erzeugte Ideal. Dieses enthält keine Einheit und somit auch nicht ganz R_+, da es nicht g enthält, da $\mathfrak{q}$ nicht die 1 enthält. Wenn $h_1 h_2$ zu dieser Menge gehört, so ist $g^i h_1^j h_2^j \in \mathfrak{q}$ für gewisse i, j und für eine gewisse Potenz davon können wir dies als

$$\left(g^i h_1^j h_2^j\right)^n = \left(g^a h_1^b\right)\left(g^c h_2^d\right)$$

derart schreiben, dass beide Faktoren den Grad 0 haben. Dann muss ein Faktor zu $\mathfrak{q}$ gehören und somit h_1 oder h_2 zu der angegebenen Menge.

Zum Nachweis der Homöomorphie beachte man, dass die Mengen $D_+(f)$ bzw. $D(f)$ zu homogenen Elementen (vom Grad 0) jeweils eine Basis der Topologie bilden, dass das Urbild von $D(f)$ gleich $D_+(f)$ ist und dass $D_+(f) = D_+(fg^j)$ ist. $\square$

Lemma 12.9. *Zu einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring R und einem homogenen Element $f \in R$ von einem Grad $\neq 0$ ist*

$$D_+(f) \cong \operatorname{Spek}\left((R_f)_0\right)$$

als beringte Räume. Insbesondere ist das projektive Spektrum $\operatorname{Proj}(R)$ *ein Schema.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 12.8, angewendet auf R_f, unter Berücksichtigung, dass die homogenen Primideale von $D_+(f)$ den homogenen Primidealen von R_f entsprechen. Die Schemaeigenschaft folgt, da die $D_+(f)$ zu $f \in R_+$ das projektive Spektrum überdecken. $\square$

Beispiel 12.10. Das projektive Spektrum zum standard-graduierten Polynomring $R[X_0, X_1, \ldots, X_n]$, also der projektive Raum, wird durch die $D_+(X_i)$ überdeckt. Man spricht von der *affinen Standardüberdeckung des projekiven Raumes.* Dabei ist

$$\begin{aligned} \Gamma\left(D_+(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}\right) &= (R[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_i})_0 \\ &= R[\frac{X_0}{X_i}, \frac{X_1}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}] \end{aligned}$$

ein Polynomring in n Variablen und daher ist (mit $Y_j = \frac{X_j}{X_i}$ für $j \neq i$)

$$D_+(X_i) = \operatorname{Spek}\left(R[Y_0, Y_1, \ldots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \ldots, Y_n]\right) = \mathbb{A}^n_R.$$

Der projektive n-dimensionale Raum wird also durch $n+1$ affine Räume überdeckt.

Satz 12.11. *Es seien A und B $\mathbb{Z}$-graduierte Ringe über einem kommutativen Ring $R = A_0$ und sei $\theta\colon A \to B$ ein homogener Ringhomomorphismus. Dann gibt es einen natürlichen Schemamorphismus*

$$D_+(\theta(A_+)B) \longrightarrow \operatorname{Proj}(A),\ \mathfrak{p} \longmapsto \theta^{-1}(\mathfrak{p}).$$

Beweis. Das Urbild eines Primideals unter einem Ringhomomorphismus ist wieder ein Primideal und das Urbild eines homogenen Ideals ist wieder ein homogenes Ideal. Für

$$\mathfrak{p} \in D_+(\theta(A_+)B) = \operatorname{Proj}(B)$$

gibt es ein homogenes Element $f \in A_+$ mit $\theta(f) \notin \mathfrak{p}$. Daher ist $A_+ \not\subseteq \theta^{-1}(\mathfrak{p})$ und somit ist $\theta^{-1}(\mathfrak{p}) \in \operatorname{Proj}(A)$. Es gibt also eine Abbildung

$$\varphi\colon D_+(\theta(A_+)B) \longrightarrow \operatorname{Proj}(A).$$

Für ein homogenes Element $f \in A_+$ ist dabei $\varphi^{-1}(D_+(f)) = D_+(\theta(f))$, da dies auch für die Spektrumsabbildung gilt. Daher ist die Abbildung stetig. Nach Korollar 10.10 ist die Spektrumsabbildung in eindeutiger Weise ein Morphismus von Schemata. Auf jedem $D(f)$ ist dieser durch den Ringhomomorphismus

$$\theta_f\colon A_f \longrightarrow B_{\theta(f)}$$

gegeben. Bei f homogen ist dieser Ringhomomorphismus wieder homogen und induziert insbesondere einen Ringhomomorphismus

$$(\theta_f)_0\colon (A_f)_0 \longrightarrow \left(B_{\theta(f)}\right)_0$$

in der nullten Stufe. Da dies nach Lemma 12.9 die Schnittringe zu $D_+(f)$ bzw. $D_+(\theta(f))$ sind, und da diese Ringhomomorphismen mit den Restriktionen verträglich sind, und da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D_+(\theta(f)) & \stackrel{\varphi=\theta^{-1}}{\longrightarrow} & D_+(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec}\left((B_{\theta(f)})_0\right) & \stackrel{(\theta_f)_0^{-1}}{\longrightarrow} & \operatorname{Spec}((A_f)_0) \end{array}$$

kommutiert, handelt es sich um einen Morphismus lokal beringter Räume. □

Beispiel 12.12. Die Unterringbeziehung

$$K[X_1, \ldots, X_n] \subseteq K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$$

führt im Sinne von Satz 12.11 zu einem Schemamorphismus

$$\mathbb{P}^n_K \supset D_+(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}_K.$$

Einem K-Punkt mit den homogenen Koordinaten $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ wird der Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ zugeordnet, und diese Abbildung ist nur auf der angegebenen offenen Teilmenge definiert, es gibt keine sinnvolle Fortsetzung auf den

Punkt $(1, 0, \ldots, 0)$. Man spricht von der *Projektion weg von einem Punkt.* In den affinen Räumen $\mathbb{A}_K^{n+1}$ bzw. $\mathbb{A}_K^n$ interpretiert bedeutet die Abbildung, dass eine jede Gerade auf eine Hyperebene projiziert wird. Für die Gerade, die „senkrecht“ auf der Hyperebene steht, ist dies nicht wohldefiniert, da die Projektion keine Gerade liefert.

Die folgende Definition werden wir insbesondere über einem Körper verwenden.

Definition 12.13. Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ über einem kommutativen Ring R heißt *projektiv*, wenn es eine Faktorisierung

$$X \xrightarrow{i} \mathbb{P}_R^n \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

gibt, bei der i eine abgeschlossene Einbettung ist.

Lemma 12.14. *Zu einem standard-graduierten Ring A ist das projektive Spektrum* $\operatorname{Proj}(A)$ *ein projektives Schema über* $\operatorname{Spec}(A_0)$.

Beweis. Es ist

$$A = A_0[X_0, X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$$

mit einem homogenen Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A_0[X_0, X_1, \ldots, X_n]$. Zur Restklassenabbildung

$$\theta\colon A_0[X_0, X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow A$$

gehört nach Satz 12.11 der Schemamorphismus

$$i\colon \operatorname{Proj}(A) \longrightarrow \mathbb{P}_{A_0}^n.$$

So wie die Spektrumsabbildung

$$\operatorname{Spek}(A) \longrightarrow V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_{A_0}^{n+1},\ \mathfrak{p} \longmapsto \theta^{-1}(\mathfrak{p}),$$

eine Homöomorphie ist, ist auch die vorliegende projektive Variante eine Homöomorphie auf $V_+(\mathfrak{a})$. D.h. insbesondere, dass $\operatorname{Proj}(A)$ in natürlicher Weise einer abgeschlossenen Teilmenge des projektiven Raumes über A_0 entspricht. Wir müssen noch zeigen, dass der Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{A_0}^n} \longrightarrow i_* \mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(A)}$$

surjektiv ist. Auf $D_+(f)$ zu einem homogenen Element

$$f \in A_0[X_0, X_1, \ldots, X_n]_+$$

ist dies aber die Abbildung

$$(A_0[X_0, X_1, \ldots, X_n]_f)_0 \longrightarrow (A_f)_0,$$

und diese ist surjektiv. □

In der vorstehenden Aussage sind die Ringhomomorhismen nur auf den Mengen der Form $D_+(f)$ surjektiv, nicht auf allen offenen Mengen. Da diese aber eine Basis der Topologie bilden, liegt auch die Surjektivität in den Halmen vor. Daher handelt es sich einen surjektiven Garbenhomomorphismus.

Definition 12.15. Zu einem homogenen Polynom $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ über einem Körper K nennt man

$$V_+(F) = \operatorname{Proj}\left(K[X_0, X_1, \ldots, X_n]/(F)\right) \subset \mathbb{P}^n_K$$

die *projektive Hyperfläche* zu F.

Definition 12.16. Zu einer projektiven Hyperfläche

$$V_+(F) = \operatorname{Proj}\left(K[X_0, X_1, \ldots, X_n]/(F)\right) \subset \mathbb{P}^n_K$$

zu einem homogenen Polynom $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ nennt man den Grad von F auch den *Grad der Hyperfläche*.

Eine Hyperfläche vom Grad 1 nennt man *Hyperebene*, das sind projektiv-lineare Unterräume der Kodimension 1.

Lemma 12.17. *Es sei $R = K[X_0, X_1, \ldots, X_d]/(f_1, \ldots, f_s)$ ein standard-graduierter Ring mit homogenen Erzeugern f_j vom Grad d_j. Dann ist*

$$(R_{X_i})_0 = K[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_d}{X_i}]/\left(\frac{f_1}{X_i^{d_1}}, \ldots, \frac{f_s}{X_i^{d_s}}\right).$$

Dieser Restklassenring wird durch die Dehomogenisierungen der f_ℓ bezüglich der Variablen X_i beschrieben.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} R_{X_i} &= K[X_0, \ldots, X_d, X_i^{-1}]/(f_1, \ldots, f_s) \\ &= K[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_d}{X_i}, X_i, X_i^{-1}]/\left(\frac{f_1}{X_i^{d_1}}, \ldots, \frac{f_s}{X_i^{d_s}}\right) \\ &= \left(K[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_d}{X_i}]/\left(\frac{f_1}{X_i^{d_1}}, \ldots, \frac{f_s}{X_i^{d_s}}\right)\right)[X_i, X_i^{-1}]. \end{aligned}$$

In dieser letzten Beschreibung ist klar, was der Ring in Grad 0 ist.

Wenn man $Y_k = \frac{X_k}{X_i}$ (mit $Y_i = 1$) schreibt, so ist

$$\frac{f_\ell}{X_i^{d_\ell}} = \frac{\sum_\nu a_\nu X^\nu}{X_i^{d_\ell}} = \sum_\nu a_\nu Y^\nu,$$

und dies ist die Dehomogenisierung von f_ℓ bezüglich der Variablen X_i. □

12. Arbeitsblatt

Aufgabe 12.1. Es sei R ein kommutativer Ring, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte R-Algebra. Zeige $1 \in A_0$ und folgere, dass A_0 eine R-Unteralgebra von A ist.

Aufgabe 12.2. Es sei $A = \bigoplus_{d \in D} A_d$ ein graduierter kommutativer Ring und es sei A_e eine Stufe, die eine Einheit enthalte. Zeige, dass A_e als A_0-Modul isomorph zu A_0 ist.

Aufgabe 12.3. Es sei R ein kommutativer Ring, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte kommutative R-Algebra. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein homogenes Ideal. Zeige, dass der Restklassenring $R/\mathfrak{a}$ ebenfalls D-graduiert ist.

Aufgabe 12.4. Zeige, dass es im Polynomring in n Variablen genau $\binom{d+n-1}{n-1}$ Monome vom Grad d gibt.

Aufgabe 12.5. Zeige, dass die Teilmengen $D_+(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Proj}(R)$ zu homogenen Idealen in einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring R in der Tat eine Topologie auf dem projektiven Spektrum $\operatorname{Proj}(R)$ festlegen.

Aufgabe 12.6. Zeige, dass die offenen Teilmengen $D_+(f) \subseteq \operatorname{Proj}(R)$ zu homogenen Elementen $f \in R_+$ in einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring R eine Basis der Topologie auf dem projektiven Spektrum bilden.

Aufgabe 12.7. Bestimme das projektive Spektrum zum Achsenkreuz

$$\operatorname{Spek}(K[X,Y]/(XY))$$

(in der Standardgraduierung).

Aufgabe 12.8. Skizziere das projektive Spektrum zu den Achsenebenen $\operatorname{Spek}(K[X,Y,Z]/(XYZ))$ (in der Standardgraduierung).

Aufgabe 12.9.*

Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L = V_+(6X - 8Y + 3Z)$$

und

$$M = V_+(2X + 9Y - 5Z)$$

in der projektiven Ebene.

Aufgabe 12.10. Zeige, dass zwei verschiedene Punkte P und Q in der projektiven Ebene eindeutig eine projektive Gerade definieren, auf der beide Punkte liegen. Wie berechnet man die Geradengleichung aus den Koordinaten der Punkte?

Aufgabe 12.11. Zeige, dass der globale Schnittring $\Gamma\big(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}\big)$ des projektiven Raumes gleich R ist.

Aufgabe 12.12. Zeige, dass die in Beispiel 10.7 über Verklebungen konstruierte projektive Gerade $\mathbb{P}^1_K$ mit der projektiven Geraden im Sinne von Beispiel 12.10, also $\operatorname{Proj}(K[X,Y])$, übereinstimmt.

Aufgabe 12.13. Sei $D_+(L) \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$, wobei L eine homogene Linearform im zugehörigen Polynomring $K[X_0, \ldots, X_n]$ sei. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem projektiven Raum die Zariski-Topologie auf dem affinen Raum induziert.

Aufgabe 12.14. Sei $P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n_K$ ein Punkt im projektiven Raum. Zeige, dass es eine offene affine Umgebung $U \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$ derart gibt, dass P in diesem affinen Raum dem Nullpunkt entspricht.

Aufgabe 12.15. Sei $\mathbb{P}^n_K$ der projektive Raum der Dimension n über dem Körper K und seien

$$D_+(X_i) \cong \mathbb{A}^n_K, D_+(X_j) \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$$

zwei affine offene Teilmengen. Beschreibe die (nicht überall definierte) Übergangsabbildung von $D_+(X_i)$ nach $D_+(X_j)$.

Aufgabe 12.16. Seien $m+1$ homogene Polynome $F_0, \ldots, F_m$ in $n+1$ Variablen gegeben, die alle den gleichen Grad d besitzen. Zeige, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{P}^n_K$ gibt, auf der die Polynome einen Morphismus

$$\mathbb{P}^n_K \supseteq U \longrightarrow \mathbb{P}^m_K$$

definieren.

Aufgabe 12.17. Es sei S ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring, der in der ersten Stufe eine homogene Einheit besitze, und es sei $\mathfrak{a} \subseteq S$ ein homogenes Ideal. Zeige für $n \in \mathbb{Z}$ die Gleichheit von $(S/\mathfrak{a})_0$-Moduln

$$(S/\mathfrak{a})_n = (S/\mathfrak{a})_0 \otimes_{S_0} S_n.$$

Aufgabe 12.18. Es sei R ein standard-graduierter Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein homogenes Ideal. Es sei $f \in R$ ein homogenes Element vom Grad 1. Zeige für $n \in \mathbb{Z}$ die folgende Gleichheit von $(R_f/\mathfrak{a}_f)_0$-Moduln

$$((R/\mathfrak{a})_f)_n = (R_f/\mathfrak{a}_f)_n = (R_f/\mathfrak{a}_f)_0 \otimes_{(R_f)_0} (R_f)_n.$$

13. Vorlesung - Moduln auf beringten Räumen

13.1. Die Kegelabbildung.

Definition 13.1. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring. Dann nennt man zu einem Ideal $\mathfrak{a}$ das von allen homogenen Elementen aus $\mathfrak{a}$ erzeugte Ideal die *Homogenisierung* von $\mathfrak{a}$. Sie wird mit $\mathfrak{a}^h$ bezeichnet.

Die Homogenisierung ist wieder ein Ideal, das im Ausgangsideal enthalten ist. Zu einem Primideal ist die Homogenisierung ein Primideal.

Definition 13.2. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring. Dann versteht man unter der *Kegelabbildung* den Schemamorphismus

$$D(R_+) \longrightarrow \operatorname{Proj}(R),\, \mathfrak{p} \longmapsto \mathfrak{p}^h,$$

der auf den offenen Mengen zu homogenen Elementen $f \in R_+$ durch die Spektrumsabbildung zu $(R_f)_0 \to R_f$ gegeben ist.

Satz 13.3. *Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring. Dann ist die Kegelabbildung in der Tat ein Schemamorphismus.*

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert, da die Homogenisierung eines Primideals wieder ein Primideal ist. Zu einem homogenen $f \in R_+$ und einem Primideal $\mathfrak{p}$ ist $f \in \mathfrak{p}$ genau dann, wenn $f \in \mathfrak{p}^h$ ist, daher ist das Urbild von $D_+(f)$ gleich $D(f)$ und die Abbildung ist stetig. Das Diagramm von Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} D(f) & \longrightarrow & D_+(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spek}(R_f) & \longrightarrow & \operatorname{Spek}\big((R_f)_0\big) \end{array},$$

kommutiert. Dabei steht oben die eingeschränkte Kegelabbildung, unten die natürliche Spektrumsabbildung, links die Identifizierung aus Lemma 9.13 und rechts die Identifizierung aus Lemma 12.8. Um die Kommutativität nachzuweisen, ist für ein Primideal $\mathfrak{p} \in D(f)$ die Gleichheit

$$\mathfrak{p}^h \cap (R_f)_0 = \mathfrak{p} \cap (R_f)_0$$

zu zeigen, wobei die Primideale in R_f aufzufassen sind. Die Gleichheit beruht auf den Argumenten zu Lemma 12.8. Dadurch ist der Morphismus schematheoretisch auf $D(f)$ festgelegt. Die Morphismen $\operatorname{Spek}(R_f) \to \operatorname{Spek}\big((R_f)_0\big)$ zu verschiedenen f sind miteinander kompatibel und legen einen globalen Schemamorphismus fest. $\square$

Beispiel 13.4. Zum Polynomring $K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ in $n+1$ Variablen mit der Standardgraduierung über einem Körper K ist die Kegelabbildung gleich

$$\mathbb{A}_K^{n+1} \supset D(X_0, X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow \mathbb{P}_K^n,\, \mathfrak{p} \longmapsto \mathfrak{p}^h.$$

Auf den K-Punkten ist diese Abbildung einfach durch

$$K^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(K),\, (x_0, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_0, x_1, \ldots, x_n)\,,$$

geben, die einem Punkt $\neq 0$ die durch diesen Punkt und den Nullpunkt bestimmte Gerade zuordnet.

13.2. **Moduln auf einem beringten Raum.**

So wie es für einen kommutativen Ring R wichtig ist, die R-Moduln zu verstehen, muss man für einen beringten Raum die darauf gegebenen $\mathcal{O}_X$-Moduln verstehen.

Definition 13.5. Eine Garbe $\mathcal{M}$ auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt $\mathcal{O}_X$- *Modul* , wenn es für jede offene Menge $U \subseteq X$ auf $\Gamma(U, \mathcal{M})$ eine $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Modulstruktur gegeben ist, die mit den Restriktionsabbildungen zu $U \subseteq V$ verträglich ist.

Die Verträglichkeitsbedingung bedeutet, dass zu offenen Mengen $U \subseteq V$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(V, \mathcal{M}) & \longrightarrow & \Gamma(V, \mathcal{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(U, \mathcal{M}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{M}) \end{array}$$

kommutiert. Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ ist insbesondere ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul ist insbesondere eine Garbe von abelschen Gruppen.

Definition 13.6. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Eine Untergarbe $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ derart, dass $\Gamma(U, \mathcal{N})$ für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ein $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Untermodul von $\Gamma(U, \mathcal{M})$ ist, heißt $\mathcal{O}_X$- *Untermodul* von $\mathcal{M}$.

Definition 13.7. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum. Ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ heißt *Idealgarbe*.

Definition 13.8. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Zu einem Punkt $P \in X$ nennt man

$$\mathcal{M}(P) := \mathcal{M}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \kappa(P)$$

die *Faser* von $\mathcal{M}$ im Punkt P.

Die Faser ist insbesondere ein Vektorraum über dem Restekörper $\kappa(P)$.

Definition 13.9. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ $\mathcal{O}_X$-Moduln auf X. Ein Garbenhomomorphismus $\varphi \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ heißt $\mathcal{O}_X$-*Modulhomomorphismus* , wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ die Abbildung

$$\Gamma(U, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{N})$$

ein $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Modulhomomorphismus ist.

Ein $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus ist insbesondere ein Homomorphismus von Garben von abelschen Gruppen.

Die folgende Aussage ist eine Version des Festlegungssatzes aus der linearen Algebra.

Satz 13.10. *Es sei* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ein beringter Raum und sei* $\mathcal{M}$ *ein* $\mathcal{O}_X$*-Moduln auf* X*. Dann geben globale Schnitte* $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ *Anlass zu einem eindeutig bestimmten Modulhomomorphismus*

$$\varphi\colon\ \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathcal{M},\ e_i \longmapsto s_i.$$

Beweis. Zu jeder offenen Menge $U \subseteq X$ ist $\Gamma(U, \mathcal{O}_X^n) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)^n$ der freie $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Modul mit der Basis $e_1, \ldots, e_n$. Die globalen Schnitte s_i liefern Einschränkungen $(s_i)|_U \in \Gamma(U, \mathcal{M})$. Nach dem Festlegungssatz gibt es dazu einen eindeutig bestimmten $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Modulhomomorphismus

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X)^n \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{M}),\ e_i \longmapsto (s_i)|_U.$$

Diese Modulhomomorphismen sind mit den Einschränkungen zu $V \subseteq U$ verträglich und daher liegt ein Homomorphismus von Modulgarben vor. □

Lemma 13.11. *Es sei* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ein beringter Raum und sei* $\mathcal{M}$ *ein* $\mathcal{O}_X$*-Moduln auf* X*. Dann entspricht ein globaler Schnitt* $s \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ *eindeutig dem Modulhomomorphismus*

$$\varphi\colon\ \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{M},\ 1 \longmapsto s.$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Satz 13.10. □

13.3. **Konstruktionen für Modulgarben.**

Definition 13.12. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Modulgarben auf X. Dann nennt man

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \{\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N} \mid \varphi \text{ Modulhomomorphismus}\}$$

mit der natürlichen $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-Modulstruktur den (globalen) *Homomorphismenmodul* zu $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$.

Im Wesentlichen gibt es zu jeder Konstruktion für R-Moduln eine analoge Konstruktion für $\mathcal{O}_X$-Moduln. Der Leitgedanke ist dabei, dass die konstruierten Objekte wieder die „richtigen Eigenschaften“ innerhalb der Kategorie aller $\mathcal{O}_X$-Moduln besitzt. Von daher ist auch zu erwarten, dass die vorstehende Definition noch nicht das letzte Wort ist, sondern um eine Garbenversion zu erweitern ist.

Definition 13.13. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Modulgarben auf X. Dann nennt man die Zuordnung

$$U \longmapsto \operatorname{Hom}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U) = \{\varphi : \mathcal{M}|_U \to \mathcal{N}|_U \mid \varphi \text{ Modulhomomorphismus}\}$$

die *Homomorphismengarbe* zu $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$. Sie wird mit $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ bezeichnet.

Es ist also

$$\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N})(U) = \operatorname{Hom}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U).$$

Lemma 13.14. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Modulgarben auf X. Dann ist die Homomorphismengarbe $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X.*

Beweis. Es liegt die Beziehung

$$\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N})(U) \,=\, \operatorname{Hom}\left(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U\right) \,\subseteq\, \operatorname{Mor}\left(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U\right)$$

vor, und rechts steht nach Lemma 4.9 eine Garbe. Die Homomorphieeigenschaft, also die Verträglichkeit mit der Addition und der Skalarmultiplikation, kann man dabei lokal testen (siehe Aufgabe 13.11), so dass links eine Untergarbe steht. Die $\mathcal{O}_X$-Struktur auf $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ wird durch die Addition und Skalarmultiplikation in der zweiten Komponente gegeben, und dies ist mit den Einschränkungen verträglich. $\square$

Definition 13.15. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und sei $\mathcal{M}$ eine Modulgarbe auf X. Dann nennt man

$$\mathcal{M}^* \,=\, \mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$$

mit der natürlichen $\mathcal{O}_X$-Modulstruktur den *dualen Modul* zu $\mathcal{M}$.

Definition 13.16. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Modulgarben auf X. Dann nennt man die Vergarbung der Prägarbe

$$U \longmapsto \Gamma(U, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{G})$$

das *Tensorprodukt* der Moduln. Sie wird mit $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ bezeichnet.

Aufgrund der universellen Eigenschaft der Vergarbung gibt es eine kanonische Abbildung

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}),$$

die in den Halmen ein Isomorphismus ist. Der Halm ist dabei das Tensorprodukt der Halme, siehe Aufgabe 13.13.

13.4. **Invertierbare Garben.**

Definition 13.17. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{L}$ auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *invertierbar*, wenn es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ derart gibt, dass die Einschränkungen $\mathcal{L}|_{U_i}$ isomorph zu $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ sind.

Eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *trivial*, wenn sie isomorph zur Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ ist.

Beispiel 13.18. Es sei X ein topologischer Raum, versehen mit der Garbe der stetigen Funktionen $C(-, \mathbb{R})$ und $L \to X$ eine reelles Geradenbündel auf X. Dann ist die Garbe der stetigen Schnitte S im Sinne von Beispiel 3.12 ein invertierbarer $C(-, \mathbb{R})$-Modul. Zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ mit einer Trivialisierung $L|_U \,\cong\, \mathbb{R} \times U$ ist ja $S(U, L|_U) \,\cong\, C(U, \mathbb{R})$,

Beispiel 13.19. Es sei K ein Körper und $\mathbb{P}^n_K$ der projektive Raum über K. Die Strukturgarbe ist für jede offene Teilmenge U eine Teilmenge des Funktionenkörpers

$$\Gamma\big(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}\big) \subseteq K(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}).$$

Wegen der Faktorialität des Polynomringes gibt es zu jedem homogenen Ideal $\mathfrak{a}$ ein bis auf Multiplikation mit einem Skalar eindeutig bestimmtes homogenes Polynom f von maximalem Grad ohne mehrfache Faktoren mit

$$D_+(\mathfrak{a}) \subseteq D_+(f)$$

(daei ist hier $f = 1$ erlaubt, wobei dann allerdings die Schreibweise $D_+(f)$ nicht verwendet wird.). Wegen Satz 9.8 ist der globale Schnittring gleich

$$\Gamma\big(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}\big) = \Gamma\big(D_+(f), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}\big) = (K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_f)_0 \subseteq K(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}).$$

Sei $\ell \in \mathbb{Z}$ fixiert. Wir definieren eine Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(\ell)$ durch

$$\Gamma\big(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(\ell)\big) = \Gamma\big(D_+(f), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(\ell)\big) := (K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_f)_\ell.$$

Dabei handelt es sich um eine invertierbare Garbe. Auf $D_+(X_0)$ (und ebenso auf den $D_+(X_i)$) ist nämlich

$$(K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_0})_0 \longrightarrow (K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_0})_\ell, \ \frac{F}{G} \longmapsto X_0^\ell \cdot \frac{F}{G},$$

ein $(K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_0})_0$-Modulisomorphismus, der sich auf die kleineren offenen Teilmengen überträgt. Die globale Auswertung auf dem projektiven Raum ist einfach $(K[X_0, X_1, \ldots, X_n])_\ell$, was zeigt, dass (bei $n \geq 1$) diese invertierbaren Garben zu $\ell \geq 0$ nicht zueinander isomorph sind (das stimmt für alle ℓ).

Definition 13.20. Zu einem lokal beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, einer invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ auf X und einem globalen Schnitt $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ nennt man

$$X_s := \{P \in X \mid s_P \notin \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P\}$$

den *Invertierbarkeitsort* von s.

Das Komplement $X \setminus X_s$, also das Nullstellengebilde des Schnittes, bezeichnen wir mit $Z(s)$.

Lemma 13.21. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum, $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ ein globaler Schnitt. Dann ist der Invertierbarkeitsort $X_s \subseteq X$ offen.*

Beweis. Dies folgt durch eine lokale Betrachtung aus Lemma 7.16. □

Lemma 13.22. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Es sei $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ ein globaler Schnitt mit dem Invertierbarkeitsort X_s. Dann ist die Einschränkung $\mathcal{L}|_{X_s}$ trivial.*

Beweis. Der globale Schnitt s gibt nach Lemma 13.11 Anlass zu einem Modulhomomorphismus

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L},\, 1 \longmapsto s,$$

und insbesondere zu einem Modulhomomorphismus

$$\varphi\colon\ \mathcal{O}_X|_{X_s} \longrightarrow \mathcal{L}|_{X_s}.$$

Für jeden Punkt $P \in X_s$ ist dies ein Isomorphismus, daher ist φ nach Lemma 4.6 ebenfalls ein Isomorphismus. □

13. Arbeitsblatt

Aufgabe 13.1. Zeige durch ein Beispiel, dass die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$$

nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 13.2. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R. Zeige, dass die Homogenisierung $\mathfrak{p}^h$ ebenfalls ein Primideal ist.

Aufgabe 13.3. Es sei K ein Körper und $R = K[X_0, X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ eine standard-graduierte K-Algebra. Zeige, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Spek}(R) \supseteq D(R_+) & \longrightarrow & V(\mathfrak{a}) \cap D(X_0, X_1, \ldots, X_n) & \longrightarrow & \mathbb{A}_K^{n+1} \supseteq D(X_0, X_1, \ldots, X_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Proj}(R) & \longrightarrow & V_+(\mathfrak{a}) & \longrightarrow & \mathbb{P}_K^n \end{array}$$

aus Schemamorphismen kommutiert, wobei die vertikalen Abbildungen links und rechts Kegelabbildungen sind und die horizontalen Abbildungen Isomorphien und die natürlichen abgeschlossenen Einbettungen sind.

Aufgabe 13.4. Diskutiere den Zusammenhang zwischen der Kegelabbildung

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \supset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

und der Hopf-Faserung $S^3 \to S^2$.

Aufgabe 13.5. Es sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass zu jedem Punkt $P \in X$ der Halm $\mathcal{F}_P$ ein $\mathcal{O}_{X,P}$-Modul ist.

Aufgabe 13.6. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$-Moduln auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass dann auch die direkte Summe $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

Aufgabe 13.7. Es sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul. Zeige, dass die Quotientengarbe $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ in natürlicher Weise ein $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

Aufgabe 13.8. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum. Zeige, dass

$$s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

genau dann eine Einheit ist, wenn der zugehörige $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 13.9. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum. Es seien $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ globale Schnitte, die in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ das Einheitsideal erzeugen. Zeige, dass der zugehörige $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus $\mathcal{O}_X^n \to \mathcal{O}_X$, $e_i \mapsto s_i$, surjektiv ist.

In der vorstehenden Aussage gilt nicht die Umkehrung, siehe Aufgabe 14.10.

Aufgabe 13.10. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum. Es seien $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$ globale Schnitte mit $s_i = (s_{i1}, \ldots, s_{in})$. Zeige, dass die Determinante der Matrix $(s_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ genau dann eine Einheit in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ist, wenn der zugehörige $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus $\mathcal{O}_X^n \to \mathcal{O}_X^n$, $e_i \mapsto s_i$, ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 13.11. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Modulgarben auf X. Es sei

$$\varphi \colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$$

ein Garbenmorphismus und es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Wenn die Abbildungen

$$\varphi_{U_i} \colon \Gamma(U_i, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{N})$$

für alle i mit der Addition verträglich sind, so gilt dies auch für

$$\varphi_X \colon \Gamma(X, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{N}).$$

(2) Wenn die

$$\varphi_{U_i} \colon \Gamma(U_i, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{N})$$

für alle i mit den $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$-Skalarmultiplikationen verträglich sind, so gilt dies auch für

$$\varphi_X \colon \Gamma(X, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{N}).$$

(3) Wenn die
$$\varphi|_{U_i} \colon \mathcal{M}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{N}|_{U_i}$$
$\mathcal{O}_X|_{U_i}$-Modulhomomorphismen für alle i sind, so gilt dies auch für φ.

Aufgabe 13.12. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und sei $\mathcal{F}$ eine Modulgarbe auf X.

Zeige, dass es einen natürlichen $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus
$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{**}$$
gibt.

Aufgabe 13.13. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Modulgarben auf X. Zeige, dass der Halm der Prägarbe
$$U \longmapsto \Gamma(U, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{G})$$
in einem Punkt $P \in X$ gleich
$$\begin{aligned} & \operatorname{colim}_{P \in U} \Gamma(U, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{G}) \\ = \; & (\operatorname{colim}_{P \in U} \Gamma(U, \mathcal{F})) \otimes_{(\operatorname{colim}_{P \in U} \Gamma(U, \mathcal{O}_X))} (\operatorname{colim}_{P \in U} \Gamma(U, \mathcal{G})) \\ = \; & \mathcal{F}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{G}_P \end{aligned}$$
ist.

Aufgabe 13.14. Es sei $\mathcal{F}$ eine Modulgarbe auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und sei $\mathcal{F}^*$ die duale Garbe zu $\mathcal{F}$. Zeige, dass es einen natürlichen $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus
$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}^* \longrightarrow \mathcal{O}_X$$
gibt.

Aufgabe 13.15. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Es sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge derart, dass die Einschränkung $\mathcal{L}|_U$ trivial ist, und es sei $\varphi \colon \mathcal{L}|_U \to \mathcal{O}_X|_U$ ein Isomorphismus. Es sei $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ ein globaler Schnitt mit dem Invertierbarkeitsort X_s. Zeige, dass $X_s \cap U = U_{\varphi(s)}$, wobei rechts der Invertierbarkeitsort zu $\Gamma(U, \mathcal{O}_X|_U)$ steht.

Aufgabe 13.16. Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass die duale Garbe $\mathcal{L}^*$ ebenfalls invertierbar ist.

Aufgabe 13.17. Es sei $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ invertierbare Garben auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass die Tensorierung $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ ebenfalls invertierbar ist.

Aufgabe 13.18. Es sei $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ invertierbare Garben auf einem lokal beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Es seien $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, $t \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ und $st \in \Gamma(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{M})$. Zeige, dass die Invertierbarkeitsorte

$$X_{st} = X_s \cap X_t$$

erfüllen.

Aufgabe 13.19. Zeige, dass eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ in natürlicher Weise isomorph zu ihrem Bidual $\mathcal{L}^{**}$ ist.

Aufgabe 13.20. Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und sei $\mathcal{L}^*$ die duale Garbe zu $\mathcal{L}$. Zeige, dass es einen natürlichen $\mathcal{O}_X$-Isomorphismus

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^* \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

gibt.

Aufgabe 13.21. Wir betrachten den projektiven Raum über einem Körper K und die invertierbare Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(m)$ zu $m > 0$. Es sei

$$f \in \Gamma\big(\mathbb{P}^n_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(m)\big) = K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_m.$$

Zeige für die Invertierbarkeitsmenge die Gleichheit $(\mathbb{P}^n_K)_f = D_+(f)$.

Aufgabe 13.22. Wir betrachten den projektiven Raum über einem Körper K und die invertierbaren Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(\ell)$. Zeige

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(\ell) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(m) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(\ell + m).$$

Aufgabe 13.23. Es sei $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom $\neq 0$ vom Grad d. Zeige, dass dies eine kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(-d) \xrightarrow{\cdot F} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K} \longrightarrow \mathcal{O}_{V_+(F)} \longrightarrow 0$$

auf dem projektiven Raum festlegt (hierbei wird die Strukturgarbe auf der projektiven Hyperfläche $V_+(F)$ als eine Garbe auf dem projektiven Raum aufgefasst).

14. Vorlesung - Quasikohärente ModulnDifferenzierbarkeit

14.1. **Quasikohärente Moduln auf affinen Schemata.**

Zu einem komutativen Ring R sind die R-Moduln wichtig und charakteristisch für den Ring, etwa Ideale, Restklassenringe, projektive Moduln, der Modul der Kählerdifferentiale u.s.w. Diese Moduln wollen wir im Kontext des Spektrums, also in einer geometrisierten Form, wiederfinden. Der Aufbau erfolgt parallel dazu, wie die Strukturgarbe auf dem Spektrum eingeführt wird.

Beispiel 14.1. Es sei M ein R-Modul über dem kommutativen Ring R. Dann kann man eine Prägarbe von Moduln definieren, indem man zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ die Festlegung

$$\mathcal{P}(U) = \operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} M_f$$

trifft. Dies sind Moduln über dem Ring $\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} R_f$ und es liegen natürliche Restriktionshomomorphismen vor, die mit den Modulstrukturen verträglich sind. Der Halm dieser Prägarbe in einem Primideal $\mathfrak{p}$ ist $M_{\mathfrak{p}}$

Definition 14.2. Es sei $(X, \mathcal{O}_X) = \operatorname{Spek}(R)$ das affine Schema eines kommutativen Ringes R und sei M ein R-Modul. Unter dem zu M gehörenden $\mathcal{O}_X$- *Modul* $\widetilde{M}$ auf X versteht man die Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \subseteq X$ die kommutative Gruppe

$$\Gamma\left(U, \widetilde{M}\right) = \left\{ (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U} \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}} \mid \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es } m \in M \text{ und } \right.$$
$$\left. f \in R \text{ mit } \mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U \text{ und } s_{\mathfrak{q}} = \frac{m}{f} \text{ in } M_{\mathfrak{q}} \text{ für alle } \mathfrak{q} \in D(f) \right\}$$

zusammen mit der Skalarmultiplikation

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \times \Gamma\left(U, \widetilde{M}\right) \longrightarrow \Gamma\left(U, \widetilde{M}\right),\ \left((g_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U}, (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U}\right) \longmapsto (g_{\mathfrak{p}} s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U},$$

zuordnet, und wobei jeder Inklusion $U \subseteq V$ die natürliche Projektion zugeordnet wird.

Wenn man mit dem Ring R selbst startet, so erhält man die Strukturgarbe.

Lemma 14.3. *Zu einem R-Modul über einem kommutativen Ring R ist $\widetilde{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul auf dem affinen Schema $X = \operatorname{Spek}(R)$.*

Beweis. Dies beruht darauf, dass $\widetilde{M}$ als Vergarbung zur Prägarbe $U \mapsto \operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} M_f$ definiert wird und die Modulstruktur sich auf die Vergarbung vererbt. $\square$

Lemma 14.4. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ das affine Schema zu einem kommutativen Ring R und es sei $x \in X$ ein Punkt, der dem Primideal $\mathfrak{p}$ entspreche. Es* *sei M ein R-Modul mit der zugehörigen Modulgarbe $\widetilde{M}$. Dann ist der Halm dieser Garbe gleich*

$$\widetilde{M}_x = M_{\mathfrak{p}}.$$

Beweis. Dies ergibt sich aus Beispiel 14.1 und Lemma 5.2 (2). □

Lemma 14.5. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ das affine Schema zu einem kommutativen Ring R und sei M ein R-Modul mit der zugehörigen Modulgarbe $\mathcal{O}_X$-Modul $\widetilde{M}$. Es sei $f \in R$. Dann ist*

$$\Gamma\Big(D(f), \widetilde{M}\Big) = M_f.$$

Insbesondere ist der globale Schnittmodul gleich $\Gamma\Big(X, \widetilde{M}\Big) = M$.

Beweis. Wir beweisen den angeführten Spezialfall. Es gibt einen natürlichen R-Modulhomomorphismus $M \to \Gamma\Big(X, \widetilde{M}\Big)$. Dieser ist injektiv, da man das Nullsein eines Elementes lokal testen kann, vergleiche Lemma Anhang 1.1. Zum Nachweis der Surjektivität sei $s \in \Gamma\Big(X, \widetilde{M}\Big)$ ein globales Element. Dies bedeutet, dass es eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$$

und Elemente

$$s_i = \frac{a_i}{f_i^{k_i}}$$

mit $a_i \in M$ gibt, die als Schnitte über

$$D(f_i) \cap D(f_j) = D(f_i f_j),$$

also als Elemente in $M_{f_i f_j}$ übereinstimmen. Nach Korollar 8.6 können wir annehmen, dass I endlich ist. Ferner können wir die k_i durch ihr Maximum k ersetzen (was natürlich die lokalen Zähler a_i auch ändert). Die Verträglichkeit $\frac{a_i}{f_i^k} = \frac{a_j}{f_j^k}$ bedeutet die Existenz von Gleichungen

$$(f_i f_j)^m a_i f_j^k = (f_i f_j)^m a_j f_i^k$$

in M, wobei wir m als ein Maximum gewählt haben. Nach Proposition 8.4 ((2), (4)) erzeugen die f_i, $i \in I$, das Einheitsideal. Dies gilt dann auch für die f_i^{m+k}, $i \in I$, d.h. es gibt $g_i \in R$ mit

$$1 = \sum_{i \in I} g_i f_i^{m+k}.$$

Wir setzen

$$a := \sum_{i \in I} g_i a_i f_i^m.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} af_j^{m+k} &= \left(\sum_{i \in I} g_i a_i f_i^m\right) f_j^{m+k} \\ &= \sum_{i \in I} g_i (f_i f_j)^m a_i f_j^k \\ &= \sum_{i \in I} g_i (f_i f_j)^m a_j f_i^k \\ &= a_j f_j^m \left(\sum_{i \in I} g_i f_i^{m+k}\right) \\ &= a_j f_j^m . \end{aligned}$$

Dies bedeutet wiederum $a = \frac{a_j}{f_j^k} = s_j$ in M_{f_j}, d.h. der Schnitt wird von einem Modulelement repräsentiert.

Wir betrachten nun die Situation auf $D(f)$. Diese entspricht aber der behandelten Situation, wenn man M_f als neuen Modul ansetzt. $\square$

Beispiel 14.6. Im quadratischen Zahlbereich $R = A_{-5} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathbb{Z}[T]/(T^2+5)$ gilt die Gleichheit

$$2 \cdot 3 = 6 = (1+\sqrt{5}\mathrm{i})(1-\sqrt{5}\mathrm{i}).$$

Wir betrachten das Ideal $I = (2, 1+\sqrt{-5})$ (das ein Primideal ist und kein Hauptideal) und die zugehörige Idealgarbe $\widetilde{I}$ auf $X = \operatorname{Spek}(R)$. Das Spektrum wird durch die beiden offenen Mengen $D(2)$ und $D(3)$ überdeckt. Es ist $\widetilde{I}|_{D(2)} \cong \mathcal{O}_X|_{D(2)}$, da 2 zum Ideal gehört und daher das Ideal in der Nenneraufnahme R_2 zum Einheitsideal wird. In der Nenneraufnahme R_3 (also auf $D(3)$) ist hingegen

$$2 = \frac{1-\sqrt{5}\mathrm{i}}{3}(1+\sqrt{5}\mathrm{i})$$

und somit ist I_3 ein Hauptideal mit dem Erzeuger $1+\sqrt{5}\mathrm{i}$. Daher ist $\widetilde{I}|_{D(3)} \cong \mathcal{O}_X|_{D(3)}$ und $\widetilde{I}$ ist eine invertierbare Garbe.

Beispiel 14.7. Wir betrachten in der A_{n-1}-Singularität

$$R = K[X,Y,Z]/(XY - Z^n)$$

das Ideal $I = (X, Z)$. Es definiert auf dem Spektrum $\operatorname{Spek}(R)$ eine Idealgarbe $\widetilde{I}$ und damit auch die eingeschränkte Idealgarbe $\widetilde{I}|_U$ auf dem quasiaffinen Schema

$$U = D(X,Y,Z) = D(X,Y) = \operatorname{Spek}(R) \setminus \{(X,Y,Z)\} \subset \operatorname{Spek}(R).$$

Diese eingeschränkte Idealgarbe ist auf U invertierbar, da wegen $X \in I$ und wegen $X = \frac{Z^{n-1}}{Y} Z$ (in R_Y) Isomorphien $\widetilde{I}|_{D(X)} \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spek}(R)}|_{D(X)}$ und $\widetilde{I}|_{D(Y)} \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spek}(R)}|_{D(Y)}$ vorliegen. Dagegen ist $\widetilde{I}$ auf dem gesamten Spektrum nicht invertierbar, da das Ideal in der Lokalisierung $R_{(X,Y,Z)}$ kein Hauptideal ist.

Lemma 14.8. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ das affine Schema zu einem kommutativen Ring R und es sei $\varphi \colon M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus zwischen R-Moduln. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus*

$$\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N},$$

der global mit φ übereinstimmt.

Beweis. Zu jedem $f \in R$ muss wegen der Verträglichkeit mit den Restriktionen das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\left(X, \widetilde{M}\right) = M & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & \Gamma\left(X, \widetilde{N}\right) = N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma\left(D(f), \widetilde{M}\right) = M_f & \longrightarrow & \Gamma\left(D(f), \widetilde{N}\right) = N_f \end{array}$$

vorliegen, wodurch die untere Abbildung eindeutig festgelegt ist. Durch diese Festlegung wird sodann ein eindeutiger Prägarbenhomomorphismus und über die Vergarbung ein eindeutiger Garbenhomomorphismus festgelegt. $\square$

Lemma 14.9. *Es sei R ein kommutativer Ring und es sei*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann liegt auf dem affinen Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ zu R die kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{L} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N} \longrightarrow 0$$

von quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln vor.

Beweis. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

führt zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ nach Lemma Anhang 2.2 zu einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow L_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0\,.$$

Wegen Lemma 14.4 ist dies die Halmversion der Modulhomomorphismen zwischen $\widetilde{L}$, $\widetilde{M}$ und $\widetilde{N}$ im Punkt $\mathfrak{p}$. Nach Lemma 6.3 bedeutet dies die Exaktheit des Garbenkomplexes. $\square$

Lemma 14.10. *Es sei R ein kommutativer Ring, es seien M und N Moduln über R und es seien $\widetilde{M}$ und $\widetilde{N}$ die zugehörigen Modulgarben auf $X = \operatorname{Spek}(R)$. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N} \, = \, \widetilde{M \otimes_R N}.$$

Beweis. Es ist $M_f \otimes_{R_f} N_f \, = \, (M \otimes_R N)_f$. Wir betrachten die Prägarbe

$$U \longmapsto \operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} \, M_f \otimes_{R_f} N_f = \operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} \, (M \otimes_R N)_f\,.$$

Die Vergarbung der rechten Seite ergibt nach Definition die quasikohärente Garbe $\widetilde{M \otimes_R N}$. Zu offenen Mengen $U \subseteq D(f)$ gibt es kanonische Modulhomomorphismen

$$M_f \otimes_{R_f} N_f \longrightarrow \left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} M_f\right) \otimes_{\left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} R_f\right)} \left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} N_f\right),$$

was zu einem Modulhomomorphismus

$$\left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} M_f \otimes_{R_f} N_f\right) \longrightarrow \left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} M_f\right) \otimes_{\left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} R_f\right)} \left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} N_f\right),$$

für jede offene Menge führt. Diese sind mit den Restriktionen verträglich, so dass ein Prägarbenhomomorphismus vorliegt. Dieser überträgt sich nach Lemma 5.2 (1,5) auf die zugehörigen Garben. Nach der Vorbemerkung ist die Vergarbung links gleich $\widetilde{M \otimes_R N}$ und die Vergarbung der rechten Seite ist nach Definition gleich $\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$. Da der Homomorphismus in den Halmen ein Isomorphismus ist, liegt nach Lemma 4.6 überhaupt ein Isomorphismus vor. □

14.2. **Quasikohärente Moduln.**

Für beliebige Schemata sind diejenigen Modulgarben besonders wichtig, die auf affinen Stücken wie $\widetilde{M}$ aussehen.

Definition 14.11. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ auf einem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *quasikohärent*, wenn es eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i = \operatorname{Spek}(R_i)$ und R_i-Moduln M_i derart gibt, dass $\mathcal{M}|U_i = \widetilde{M_i}$ ist.

Insbesondere ist die Strukturgarbe auf einem Schema eine quasikohärente Garbe, da sie auf den affinen offenen Mengen $U = \operatorname{Spek}(R)$ mit $\widetilde{R}$ übereinstimmt. Invertierbare Garben sind ebenfalls quasikohärent.

Man kann zeigen, dass bei einer quasikohärenten Garbe bereits für jede offene affine Teilmenge $U \subseteq X$ die eingeschränkte Garbe gleich der Modulgarbe zu einem Modul über dem Ring $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ist.

Definition 14.12. Ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ auf einem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *kohärent*, wenn es eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ derart gibt, dass $\Gamma(U_i, \mathcal{M})$ ein endlich erzeugter $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$-Modul ist.

Bei einem affinen Schema $\operatorname{Spek}(R)$ entsprechen sich die quasikohärenten Moduln und die R-Moduln. Insbesondere haben auf einem affinen Schema die quasikohärenten Moduln $\mathcal{M}$ „viele" globale Schnitte, mit deren Hilfe man $\mathcal{M}$ verstehen und rekonstruieren kann. Dies gilt keineswegs für quasikohärente Garben auf nichtaffinen Schemata, insbesondere gilt es oft nicht für projektive Schemata. Dort kommt es sogar oft vor, dass für komplizierte quasikohärente Moduln die globale Auswertung der Nullmodul ist. In einem solchen Fall kann man aber mit Hilfe von geeigneten invertierbaren Garben den Modul so „hindrehen“ (twisten), dass die getwistete Version globale Schnitte besitzt. Wegweisend ist der folgende allgemeine Satz. Man beachte, dass Elemente $g \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ mit $\mathcal{L}$ invertierbar und $s \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ über die Vergarbung Elemente $g^n s \in \Gamma(X, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{M})$ definieren, wobei $\mathcal{L}^n$ die n-te Tensorpotenz von $\mathcal{L}$ bezeichnet.

Satz 14.13. *Es sei $\mathcal{M}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul auf einem noetherschen Schema $(X, \mathcal{O}_X)$. Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X,*

$$g \in \Gamma(X, \mathcal{L})$$

ein globaler Schnitt mit dem Invertierbarkeitsort X_g. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Zu einem globalen Schnitt $r \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ mit $r|_{X_g} = 0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $g^m r = 0$ in $\Gamma(X, \mathcal{L}^m \otimes \mathcal{M})$.*
(2) *Zu einem Schnitt $s \in \Gamma(X_g, \mathcal{M})$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass*

$$g^n s \in \Gamma(X_g, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{M})$$

von einem globalen Schnitt aus $\Gamma(X, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{M})$ herrührt.

Beweis. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine endliche offene affine Überdeckung derart, dass die Einschränkungen von $\mathcal{L}$ auf die U_i trivial sind. Wir betrachten die Situation

$$V_i = X_g \cap U_i \subseteq U_i,$$

hier ist also V_i eine offene Teilmenge des affinen Schemas $U_i = \operatorname{Spek}(R_i)$. Es ist

$$\mathcal{M}|_{U_i} = \widetilde{M_i}$$

mit einem R_i-Modul M_i. Unter dem Isomorphismus $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ entspricht die Einschränkung von g auf U_i einer Funktion $f_i \in R_i$ und für den Invertierbarkeitsort gilt $X_g \cap U_i = D(f_i)$. Somit ist

$$\Gamma(V_i, \mathcal{M}) \cong (M_i)_{f_i}.$$

(1) Sei $r_i = r|_{U_i} \in M_i$. Die Einschränkung davon auf V_i ist nach Voraussetzung gleich 0 und daher gibt es ein $n_i \in \mathbb{N}$ mit

$$f_i^{m_i} r_i = 0$$

in M_i, und dies gilt auch für alle größeren Exponenten. Übersetzt nach $\mathcal{L}^{m_i} \otimes \mathcal{M}$ bedeutet dies, dass das globale Element $g^{m_i} r$ eingeschränkt auf U_i gleich 0 ist. Somit erhalten wir mit

$$m = \max(m_i, i \in I)$$

ein m derart, dass $g^m r$ auf sämtlichen U_i gleich 0 wird. Aufgrund der Garbeneigenschaft ist dann $g^m r$ gleich 0 auf X.

(2) Der vorgegebene Schnitt $s \in \Gamma(X_g, \mathcal{M})$ liefert durch Einschränkung Schnitte

$$s_i \in \Gamma(V_i, \mathcal{M}) = \Gamma(D(f_i), M_i) = (M_i)_{f_i}.$$

Es ist also $s_i = \frac{t_i}{f_i^{\ell_i}}$ mit $t_i \in M_i$. Dabei kann man die ℓ_i erhöhen, so dass wir annehmen können, dass eine solche Darstellung für jedes i mit einem gemeinsamen ℓ vorliegt. Dies bedeutet, dass die Einschränkungen von $g^\ell s \in \Gamma\left(X_g, \mathcal{L}^\ell \otimes \mathcal{M}\right)$ auf $X_g \cap U_i$ jeweils von einem Element

$$t_i \in \Gamma\left(U_i, \mathcal{L}^\ell \otimes \mathcal{M}\right)$$

herrühren. Die t_i sind im Allgemeinen nicht verträglich. Es ist aber die Einschränkung von $t_i - t_j$ auf $X_g \cap U_i \cap U_j$ gleich 0. Nach dem ersten Teil, angewendet auf $X_g \cap U_i \cap U_j \subseteq U_i \cap U_j$, ergibt sich, dass es ein m_{ij} derart gibt, dass $g^{m_{ij}}(t_i - t_j)$ gleich 0 in $\Gamma\left(U_i \cap U_j, \mathcal{L}^{\ell + m_{ij}} \otimes \mathcal{M}\right)$ ist. Wir multiplizieren die Situation mit g^m, wobei m das Maximum aller m_{ij} ist, und erhalten dann die Verträglichkeit und somit mit $n = \ell + m$ die Existenz einer globalen Fortsetzung von $g^n s$.

□

14. Arbeitsblatt

Aufgabe 14.1. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring R und $X = \operatorname{Spek}(R)$. Zeige

$$\widetilde{\mathfrak{a}}|_{D(\mathfrak{a})} \cong \mathcal{O}_X|_{D(\mathfrak{a})}.$$

Aufgabe 14.2. Es sei M ein R-Modul über einem kommutativen Ring R und $f \in R$. Zeige

$$\widetilde{M}|_{D(f)} \cong \widetilde{M_f},$$

wobei rechts die Modulgarbe zum R_f-Modul M_f steht.

Aufgabe 14.3. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Es sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(R)$ ein Primideal mit $M_{\mathfrak{p}} = 0$. Zeige, dass es ein $f \notin \mathfrak{p}$ gibt mit $M_f = 0$.

Aufgabe 14.4. Es sei R ein kommutativer Ring und sei $\varphi\colon M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus zwischen endlich erzeugten R-Moduln. Es sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(R)$ ein Primideal derart, dass der induzierte Homomorphismus $\varphi\colon M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ surjektiv ist. Zeige, dass es ein $f \notin \mathfrak{p}$ derart gibt, dass $\varphi\colon M_f \to N_f$ surjektiv ist.

Aufgabe 14.5. Es sei R ein noetherscher kommutativer Ring und sei $\varphi\colon M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus zwischen endlich erzeugten R-Moduln. Es sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(R)$ ein Primideal derart, dass der induzierte Homomorphismus $\varphi\colon M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ injektiv ist. Zeige, dass es ein $f \notin \mathfrak{p}$ derart gibt, dass $\varphi\colon M_f \to N_f$ injektiv ist.

Aufgabe 14.6. Zeige anhand von $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, dass die Aussagen aus Aufgabe 14.3, Aufgabe 14.4 und Aufgabe 14.5 ohne die Vorausssetzung der endlichen Erzeugtheit nicht stimmen.

Aufgabe 14.7. Sei K ein Körper,

$$R = K[X_n, Y_n, n \in \mathbb{N}]/(X_n Y_n,\, n \in \mathbb{N})$$

und $\mathfrak{p} = (X_n,\, n \in \mathbb{N}) \subseteq R$.

(1) Zeige, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist.
(2) Zeige $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = 0$.
(3) Zeige $\mathfrak{p}_f \neq 0$ für $f \notin \mathfrak{p}$.
(4) Zeige, dass

$$\varphi\colon R \longrightarrow R/\mathfrak{p}$$

lokalisiert in $\mathfrak{p}$ injektiv (also auch bijektiv) ist, aber keine Nenneraufnahme an einem einzigen Element $f \notin \mathfrak{p}$ injektiv ist.

Aufgabe 14.8. Es sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $Q(R)$. Zeige, dass $\widetilde{Q(R)}$ eine konstante Garbe auf dem Spektrum $\operatorname{Spek}(R)$ ist.

Aufgabe 14.9. Es sei R ein kommutativer Ring und M, N seien R-Moduln. Zeige

$$\widetilde{\operatorname{Hom}(M, N)} \cong \mathcal{H}om\Big(\widetilde{M}, \widetilde{N}\Big).$$

Aufgabe 14.10. Es sei $U = (\mathbb{A}_K^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathcal{O}_X)$ die punktierte affine Ebene. Man gebe ein Beispiel für globale Schnitte $s_1, s_2 \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ derart, dass (s_1, s_2) nicht das Einheitsideal ist, dass aber der zugehörige $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus $\mathcal{O}_U^2 \to \mathcal{O}_U$, $e_i \mapsto s_i$, surjektiv ist.

Aufgabe 14.11. Wir betrachten zu $R = K[X,Y]$ die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow R^2 \longrightarrow (X,Y) = \mathfrak{m} \longrightarrow 0\,,$$

wobei hinten die Standardvektoren auf die Idealerzeuger gehen und vorne die 1 auf $(Y,-X)$ abgebildet wird. Dies führt nach Lemma 14.9 zu einer exakten Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spek}(R)} \longrightarrow \mathcal{O}^2_{\operatorname{Spek}(R)} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0\,.$$

Es sei $U = D(X,Y)$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Es ist $\Gamma\big(U, \mathcal{O}_{\operatorname{Spek}(R)}\big) = R$.
(2) Es ist $\Gamma(U, \widetilde{\mathfrak{m}}) = R$.
(3) Die Auswertung der exakten Garbensequenz auf U ist

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow R^2 \longrightarrow R\,,$$

wobei die hintere Abbildung nicht surjektiv ist.

Aufgabe 14.12. Es sei R ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal in R mit der zugehörigen kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0\,.$$

Interpretiere die entsprechende kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{I} \longrightarrow \widetilde{R} \longrightarrow \widetilde{R/I} \longrightarrow 0$$

auf dem Spektrum von R. Auf welchen offenen Mengen und in welchen Punkten werden die Objekte (Auswertungen bzw. Halme) zu 0 und die Homomorphismen zu Isomorphismen?

Aufgabe 14.13. Es sei $\theta\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus zwischen den kommutativen Ringen A und B und sei $\varphi\colon \operatorname{Spek}(B) \to \operatorname{Spek}(A)$ die zugehörige Spektrumsabbildung. Es sei N ein B-Modul mit der zugehörigen Modulgarbe $\widetilde{N}$ auf $\operatorname{Spek}(B)$. Zeige

$$\varphi_*(\widetilde{N}) = \widetilde{N'},$$

wobei N' einfach der B-Modul N, aufgefasst als A-Modul, ist.

Aufgabe 14.14. Es sei $\theta\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus zwischen den kommutativen Ringen A und B und sei $\varphi\colon \operatorname{Spek}(B) \to \operatorname{Spek}(A)$ die zugehörige Spektrumsabbildung. Es sei M ein A-Modul mit der zugehörigen Modulgarbe $\widetilde{M}$ auf $\operatorname{Spek}(A)$. Zeige

$$\varphi^*(\widetilde{M}) = \widetilde{M \otimes_A B}$$

auf $\operatorname{Spek}(B)$.

Die folgende Aufgabe beschreibt die ringtheoretische Version zu Lemma Anhang 4.3. Zusammen mit den beiden vorstehenden Aufgaben ergibt sie wiederum die Spektrumsversion dieser Aussage.

Aufgabe 14.15. Es sei $\theta\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus zwischen den kommutativen Ringen A und B. Es sei M ein A-Modul und N ein B-Modul. Zeige, dass es einen natürlichen Gruppenisomorphismus

$$\operatorname{Hom}_B(M \otimes_A B, N) = \operatorname{Hom}_A(M, N')$$

gibt, wobei N' den B-Modul N, aufgefasst als A-Modul, bezeichnet.

Aufgabe 14.16. Es sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathcal{M}$ ein quasikohärenter Modul auf $\operatorname{Spek}(R)$. Zeige $\mathcal{M} \cong \widetilde{M}$ für einen R-Modul M.

Aufgabe 14.17. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ quasikohärente Moduln auf einem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass dann auch die direkte Summe $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ wieder quasikohärent ist.

Aufgabe 14.18. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ kohärente Moduln auf einem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass dann auch die direkte Summe $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ wieder kohärent ist.

Aufgabe 14.19. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ quasikohärente Moduln auf einem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ und sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus. Zeige, dass der Kern $\operatorname{kern} \varphi$ ebenfalls quasikohärent ist.

Aufgabe 14.20. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ kohärente Moduln auf einem noetherschen Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ und sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus. Zeige, dass der Kern $\operatorname{kern} \varphi$ ebenfalls kohärent ist.

Aufgabe 14.21. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ quasikohärente Moduln auf einem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ und sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus. Zeige, dass der Kokern $\operatorname{Kokern} \varphi$ ebenfalls quasikohärent ist.

Aufgabe 14.22. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein noethersches Schema und sei $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ eine globale Funktion mit Invertierbarkeitsort X_f. Es sei $\mathcal{M}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_U$-Modul auf X. Zeige

$$\Gamma(X_f, \mathcal{M}) = \Gamma(X, \mathcal{M})_f.$$

Aufgabe 14.23. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein noethersches Schema und sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Es sei $\mathcal{M}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_U$-Modul auf U. Zeige, dass der Vorschub $i_* \mathcal{M}$ ein quasikohärenter Modul auf X ist.

Betrachte zuerst die Situation, wo X affin ist.

Aufgabe 14.24. Wir betrachten die invertierbare Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(1)$ auf dem projektiven Raum über einem Körper K zusammen mit dem globalen Schnitt $X_0 \in \Gamma\big(\mathbb{P}^n_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(1)\big)$ und der Invertierbarkeitsmenge $(\mathbb{P}^n_K)_{X_0} = D_+(X_0)$. Es sei $f \in \Gamma\big(D_+(X_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}\big)$ eine auf $D_+(X_0) \subseteq \mathbb{P}^n_K$ definierte Funktion. Zeige direkt, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass

$$X_0^m f \in \Gamma\big(\mathbb{P}^n_K, \big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(1)\big)^m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}\big)$$

von einem globalen Element aus $\Gamma\big(\mathbb{P}^n_K, \big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(1)\big)^m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}\big)$ herrührt.

Aufgabe 14.25. Wir betrachten die invertierbare Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(1)$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$ über einem Körper K zusammen mit dem globalen Schnitt $X \in \Gamma\Big(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(1)\Big)$ und der Invertierbarkeitsmenge $(\mathbb{P}^1_K)_X = D_+(X)$. Finde für die folgenden Funktionen f aus $\Gamma\Big(D_+(X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(1)\Big)$ ein geeignetes n derart, dass $X^n f \in \Gamma\Big(D_+(X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(n)\Big)$ von einem (von welchen?) Element aus $\Gamma\Big(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(n)\Big)$ herrührt.

(1) $\frac{Y}{X}$,
(2) $\frac{2Y^3 - 3Y^2X + 4X^3}{X^3}$,
(3) $\frac{Y^{17} + X^{17}}{X^{17}}$.

Aufgabe 14.26. Spezialisiere Satz 14.13 für den Fall, wo $\mathcal{M}$ die Strukturgarbe von X ist.

15. Vorlesung - Moduln auf projektiven Schemata

15.1. **Quasikohärente Moduln auf projektiven Schemata.**

Graduierte Moduln zu einem graduierten Ring R führen zu quasiprojektiven Moduln auf $\operatorname{Proj}(R)$.

Lemma 15.1. *Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter kommutativer Ring und M ein $\mathbb{Z}$-graduierter R-Modul. Dann besitzt der zugehörige $\mathcal{O}_X$-Modul $\widetilde{M}$ auf* $\operatorname{Spek}(R)$ *die Eigenschaft, dass für jede offene Menge $U = D(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$ zu einem homogenen Ideal $\mathfrak{a}$ der $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Modul $\Gamma\Big(U, \widetilde{M}\Big)$ eine $\mathbb{Z}$-Graduierung besitzt, die mit den Restriktionsabbildungen verträglich ist.*

Beweis. Die Aussage bedeutet zunächst für $M = R$, dass die Strukturgarbe auf den offenen Mengen zu homogenen Idealen eine Graduierung besitzt. Dies ist für die $D(f)$ zu homogenem f klar und folgt daraus für beliebige $D(\mathfrak{a})$ zu einem homogenen Ideal $\mathfrak{a}$. Ebenso ergibt sich der Modulfall. $\square$

Es ergibt keinen Sinn, zu sagen, dass $\widetilde{M}$ als Ganzes graduiert ist, da dies auf beliebigen offenen Mengen, die nicht von einem homogenen Ideal herrühren, nicht definiert ist. Allerdings erlaubt es die Graduierung auf den homogenen Teilmengen, auf dem zu R gehörenden projektiven Spektrum eine Modulgarbe zu definieren.

Definition 15.2. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter kommutativer Ring und M ein $\mathbb{Z}$-graduierter R-Modul. Es sei $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das projektive Spektrum zu R. Die $\mathcal{O}_Y$- *Modulgarbe* $\widehat{M}$ zu M wird folgendermaßen festgelegt: Zu jeder offenen Menge $V = D_+(\mathfrak{a}) \subseteq Y$ zu einem homogenen Ideal $\mathfrak{a}$ setzt man

$$\Gamma\left(V, \widehat{M}\right) := \Gamma\left(D(\mathfrak{a}), \widetilde{M}\right)_0$$

und versieht dies mit den natürlichen Restriktionsabbildungen und der natürlichen $\mathcal{O}_Y$-Modulstruktur.

Für einen graduierten R-Modul M und ein homogenes Primideal $\mathfrak{p}$ setzen wir $M_{(\mathfrak{p})} = (M_{h \text{ homogen}, h \notin \mathfrak{p}})_0$.

Lemma 15.3. *Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter kommutativer Ring und M ein $\mathbb{Z}$-graduierter R-Modul. Es sei $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das projektive Spektrum zu R und $\widehat{M}$ der zugehörige $\mathcal{O}_Y$-Modul. Dann gelten folgende Eigenschaften*

(1) *$\widehat{M}$ ist ein quasikohärenter Modul.*
(2) *Zu einem homogenen Element $f \in R_+$ ist*

$$\Gamma\left(D_+(f), \widehat{M}\right) = (M_f)_0.$$

Ferner ist $\widehat{M}$ eingeschränkt auf $D_+(f)$ gleich der affinen Vergarbung von $(M_f)_0$ auf $D_+(f) = \operatorname{Spek}\left((R_f)_0\right)$.
(3) *Zu einem homogenen Primideal $R_+ \not\subseteq \mathfrak{p}$ ist*

$$\widehat{M}_{\mathfrak{p}} = M_{(\mathfrak{p})}.$$

(4) *Es ist*

$$\Gamma\left(Y, \widehat{M}\right) = \left(\Gamma\left(D(R_+), \widetilde{M}\right)\right)_0.$$

Beweis. (1) Die Garbeneigenschaft ergibt sich aus der Garbeneigenschaft von $\widetilde{M}$. Für die Quasikohärenz siehe Teil (2).

(2) Für homogenes $f \in R_+$ ist

$$\Gamma\left(D_+(f), \widehat{M}\right) = \Gamma\left(D(f), \widetilde{M}\right)_0 = (M_f)_0$$

nach Lemma 14.5. Somit stimmt die Garbe $\widehat{M}|_{D_+(f)}$ global auf $D_+(f)$ mit der Garbe $\widetilde{(M_f)_0}$ überein. Für die offenen Teilmengen $D(g) \subseteq D(f)$ gelten die entsprechenden Gleichheiten, und diese Identifizierungen sind mit den Restriktionen verträglich. Daher stimmen die Garben überhaupt überein und es liegt Quasikohärenz vor.

(3) Folgt aus (2) über

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{\mathfrak{p}} &= \operatorname{colim}_{\mathfrak{p} \in D_+(f)} \Gamma\Big(D_+(f), \widehat{M}\Big) \\ &= \operatorname{colim}_{\mathfrak{p} \in D_+(f)} (M_f)_0 \\ &= \big(\operatorname{colim}_{\mathfrak{p} \in D_+(f)} (M_f)\big)_0 \\ &= \big(M_{R \setminus \mathfrak{p} \cap H}\big)_0 \\ &= M_{(\mathfrak{p})}. \end{aligned}$$

(4) Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Definition.

□

Die letzte Aussage bedeutet, dass im Allgemeinen der globale Schnittmodul von $\widehat{M}$ auf Y nicht unmittelbar aus M berechnet werden kann.

Definition 15.4. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter kommutativer Ring und $R(n)$ der um n verschobene graduierte Ring. Dann bezeichnet man mit

$$\mathcal{O}_Y(n) := \widehat{R(n)}$$

den zugehörigen $\mathcal{O}_Y$-Modul auf $Y = \operatorname{Proj}(R)$. Man spricht von den *getwisteten Strukturgarben*.

Beispiel 15.5. Zum Polynomring $K[X_0, X_1, \ldots, X_d]$, $d \geq 1$, mit der Standardgraduierung ist

$$\Gamma\Big(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(\ell)\Big) = K[X_0, X_1, \ldots, X_d]_\ell,$$

also die Polynome vom Grad ℓ in $d+1$ Variablen. Für negatives ℓ ist dies der Nullraum, für $\ell = 0$ (die Strukturgarbe) ist dies gleich K, für $\ell = 1$ besteht es aus allen Linearformen, u.s.w. Für die offenen Mengen $D_+(X_i)$ gilt

$$\begin{aligned} \Gamma\Big(D_+(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(\ell)\Big) &= (K[X_0, X_1, \ldots, X_d]_{X_i})_\ell \\ &= K[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_d}{X_i}] \cdot X_i^\ell. \end{aligned}$$

Für den projektiven Raum haben wir schon in Beispiel 13.19 gesehen, dass diese Garben invertierbar sind. Dies gilt auch allgemein.

Lemma 15.6. *Es sei R ein standard-graduierter kommutativer Ring. Dann sind die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_Y(n)$ auf $Y = \operatorname{Proj}(R)$ invertierbar.*

Beweis. Es sei $R = R_0[x_1,\ldots,x_d] = R_0[X_1,\ldots,X_d]/\mathfrak{a}$ mit x_i vom Grad 1. Dann erzeugen die x_i auch das irrelevante Ideal und daher liegt eine offene affine Überdeckung

$$\operatorname{Proj}(R) = \bigcup_{i=1}^{d} D_+(x_i)$$

vor. Sei x eines der x_i. Nach Lemma 15.3 (2) ist

$$\mathcal{O}_Y(n)|_{D_+(x)} = \mathcal{L},$$

wobei $\mathcal{L}$ die affine Vergarbung des $(R_x)_0$-Moduls $L = (R_x(n))_0 = (R_x)_n$ auf

$$D_+(x) = \operatorname{Spek}((R_x)_0)$$

bezeichne. In dieser Situation ist aber

$$(R_x)_0 \longrightarrow (R_x)_n,\ h \longmapsto hx^n,$$

ein $(R_x)_0$-Modulisomorphismus, und daher liegt ein $\mathcal{O}_Y|_{D_+(x)}$-Modulisomorphismus

$$\mathcal{O}_Y|_{D_+(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_Y(n)|_{D_+(x)}$$

vor. □

Die getwisteten Strukturgarbe $\mathcal{O}_Y(n)$ sind für das projektive Schema $Y = \operatorname{Proj}(R)$ charakteristische, allerdings vom graduierten Ring R abhängige invertierbare Garben.

Lemma 15.7. *Es sei R ein standard-graduierter kommutativer Ring, sei M ein graduierter R-Modul und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es eine natürliche $\mathcal{O}_Y$-Isomorphie*

$$\widehat{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(n) \longrightarrow \widehat{M(n)}$$

auf $Y = \operatorname{Proj}(R)$, wobei $M(n)$ den um n verschobenen Modul zu M bezeichnet.

Beweis. Zu einem homogenen Element $f \in R_+$ gibt es einen $(R_f)_0$-Modulhomomorphismus

$$(M_f)_0 \otimes_{(R_f)_0} (R_f)_n \longrightarrow (M_f)_n,\ \frac{m}{f^k} \otimes \frac{r}{f^\ell} \longmapsto \frac{rm}{f^{k+\ell}},$$

der unmittelbar von der (homogenen) Modulmultiplikation $M \times R \to M$ herrührt. Diese Homomorphismen induzieren für jede offene Teilmenge $U \subseteq \operatorname{Proj}(R)$ einen Modulhomomorphismus

$$\operatorname{colim}_{U \subseteq D_+(f)} \left((M_f)_0 \otimes_{(R_f)_0} (R_f)_n\right) \longrightarrow \operatorname{colim}_{U \subseteq D_+(f)} (M_f)_n,$$

der insgesamt ein Homomorphismus von Prägarben ist. Wegen $(M(n)_f)_0 = (M_f)_n$ ist die Vergarbung der Prägarbe rechts gleich $\widehat{M(n)}$. Die Vergarbung der linken Seite (in zwei Schritten) ist $\widehat{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(R)}} \mathcal{O}_Y(n)$, so dass ein Homomorphismus von Moduln

$$\widehat{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(R)}} \mathcal{O}_Y(n) \longrightarrow \widehat{M(n)},$$

vorliegt.

Dass ein Isomorphismus vorliegt kann auf einer affinen Überdeckung gezeigt werden. Wenn f homogen ist, so ist der obige $(R_f)_0$-Modulhomomorphismus

$$(M_f)_0 \otimes_{(R_f)_0} (R_f)_n \longrightarrow (M_f)_n$$

nach Lemma 14.10 und Lemma 15.3 (2) gleich der Auswertung des vergarbten Homomorphismus. Wenn f den Grad 1 besitzt (und die zugehörigen offenen Mengen $D_+(f)$ überdecken Y), so liegt ein Isomorphismus vor. Nach Aufgabe 12.2 ist $(R_f)_0 \cong (R_f)_n$ (über $1 \mapsto f^n$) so dass links ein zu $(M_f)_0$ isomorpher Modul steht. Mit dieser Identifizierung ist die Abbildung durch $\frac{m}{f^k} \mapsto f^n \cdot \frac{m}{f^k}$ gegeben, und diese ist bijektiv, da f eine Einheit ist. □

Definition 15.8. Es sei R ein standard-graduierter Ring, es sei $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter Modul auf $Y = \operatorname{Proj}(R)$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann nennt man

$$\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(n)$$

den n-ten *Twist* von $\mathcal{F}$.

Die Modulgarbe $\widehat{M(n)}$ stimmt also mit dem n-ten Twist von $\widehat{M}$ überein.

15.2. **Globale Erzeugtheit.**

Definition 15.9. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und es sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul auf X. Man sagt, dass $\mathcal{M}$ *von globalen Schnitten erzeugt* wird, wenn es eine Familie $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ ($i \in I$) derart gibt, dass für jeden Punkt $x \in X$ der Halm $\mathcal{M}_x$ als $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul von den (Einschränkungen der) s_i erzeugt wird.

Proposition 15.10. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ wird von globalen Schnitten erzeugt.*
(2) *Ein quasikohärenter Modul $\mathcal{M}$ wird genau dann von globalen Schnitten erzeugt, wenn es einen surjektiven Modulhomomorphismus $\mathcal{O}_X^{(I)} \to \mathcal{M}$ gibt.*
(3) *Auf einem affinen Schema wird jeder quasikohärente Modul von globalen Schnitten erzeugt.*
(4) *Wenn $\mathcal{M}$ von globalen Schnitten erzeugt wird und $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ surjektiv ist, so wird auch $\mathcal{N}$ von globalen Schnitten erzeugt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 15.16. □

Lemma 15.11. *Auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^d_R$ über einem kommutativen Ring R werden die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(k)$ bei $k \geq 0$ von globalen Schnitten erzeugt werden und bei $k < 0$ und $d \geq 1$ nicht.*

Beweis. Siehe Aufgabe 15.17. □

Satz 15.12. *Es sei $\mathbb{P}^d_R$ der projektive Raum über einem noetherschen Ring R und sei $\mathcal{G}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^d_R$. Dann gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}_+$ derart, dass $\mathcal{G}(\ell)$ von globalen Schnitten erzeugt wird.*

Beweis. Es ist $\mathcal{G}|D_+(X_i) \cong \widetilde{M_i}$ mit einem endlich erzeugten Modul M_i über dem zu $D_+(X_i)$ gehörenden Polynomring R_i. Für die invertierbare Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(1)$ ist der Invertierbarkeitsort zum globalen Schnitt X_i nach Aufgabe 13.21 gleich $D_+(X_i)$. Für ein endliches R_i-Modulerzeugendensystem s_{ij}, $j \in J_i$, von M_i gibt es nach Satz 14.13 (2) einen (gemeinsamen) Exponenten n derart, dass die $X_i^n s_{ij}$ von globalen Elementen aus $\Gamma\big(\mathbb{P}^d_R, \mathcal{G}(n)\big)$ herrühren. Dies kann man für jedes i machen und erhält somit ein ℓ derart, dass die globalen Schnitte aus $\Gamma\big(\mathbb{P}^d_R, \mathcal{G}(\ell)\big)$ die Moduln auf der offenen affinen Überdeckung erzeugen. Dies gilt dann auch in allen Halmen und somit liegt globale Erzeugtheit vor. □

Satz 15.13. *Es sei $\mathbb{P}^d_R$ der projektive Raum über einem noetherschen Ring R und sei $\mathcal{G}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^d_R$. Dann gibt es eine endliche direkte Summe $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(\ell_j)$ und einen surjektiven Modulhomomorphismus*

$$\bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(\ell_j) \longrightarrow \mathcal{G}.$$

Beweis. Nach Satz 15.12 gibt es ein ℓ derart, dass $\mathcal{G}(\ell)$ von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt wird. Nach Proposition 15.10 (2) liegt also ein surjektiver Modulhomomorphismus

$$\mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^d_R} \longrightarrow \mathcal{G}(\ell)$$

vor. Wir tensorieren mit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(-\ell)$ und erhalten eine Surjektion

$$\Big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(-\ell)\Big)^r \longrightarrow \mathcal{G}.$$

□

15. Arbeitsblatt

Aufgabe 15.1. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring, M ein graduierter Modul über R und $\widetilde{M}$ die zugehörige Modulgarbe auf dem Spektrum $X = \operatorname{Spek}(R)$. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein homogenes Ideal. Zeige, dass durch

$$\Gamma\Big(D(\mathfrak{a}), \widetilde{M}\Big)_\ell = \Big\{ s \in \Gamma\Big(D(\mathfrak{a}), \widetilde{M}\Big) \mid \text{ es gibt eine offene Überdeckung } U = \bigcup_{i \in I} D(f_i) \text{ mit } f_i \text{ homogen derart, dass } s \in M_{f_i} \text{ den Grad } \ell \text{ besitzt} \Big\}$$

eine Graduierung auf $\Gamma\left(D(\mathfrak{a}), \widetilde{M}\right)$ gegeben ist, für die die natürlichen Restriktionshomomorphismen homogen sind.

Aufgabe 15.2. Man mache sich anhand von $R = K[X]$ und $f = X+1$ klar, dass es keine Graduierung auf der Nenneraufnahme $K[X]_{X+1}$ gibt, die die Standardgraduierung auf dem Polynomring in sinnvoller Weise fortsetzt.

Aufgabe 15.3. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und M ein graduierter Modul über R. Zeige, dass die Zuordnung

$$U = D_+(\mathfrak{a}) \longmapsto \operatorname{colim}_{U \subseteq D_+(f)} (M_f)_0$$

eine Prägarbe von kommutativen Gruppen auf $\operatorname{Proj}(R)$ ist, deren Vergarbung mit $\widehat{M}$ übereinstimmt.

Aufgabe 15.4. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und M ein graduierter Modul über R. Zeige, dass die zugehörige $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe $\widehat{M}$ auf $Y = \operatorname{Proj}(R)$ durch

$$\Gamma\left(U, \widehat{M}\right) = \Bigg\{ (s_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in U} \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})} \mid \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es homogene Elemente}$$

$$b \in R \text{ und } t \in M \text{ mit } \mathfrak{p} \in D_+(b) \subseteq U \text{ und } s_\mathfrak{q} = \frac{t}{b} \text{ in } M_{(\mathfrak{q})} \text{ für alle } \mathfrak{q} \in D_+(b) \Bigg\}$$

gegeben ist.

Aufgabe 15.5. Es sei R ein integrer $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und $M = R_H$ die Nenneraufnahme zu allen homogenen Elementen vom Grad $\neq 0$. Zeige, dass $\widehat{M}$ der Funktionenkörper des integren Schemas $\operatorname{Proj}(R)$ ist.

Aufgabe 15.6. Es sei $R = K[X_0, X_1, \ldots, X_d]/\mathfrak{a}$ ein standard-graduierter Ring und

$$(a_0, a_1, \ldots, a_d) \in V(\mathfrak{a}) = \mathbb{A}_K^{d+1}$$

ein K-Punkt $\neq 0$ von R mit dem zugehörigen homogenen Primideal $\mathfrak{p} = (a_i X_j - a_j X_i,\ )$, das ein abgeschlossener Punkt in $\operatorname{Proj}(R) = V_+(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{P}_K^d$ ist. Zeige, dass $\widehat{R/\mathfrak{p}}$ ein quasikohärenter Modul auf $\operatorname{Proj}(R)$ (und auf $\mathbb{P}_K^d$) ist, deren Träger gleich $\{\mathfrak{p}\}$ ist.

Aufgabe 15.7. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und $Y = \operatorname{Proj}(R)$. Zeige, dass nicht isomorphe graduierte R-Moduln M und N zu isomorphen $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\widehat{M}$ und $\widehat{N}$ führen können.

Aufgabe 15.8. Es sei $R = K[X_0, X_1, \ldots, X_d]/\mathfrak{a}$ mit einem homogenen Ideal $\mathfrak{a}$ und sei $Y = \operatorname{Proj}(R) \subseteq \mathbb{P}^d_K$. Zeige $i_*\mathcal{O}_Y = \widehat{R}$ auf dem $\mathbb{P}^d_K$.

Aufgabe 15.9. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und sei

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$-graduierten R-Moduln mit homogenen Homomorphismen. Zeige, dass in jeder Stufe eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow L_k \longrightarrow M_k \longrightarrow N_k \longrightarrow 0$$

von R_0-Moduln vorliegt.

Aufgabe 15.10. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und seien L, M, N $\mathbb{Z}$-graduierte R-Moduln mit homogenen Homomorphismen $\varphi\colon L \to M$ und $\psi\colon M \to N$. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $R_+ \not\subseteq \mathfrak{p}$ sei die Sequenz

$$0 \longrightarrow L_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\varphi} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\psi} N_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

exakt. Zeige, dass eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widehat{L} \longrightarrow \widehat{M} \longrightarrow \widehat{N} \longrightarrow 0$$

auf $Y = \operatorname{Proj}(R)$ vorliegt.

Aufgabe 15.11. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring. Zeige, dass der verschobene R-Modul $R(n)$ nur bei $n = 0$ ein graduierter Ring ist.

Aufgabe 15.12. Es sei $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das projektive Spektrum zu einem standard-graduierten Ring R. Zeige, dass für die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_Y(\ell)$ die Beziehung $\mathcal{O}_Y(\ell) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(m) \cong \mathcal{O}_Y(\ell + m)$ gilt.

Aufgabe 15.13. Es sei $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das projektive Spektrum zu einem standard-graduierten Ring R. Zeige, dass für die getwisteten Strukturgarben die Beziehung $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_Y(\ell), \mathcal{O}_Y(m)) \cong \mathcal{O}_Y(m - \ell)$ gilt.

Aufgabe 15.14. Es sei $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das projektive Spektrum zu einem standard-graduierten Ring R. Zeige, dass die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_Y(\ell)$ zu $\ell \leq 0$ sich als Idealgarbe auf Y realisieren lassen. Zeige ferner, dass es hierfür im Allgemeinen mehrere Möglichkeiten gibt.

Aufgabe 15.15. Es sei $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_d$ ein kommutativer $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ ein $\mathbb{Z}$-graduierter Modul über R, der endlich erzeugt sei. Zeige, dass M auch von endlich vielen homogenen Elementen erzeugt wird und dass es einen surjektiven homogenen Modulhomomorphismus der Form

$$\bigoplus_{i=1}^{k} R(-d_i) \longrightarrow M$$

gibt.

Aufgabe 15.16. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Zeige, dass folgende Aussagen gelten.

(1) Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ wird von globalen Schnitten erzeugt.
(2) Ein quasikohärenter Modul $\mathcal{M}$ wird genau dann von globalen Schnitten erzeugt, wenn es einen surjektiven Modulhomomorphismus $\mathcal{O}_X^{(I)} \to \mathcal{M}$ gibt.
(3) Auf einem affinen Schema wird jeder quasikohärente Modul von globalen Schnitten erzeugt.
(4) Wenn $\mathcal{M}$ von globalen Schnitten erzeugt wird und $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ surjektiv ist, so wird auch $\mathcal{N}$ von globalen Schnitten erzeugt.

Aufgabe 15.17. Zeige, dass auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^d_R$ über einem kommutativen Ring R die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(k)$ bei $k \geq 0$ von globalen Schnitten erzeugt werden und bei $k < 0$ und $d \geq 1$ nicht.

Aufgabe 15.18. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $\mathcal{M}$ ein quasikohärenter Modul auf X. Zeige, dass $\mathcal{M}$ genau dann von globalen Schnitten erzeugt wird, wenn es eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Schnitte $s_j \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ zu $j \in J$ derart gibt, dass die Restriktionen $\rho_{U_i}(s_j) \in \Gamma(U_i, \mathcal{M})$ ein $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$-Modulerzeugendensystem von $\Gamma(U_i, \mathcal{M})$ bilden.

Aufgabe 15.19. Es sei $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das projektive Spektrum zu einem standard-graduierten Ring R. Zeige, dass die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_Y(\ell)$ zu $\ell \geq 0$ von globalen Schnitten erzeugt werden.

16. Vorlesung - Lokal freie Garben

16.1. **Lokal freie Garben.**

Definition 16.1. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ auf einem beringten Raum X heißt *lokal frei* vom *Rang* r, wenn es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $\mathcal{O}_{U_i}$-Modulisomorphismen $\mathcal{F}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_{U_i})^r$ für jedes $i \in I$ gibt.

Für $r = 1$ erhält man die invertierbaren Garben, diese sind einfach die lokal freien Garben vom Rang r. Die einfachsten lokal freien Garben sind die *freien Garben* ist $\mathcal{O}_X^r$ (zu $r \in \mathbb{N}$). Gemäß der Definition ist eine lokal freie Garbe lokal, also auf einer Überdeckung aus offenen Mengen, frei. Lokal lassen sich also freie Garben und lokal freie Garben nicht unterscheiden. Lokal freie Garben reflektieren daher globale Eigenschaften des beringten Raumes X.

Wir betrachten lokal freie Garben auf Schemata, wo sich enge Beziehungen zu projektiven und flachen Moduln ergeben. Lokal freie Garben sind insbesondere kohärente Moduln. Über einem lokalen Ring sind alle lokal freien Garben frei, da das Spektrum nur einen abgeschlossenen Punkt enthält und dieser nur die Gesamtmenge als offene Umgebung besitzt. Wenn man jedoch zu einem lokalen Ring das punktierte Spektrum $U = D(\mathfrak{m}) = \operatorname{Spek}(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ betrachtet, so gibt es darauf in der Regel viele nichttriviale (nichtfreie) lokal freie Garben, die Eigenschaften des lokalen Ringes (der Singularität) widerspiegeln. Da jedes Schema durch affine Schemata überdeckt wird, muss man insbesondere zuerst die lokal freien Garben auf einem affinen Schema verstehen.

Satz 16.2. *Sei R ein kommutativer noetherscher Ring und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Sei $r \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(1) *Die Lokalisierungen $M_{\mathfrak{p}}$ sind frei vom Rang r für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(R)$.*
(2) *Die Lokalisierungen $M_{\mathfrak{m}}$sind frei vom Rang r für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R.*
(3) *Es gibt Elemente $f_1, \ldots, f_k \in R$, die das Einheitsideal erzeugen derart, dass die Nenneraufnahmen M_{f_j} für jedes $j = 1, \ldots, k$. frei vom Rang r sind.*
(4) *Die zu M gehörige kohärente Garbe $\widetilde{M}$ auf* $\operatorname{Spek}(R)$ *ist lokal frei vom Rang r.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Dies ist eine Spezialisierung. (2) $\Rightarrow$ (3). Wir fixieren ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. Nach Voraussetzung gibt es einen $R_{\mathfrak{m}}$-Modulisomorphismus

$$\varphi\colon (R_{\mathfrak{m}})^r \longrightarrow M_{\mathfrak{m}}.$$

Wir schreiben das Bild des i-ten Standardvektors e_i als

$$\varphi(e_i) = \frac{m_i}{g_i}$$

mit $m_i \in M$ und $g_i \in R \setminus \mathfrak{m}$. Es sei $g = g_1 \cdots g_r$ das Produkt der Nenner. Wir betrachten die Situation über $D(g)$. Der Isomorphismus φ ist über $D(g)$ (auf R_g) definiert, d.h. wir haben einen R_g-Modulhomomorphismus

$$\psi\colon (R_g)^r \longrightarrow M_g,$$

der in der Lokalisierung an $\mathfrak{m}$ den Isomorphismus φ induziert. Allerdings ist ψ im Allgemeinen kein Isomorphismus. Es sei $v_1, \ldots, v_s$ ein Erzeugendensystem für den Modul M. Da ψ auf $R_\mathfrak{m}$ eine Surjektion induziert, gibt es Elemente $u_j = \frac{a_j}{h_j} \in (R_\mathfrak{m})^r$, die nach v_j abbilden. Die Nenner h_j gehören nicht zu $\mathfrak{m}$, daher können wir g durch $h = gh_1 \cdots h_s$ ersetzen und erhalten

$$\psi\colon\ (R_h)^r \longrightarrow M_h$$

mit Elementen $u_j = (R_h)^r$ derart, dass die $\psi(u_j)$ in $M_\mathfrak{m}$ auf die Erzeuger v_j einschränken. Dies bedeutet, dass es Elemente $p_j \notin \mathfrak{m}$ mit $p_j\psi(u_j) = p_jv_j$ in M_h gibt. Wenn man h durch $p = hp_1 \cdots p_s$ ersetzt, erhält man, dass ψ ebenfalls surjektiv ist. Es sei N der Kern von (diesem neuen) ψ. Da φ injektiv ist, gilt $N_\mathfrak{m} = 0$. Da R noethersch ist, ist N nach Lemma 20.8 (Kommutative Algebra) endlich erzeugt und so gibt es wiederum ein Element f, $f \notin \mathfrak{m}$, mit $N_f = 0$. Indem wir weiter verkleinern erhalten wir einen Isomorphismus $\psi\colon\ (R_f)^r \to M_f$ für ein f, $f \notin \mathfrak{m}$.

Wir wissen also, dass es zu jedem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ eine offene Umgebung $\mathfrak{m} \in D(f_\mathfrak{m})$ derart gibt, dass $M_{f_\mathfrak{m}}$ frei vom Rang r ist. Daher enthält

$$\bigcup_{\mathfrak{m} \text{ maximal ideal}} D(f_\mathfrak{m})$$

alle maximalen Ideale und auch alle Primideale, es liegt also eine offene Überdeckung von Spek$\,(R)$ vor. Daher ist nach Proposition 8.4 (4) $(f_\mathfrak{m} : \mathfrak{m}\,\text{maximal})$ das Einheitsideal, und dieses wird bereits von endlich vielen der $f_\mathfrak{m}$ erzeugt. (3) $\Rightarrow$ (4). Da die Elemente das Einheitsideal erzeugen, überdecken die zugehörigen offenen Mengen $D(f_j)$, $j = 1, \ldots, k$, das Spektrum Spek$\,(R)$. Da M_{f_j} freie R_{f_j}-Moduln vom Rang r sind, liegen $\mathcal{O}_X|_{D(f_j)}$-Modulisomorphismen $\widetilde{M}|_{D(f_j)} \cong \widetilde{(R_{f_j})^r} \cong \mathcal{O}^r_{D(f_j)}$ vor. Daher ist $\widetilde{M}$ lokal frei. (4) $\Rightarrow$ (1). Sei $\mathfrak{p} \in$ Spek$\,(R)$ ein Primideal. Die lokale Freiheit bedeutet, dass wir eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ derart haben, dass die $\widetilde{M}|_{U_i}$ frei vom Rang r sind. Somit gibt es einen Index i mit $\mathfrak{p} \in U_i$. Indem wir zu einer eventuell kleineren offenen Umgebung von $\mathfrak{p}$ übergehen können wir $U_i = D(f)$ mit $f \notin \mathfrak{p}$ übergehen. Dabei gilt, dass $\widetilde{M_f} \cong \widetilde{M}|_{D(f)}$ frei vom Rang r ist. Doch dann ist erst recht die Lokalisierung $M_\mathfrak{p}$ frei vom Rang r. $\square$

Das Beispiel aus Aufgabe 14.7 zeigt, dass es bei einem nichtnoetherschen Ring R einem Modul M mit $M_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p}$ geben kann, ohne dass diese Isomorphie auf eine offene Umgebung fortsetzbar ist.

Wir setzen lokal freie Moduln in Bezug zu projektiven Moduln.

Definition 16.3. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Der Modul M heißt *projektiv*, wenn es zu jedem surjektiven R-Modulhomomorphismus

$$\theta\colon\ A \longrightarrow B$$

und jedem Modulhomomorphismus

$$\varphi \colon M \longrightarrow B$$

einen Modulhomomorphismus

$$\psi \colon M \longrightarrow A$$

mit

$$\varphi = \theta \circ \psi$$

gibt.

Ein Modul ist genau dann projektiv, wenn er ein direkter Summand von einem freien Modul ist.

Lemma 16.4. *Es sei R ein kommutativer lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M genau dann frei, wenn M ein projektiver Modul ist.*

Beweis. Dass freie Moduln projektiv sind wurde in Lemma 30.2 (Kommutative Algebra) bewiesen. Sei also M projektiv. Es sei $m_1, \ldots, m_n$ ein minimales Erzeugendensystem von M und sei

$$p \colon R^n \longrightarrow M$$

der zugehörige surjektive Modulhomomorphismus. Wegen der Minimalität ist

$$(R/\mathfrak{m})^n \longrightarrow M/\mathfrak{m}M$$

eine $R/\mathfrak{m}$-lineare bijektive Abbildung. Wegen der Projektivität gibt es einen Modulhomomorphismus $i \colon M \to R^n$ mit $p \circ i = \mathrm{Id}_M$. Dann ist

$$R^n \cong M \oplus N$$

mit $N = \operatorname{kern} p$ und wobei wir M mit $i(M)$ identifizieren. Wir betrachten nun

$$R^n \xrightarrow{\cong} M \oplus N \longrightarrow M$$

und die induzierten $R/\mathfrak{m}$-linearen Abbildungen

$$(R/\mathfrak{m})^n \longrightarrow M/\mathfrak{m}M \oplus N/\mathfrak{m}N \longrightarrow M/\mathfrak{m}M\,.$$

Hierbei ist sowohl die Abbildung links als auch die Gesamtabbildung bijektiv. Daher muss $N/\mathfrak{m}N = 0$ sein. Aus Satz 21.3 (Kommutative Algebra) folgt $N = 0$ und somit ist $R^n = M$ frei. □

Lemma 16.5. *Es sei R ein noetherscher kommutativer Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M genau dann lokal frei, wenn M ein projektiver Modul ist.*

Beweis. Die eine Richtung folgt direkt aus Lemma 16.4 unter Berücksichtigung von Aufgabe 16.16. Zum Beweis der Umkehrung sei $p \colon L \to M$ ein surjektiver Modulhomomorphismus mit einem endlich erzeugten freien R-Modul L. Es ist zu zeigen, dass es einen Homomorphismus $i \colon M \to L$ mit

$p \circ i = \mathrm{Id}_M$ gibt. Dies ist insbesondere dann gesichert, wenn man zeigen kann, dass der natürliche Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}_R(M, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, M),\ \varphi \longmapsto p \circ \varphi,$$

surjektiv ist, da ja dann insbesondere die Identität getroffen wird. Nach Satz Anhang 1.4 kann man die Surjektivität lokal testen. Für die Homomorphismenmoduln gilt unter den gegebenen Endlichkeitsvoraussetzungen

$$(\mathrm{Hom}_R(M, L))_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}).$$

Die Surjektivität von

$$\mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}})$$

folgt aber für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus der Freiheit von $M_{\mathfrak{p}}$ und Lemma 30.2 (Kommutative Algebra). □

Es gilt ferner der folgende Satz, den wir nicht beweisen.

Satz 16.6. *Es sei R ein kommutativer noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *M ist lokal frei.*
(2) *M ist ein projektiver Modul.*
(3) *M ist ein flacher Modul.*

Mit dem folgenden Satz erhält man viele lokal freie Garben, die im Allgemeinen nicht trivial sind.

Satz 16.7. *Sei X ein noethersches Schema und sei*

$$\theta\colon \mathcal{F} \longrightarrow G$$

ein surjektiver Garbenhomomorphismus zwischen lokal freien Garben auf X. Dann ist der Kern von θ ebenfalls lokal frei.

Beweis. Da die lokale Freiheit eine lokale Eigenschaft ist, können wir direkt annehmen, dass

$$X = \mathrm{Spek}(R)$$

ein affines Schema zu einem noetherschen Ring R ist und (durch weitere Verkleinerung der offenen Menge) dass ein surjektiver Modulhomomorphismus $\theta\colon R^r \to R^s$ vorliegt. Nach Satz 20.11 (Kommutative Algebra) gibt es ein $\varphi\colon R^s \to R^r$ mit

$$\theta \circ \varphi = \mathrm{Id}_{R^s}.$$

Somit gibt es eine direkte Summenzerlegung

$$R^r = \mathrm{kern}\,\theta \oplus R^s$$

und θ ist die Projektion auf den Summanden R^s. Damit ist $\mathrm{kern}\,\theta$ nach Lemma 30.3 (Kommutative Algebra) ein projektiver R-Modul und nach Lemma 16.5 lokal frei. □

Bemerkung 16.8. Zu Elementen $f_1, \ldots, f_n \in R$ in einem kommutativen Ring R gehört der Modulhomomorphismus $R^n \to R$, $e_i \mapsto f_i$. Das Bild ist das von den f_i erzeugte Ideal, insbesondere ist diese Abbildung nur dann surjektiv, wenn die f_i das Einheitsideal erzeugen. Der zugehörige Modulhomomorphismus $\mathcal{O}_X^n \to \mathcal{O}_X$ ist im Allgemeinen auch nicht surjektiv und der Kern ist im Allgemeinen nicht lokal frei. Wenn man allerdings die Einschränkung dieses Garbenhomomorphismus auf die offene Teilmenge $U = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$ betrachtet, also $\mathcal{O}_U^n \to \mathcal{O}_U$, so erhält man einen surjektiven Garbenhomomorphismus, da auf den einzelnen $D(f_i)$ wegen $\frac{1}{f_i} e_i \mapsto 1$ ein surjektiver Garbenhomomorphismus vorliegt. Der Kern ist dann nach Satz 16.7 eine lokal freie Garbe auf dem quasiaffinen Schema U, es wird mit $\operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n)$ bezeichnet, man sprich von einer *Syzygiengarbe* oder *Kerngarbe*. Wenn R ein lokaler Ring ist und die f_i ein Ideal erzeugen, dass zum maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ primär ist (d.h. die f_i schneiden geometrisch den abgeschlossenen Punkt heraus), so ist die Syzygiengarbe eine lokal freie Garbe auf dem punktierten Spektrum $D(\mathfrak{m})$.

Beispiel 16.9. Die Variablen $X_1, \ldots, X_n \in K[X_1, \ldots, X_n] = R$ definieren das maximale Ideal $(X_1, \ldots, X_n)$ und die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Syz}(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow R^n \longrightarrow (X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow 0$$

von R-Moduln, wobei der i-te Standardvektor e_i auf X_i geschickt wird. Dies induziert gemäß Lemma 14.9 eine kurze exakte Sequenz von quasikohärenten Moduln

$$0 \longrightarrow \widetilde{\operatorname{Syz}(X_1, \ldots, X_n)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}_K^n}^n \longrightarrow \widetilde{(X_1, \ldots, X_n)} \longrightarrow 0$$

auf dem affinen Raum $\mathbb{A}_K^n$. In der Mitte steht eine freie Garbe, links und rechts stehen (außer bei kleinen n) keine lokal freien Garben. Wenn man diese Sequenz aber auf das punktierte Spektrum

$$U = D(X_1, \ldots, X_n) \subseteq \mathbb{A}_K^n$$

einschränkt, so wird rechts nach Aufgabe 14.1 das maximale Ideal zur Strukturgarbe und somit liegt die Situation

$$0 \longrightarrow \operatorname{Syz}(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow \mathcal{O}_U^n \longrightarrow \mathcal{O}_U \longrightarrow 0$$

aus Bemerkung 15.8 vor, wobei jetzt links die lokal freie Syzygiengarbe steht. Für $n = 3$ ist dies die Garbenversion zu Beispiel 1.2.

16.2. **Determinantengarben.**

Definition 16.10. Zu einer lokal freien Garbe $\mathcal{G}$ auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ vom Rang r nennt man die Vergarbung der Prägarbe

$$U \mapsto \bigwedge^r \Gamma(U, \mathcal{G})$$

die *Determinantengarbe* von $\mathcal{G}$. Sie wird mit $\operatorname{Det} \mathcal{G}$ bezeichnet.

Satz 16.11. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und sei*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von lokal freien Garben auf X. Dann gibt es eine kanonische Isomorphie

$$\operatorname{Det} G \cong \operatorname{Det} F \otimes \operatorname{Det} H.$$

Beweis. Es sei r der Rang von $\mathcal{F}$ und s der Rang von $\mathcal{H}$. Wir betrachten offene Teilmengen $U \subseteq X$, auf denen die drei beteiligten Garben trivialisieren und worauf die Garbensurjektion $\mathcal{F} \to \mathcal{H}$ einen Schnitt besitzt. Solche offenen Mengen überdecken X. Es liegt dann die Situation

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_U^r \longrightarrow \mathcal{O}_U^{r+s} \longrightarrow \mathcal{O}_U^s \longrightarrow 0$$

vor und sei

$$\theta \colon \mathcal{O}_U^s \longrightarrow \mathcal{O}_U^{r+s}$$

ein Schnitt. Wir definieren

$$\Psi \colon \bigwedge^r \mathcal{O}_U^r \times \bigwedge^s \mathcal{O}_U^s \longrightarrow \bigwedge^{r+s} \mathcal{O}_U^{r+s}$$

durch

$$\Psi(u_1 \wedge \ldots \wedge u_r, w_1 \wedge \ldots \wedge w_s) := u_1 \wedge \ldots \wedge u_r \wedge \theta(w_1) \wedge \ldots \wedge \theta(w_s).$$

Diese Abbildung ist unabhängig vom gewählten Schnitt θ. Für einen weiteren Schnitt θ' liegt ja $\theta - \theta'$ in $\mathcal{F}$. Doch dann ist

$$\begin{aligned} & u_1 \wedge \ldots \wedge u_r \wedge \theta'(w_1) \wedge \ldots \wedge \theta'(w_s) \\ = \;& u_1 \wedge \ldots \wedge u_r \wedge (\theta(w_1) + u_1') \wedge \ldots \wedge (\theta(w_s) + u_s') \\ = \;& u_1 \wedge \ldots \wedge u_r \wedge \theta(w_1) \wedge \ldots \wedge \theta(w_s), \end{aligned}$$

da ja stets eine lineare Abhängigkeit zwischen den $r+1$ Vektoren $u_1, \ldots, u_r, u_j'$ vorliegt und daher die entsprechenden Dachprodukte 0 sind. Die Abbildung Ψ ist bilinear und definiert daher eine lineare Abbildung

$$\tilde{\Psi} \colon \bigwedge^r \mathcal{O}_U^r \otimes \bigwedge^s \mathcal{O}_U^s \longrightarrow \bigwedge^{r+s} \mathcal{O}_U^{r+s}.$$

Da die Abbildungen kanonisch sind, induzierten sie auf kleineren offenen Teilmengen stets die gleiche Abbildung. Daher verkleben sie nach Korollar 4.10 zu einem Garbenhomomorphismus

$$\bigwedge^r \mathcal{F} \otimes \bigwedge^s \mathcal{H} \longrightarrow \bigwedge^{r+s} \mathcal{G}.$$

Dieser ist lokal aufgrund der expliziten Beschreibung ein Isomorphismus, also nach Lemma 4.6 auch global ein Isomorphismus. □

Korollar 16.12. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und sei*

$$\mathcal{F} = \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_r$$

eine direkte Summe von invertierbaren Garben. Dann ist

$$\operatorname{Det} F \cong \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_r .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.22. □

16. Arbeitsblatt

Aufgabe 16.1. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ lokal freie Garben auf einem beringten Raum vom Rang r bzw. s. Zeige, dass die direkte Summe $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ lokal frei vom Rang $r+s$ ist.

Aufgabe 16.2. Es sei $\mathcal{F}$ eine lokal freie Garbe vom Rang r auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass die duale Garbe $\mathcal{F}^*$ ebenfalls lokal frei vom Rang r ist.

Aufgabe 16.3. Zeige, dass eine lokal freie Garbe $\mathcal{F}$ auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ in natürlicher Weise isomorph zu ihrem Bidual $\mathcal{F}^{**}$ ist.

Aufgabe 16.4. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ lokal freie Garben auf einem beringten Raum. und sei $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein surjektiver Modulhomomorphismus. Zeige, dass der Kern $\operatorname{kern} \varphi$ ebenfalls lokal frei ist.

Aufgabe 16.5. Zeige, dass der Rang von lokal freien Garben auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ additiv für kurze exakte Sequenzen ist. Dies bedeutet, dass wenn eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

von lokal freien Garben vorliegt, dass dann

$$\operatorname{rang} \mathcal{G} = \operatorname{rang} \mathcal{F} + \operatorname{rang} \mathcal{H}$$

ist.

Aufgabe 16.6. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ lokal freie Garben auf einem beringten Raum vom Rang r bzw. s. Zeige, dass das Tensorprodukt $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ lokal frei vom Rang rs ist.

Aufgabe 16.7. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ lokal freie Garben auf einem beringten Raum und sei $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein injektiver Modulhomomorphismus. Zeige, dass die Quotientengarbe $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ im Allgemeinen nicht lokal frei ist.

Aufgabe 16.8. Es sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter Modul auf einem noetherschen Schema $(X, \mathcal{O}_X)$. Es sei $r \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) $\mathcal{F}$ ist lokal frei vom Rang r.
(2) Für jeden Punkt $P \in X$ ist der $\mathcal{O}_{X,P}$-Modul $\mathcal{F}_P$ frei vom Rang r.

Aufgabe 16.9. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein noethersches integres Schema und sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter Modul auf X. Zeige, dass es eine offene nichtleere Teilmenge $U \subseteq X$ derart gibt, dass $\mathcal{F}|_U$ frei ist.

Aufgabe 16.10. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein noethersches Schema und sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Modulhomomorphismus von kohärenten Moduln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf X. Es sei $P \in X$ ein Punkt derart, dass $\varphi_P\colon \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ ein Isomorphismus ist. Zeige, dass es eine offene Umgebung $P \in U \subseteq X$ derart gibt, dass $\varphi\colon \mathcal{F}|_U \to \mathcal{G}|_U$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 16.11. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein flacher R-Modul. Es sei S eine R-Algebra. Zeige, dass $M \otimes_R S$ ein flacher S-Modul ist.

Aufgabe 16.12.*

Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Zeige, dass M genau dann ein projektiver Modul, wenn es einen weiteren Modul N derart gibt, dass die direkte Summe $M \oplus N$ frei ist.

Aufgabe 16.13. Es sei K ein Körper und $R = K^n$ der Produktring. Zeige, dass jeder R-Modul M projektiv ist.

Aufgabe 16.14. Man gebe ein Beispiel für einen artinschen Ring und einen endlich erzeugten R-Modul M, der nicht projektiv ist.

Aufgabe 16.15. Zeige, dass es zu dem surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$p\colon \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_+)} \longrightarrow \mathbb{Q},\ e_n \longmapsto \frac{1}{n},$$

keinen Gruppenhomomorphismus

$$i\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_+)}$$

mit $p \circ i = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$ gibt. Folgere, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ nicht projektiv ist.

Aufgabe 16.16. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein projektiver R-Modul. Es sei $T \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass M_T ein projektiver R_T-Modul ist.

Aufgabe 16.17. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein projektiver R-Modul. Es sei S eine R-Algebra. Zeige, dass $M \otimes_R S$ ein projektiver S-Modul ist.

Aufgabe 16.18. Sei R ein kommutativer Ring und $f_1, \ldots, f_n \in R$. Es sei

$$\mathcal{S} = \operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n)$$

die zugehörige Syzygiengarbe auf $U = D(f_1, \ldots, f_n) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$. Man gebe explizite Trivialisierungen für $\mathcal{S}|_{D(f_i)}$ an.

Aufgabe 16.19. Sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und $f_1, \ldots, f_n \in R$ homogene Elemente vom Grad d_i. Das von den f_i erzeugte Ideal I und das irrelevante Ideal R_+ haben das gleiche Radikal. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Es liegt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} R(-d_i) \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

von graduierten R-Moduln mit homogenen Homomorphismen vor.

(2) Auf $Y = \operatorname{Proj}(R)$ liegt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_Y(-d_i) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

von lokal freien Garben vor.

(3) Auf $D_+(f_i)$ ist die Einschränkung der lokal freien Garbe

$$\operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n)$$

isomorph zu einer direkten Summe von getwisteten Strukturgarben.

Aufgabe 16.20. Es sei $\mathcal{F}$ eine lokal freie Garbe auf einem beringten Raum. Zeige, dass die Determinantengarbe $\operatorname{Det} F$ invertierbar ist.

Aufgabe 16.21. Es sei $\mathcal{F}$ eine lokal freie Garbe auf einem beringten Raum mit der Dualgarbe $\mathcal{F}^*$. Zeige, dass für die Determinantengarben die Beziehung

$$(\operatorname{Det} F)^* = \operatorname{Det}(F^*)$$

gilt.

Aufgabe 16.22. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und sei

$$\mathcal{F} \,=\, \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_r$$

eine direkte Summe von invertierbaren Garben. Zeige

$$\operatorname{Det} F \,\cong\, \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_r .$$

Aufgabe 16.23. Zeige, dass in der Situation von Aufgabe 16.19 die Determinantengarbe der lokal freien Garbe $\operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n)$ auf $Y \,=\, \operatorname{Proj}(R)$ gleich

$$\operatorname{Det}(\operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n)) \,=\, \mathcal{O}_Y(-\sum_{i=1}^{n} d_i)$$

ist.

17. Vorlesung - Geometrische Vektorbündel

17.1. **Geometrische Vektorbündel.**

Zu einem affinen Schema $U \,=\, \operatorname{Spek}(R)$ nennt man

$$\mathbb{A}_U^r \,:=\, \operatorname{Spek}(R[T_1, \ldots, T_r])$$

zusammen mit der natürlichen Projektion auf $\operatorname{Spek}(R)$, also der Spektrumsabbildung zu $R \to R[T_1, \ldots, T_r]$, das *triviale Bündel* vom Rang r über U. Zu einem Punkt $P \in \operatorname{Spek}(R)$, der dem Ringhomomorphimus $R \to \kappa(P)$ entspricht, ist die Faser von $\mathbb{A}_U^r$ über P durch $\mathbb{A}_{\kappa(P)}^r$, also dem r-dimensionalen affineen Raum über dem Restekörper $\kappa(P)$, gegeben. Zu einem beliebigen Schema X mit einer affinen Überdeckung $X \,=\, \bigcup_{i \in I} U_i$ definiert man $\mathbb{A}_X^r$, indem man die $\mathbb{A}_{U_i}^r$ im Sinne von Lemma 7.10 so verklebt, wie es die Verklebungen der U_i (innerhalb von X) vorgeben. Dieses *triviale Bündel* vom Rang r kommt zusammen mit der Projektion $\mathbb{A}_X^r \to X$. Man spricht auch vom *affinen Zylinder* vom Rang r über X und schreibt dafür auch $X \times \mathbb{A}^r$. Diese trivialen Bündel sind die lokalen Bausteine für das Konzept eines geometrischen Vektorbündels über einem Schema.

Definition 17.1. Sei X ein Schema. Ein Schema V zusammen mit einem Morphismus $p \colon V \to X$ heißt *geometrisches Vektorbündel* vom Rang r über X, wenn es eine offene Überdeckung $X \,=\, \bigcup_{i \in I} U_i$ und U_i-Isomorphismen

$$\psi_i \colon\, U_i \times \mathbb{A}^r = \mathbb{A}_{U_i}^r \longrightarrow V|_{U_i} = p^{-1}(U_i)$$

derart gibt, dass für jede offene affine Teilmenge $U \subseteq U_i \cap U_j$ die Übergangsabbildungen

$$\psi_j^{-1} \circ \psi_i \colon\, \mathbb{A}_{U_i}^r|_U \longrightarrow \mathbb{A}_{U_j}^r|_U$$

lineare Automorphismen sind, also durch einen Automorphismus des Polynomringes $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)[T_1, \ldots, T_r]$ der Form $T_i \mapsto \sum_{j=1}^{r} a_{ij} T_j$ induziert sind.

Die Abbildungen ψ_i heißen dabei die *Trivialisierungen* des Vektorbündels.

Das folgende Beispiel schließt an Beispiel 14.6 an.

Beispiel 17.2. Wir betrachten den quadratischen Zahlbereich $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, in dem die Gleichheit

$$2 \cdot 3 = 6 = (1 + \sqrt{5}\mathrm{i})(1 - \sqrt{5}\mathrm{i})$$

gilt und darüber die R-Algebra

$$A = R[X, Y]/(3X - (1 - \mathrm{i}\sqrt{5})Y)$$

mit der zugehörigen Spektrumsabbildung $\operatorname{Spek}(A) \to \operatorname{Spek}(R)$. Wir behaupten, dass ein geometrisches Geradenbündel vorliegt, wofür wir die offene Überdeckung $\operatorname{Spek}(R) = D(2) \cup D(3)$ heranziehen. Es ist

$$A_2 = R_2[X, Y]/(3X - (1 - \mathrm{i}\sqrt{5})Y) \cong R_2[S]$$

mit $X \mapsto 2S$, $Y \mapsto (1 + \mathrm{i}\sqrt{5})S$ wegen $S = X/2$ und $X = 2S$ und $Y = \frac{3}{1-\mathrm{i}\sqrt{5}}X = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{5}}{2}X = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{5}\right)S$ ein Isomorphismus. Ebenso ist

$$A_3 = R_3[X, Y]/(3X - (1 - \mathrm{i}\sqrt{5})Y) \cong R_3[T]$$

mit $X \mapsto (1 - \mathrm{i}\sqrt{5})T$, $Y \mapsto 3T$ wegen $T = Y/3$ und $Y = 3T$ und $X = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{5}}{3}Y = 1 - \mathrm{i}\sqrt{5}|T$ ein Isomorphismus. Auf $D(6) = D(2) \cap D(3)$ ist die Übergangsabbildung durch $S = \frac{X}{2} = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{5}}{2}T$ gegeben, also linear.

Beispiel 17.3. Wir betrachten den Ringhomomorphismus

$$K[X, Y, Z] \longrightarrow K[X, Y, Z][U, V, W]/(XU + YV + ZW),$$

die zugehörige Spektrumsabbildung

$$\operatorname{Spek}(K[X, Y, Z][U, V, W]/(XU + YV + ZW)) \longrightarrow \mathbb{A}^3_K$$

sowie deren Einschränkung

$$\begin{aligned} \varphi : & \operatorname{Spek}(K[X, Y, Z][U, V, W]/(XU + YV + ZW)) \\ & \supseteq D(X) \cup D(Y) \cup D(Z) \longrightarrow \mathbb{A}^3_K \setminus \{(0, 0, 0)\} = D(X) \cup D(Y) \cup D(Z). \end{aligned}$$

Letzteres ist ein geometrisches Vektorbündel vom Rang 2 über dem punktierten affinen Raum. Natürliche Trivialisierungen sind auf den $D(X), D(Y)$, $D(Z)$ gegeben, vergleiche Beispiel 1.2. Beispielsweise ist

$$(K[X, Y, Z][U, V, W]/(XU + YV + ZW))_X \cong K[X, Y, Z]_X[V, W],$$

da man

$$U = -\frac{YV + ZW}{X}$$

ausdrücken kann.

Beispiel 17.4. Wir betrachten den projektiven Raum
$$\mathbb{P}^n_K \,=\, \mathrm{Proj}\,(K[X_0, X_1, \ldots , X_n])$$
und das projektive Spektrum
$$W_k \,=\, \mathrm{Proj}\,(K[X_0, X_1, \ldots , X_n, Y]),$$
wobei die Grade von X_i gleich 1 sind und Y den Grad k bekommt. Gemäß Satz 12.11 induziert die homogene Inklusion
$$K[X_0, X_1, \ldots , X_n] \,\subset\, K[X_0, X_1, \ldots , X_n, Y]$$
einen Schemamorphismus
$$p\colon\, W_k \supset D_+(X_0, X_1, \ldots , X_n) = V_k \longrightarrow \mathbb{P}^n_K.$$
Auf $D_+(X_i)$ liegt die Abbildung
$$D_+(X_i) \cong \mathrm{Spek}\left(K[\frac{X_j}{X_i}, j \neq i, \frac{Y}{X_i^k}]\right) \longrightarrow D_+(X_i) \cong \mathrm{Spek}\left(K[\frac{X_j}{X_i}, j \neq i]\right)$$
vor, also ein triviales Geradenbündel. Zu $D_+(X_i)$ und $D_+(X_j)$ werden die Übergangsabbildungen über
$$\Gamma\big(D_+(X_iX_j), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}\big) \,=\, K[\frac{X_r}{X_i}, r \neq i, \frac{X_s}{X_j}, s \neq j]$$
durch $\frac{Y}{X_i^k} \mapsto \frac{Y}{X_j^k} \cdot \frac{X_j^k}{X_i^k}$ gegeben. Diese sind also linear und es liegt ein Geradenbündel über dem projektiven Raum vor.

Ein geometrisches Vektorbündel hat weitere Strukturen, die wir uns zuerst im Fall
$$\mathbb{A}^r_{\mathrm{Spek}\,(R)} = \mathrm{Spek}\,(R[T_1, \ldots , T_r]) \longrightarrow \mathrm{Spek}\,(R)$$
klar machen. Der R-Algebrahomomorphismus
$$R[T_1, \ldots , T_r] \longrightarrow R,\, T_i \longmapsto 0,$$
führt zu der Spektrumsabbildung
$$\mathrm{Spek}\,(R) \longrightarrow \mathrm{Spek}\,(R[T_1, \ldots , T_r]),$$
die eine abgeschlossene Einbettung ist und die man den *Nullschnitt* nennt. Der R-Algebrahomomorphismus
$$R[T_1, \ldots , T_r] \longrightarrow R[S_1, \ldots , S_r, T_1, \ldots , T_r],\, T_i \longmapsto S_i + T_i,$$
führt zur Spektrumsabbildung
$$\alpha\colon\, \mathbb{A}^{r+r}_R \cong \mathbb{A}^r_R \times_{\mathrm{Spek}\,(R)} \mathbb{A}^r_R \longrightarrow \mathbb{A}^r_R,$$
die man die Addition auf dem Vektorbündel nennt. Ferner führt der R-Algebrahomomorphismus
$$R[T_1, \ldots , T_r] \longrightarrow R[Z, T_1, \ldots , T_r],\, T_i \longmapsto ZT_i,$$
zu einer Spektrumsabbildung
$$\mathbb{A}^{r+1}_R \cong \mathbb{A}^1_R \times_{\mathrm{Spek}\,(R)} \mathbb{A}^r_R \longrightarrow \mathbb{A}^r_R,$$

die man die Skalarmultiplikation nennt.

Lemma 17.5. *Ein geometrisches Vektorbündel* $p\colon V \to X$ *über einem Schema* X *besitzt einen Nullschnitt*

$$X \longrightarrow V,$$

eine Additionsabbildung

$$V \times_X V \longrightarrow V$$

und eine Skalarmultiplikation

$$\mathbb{A}^1_X \times_X V \longrightarrow V.$$

Beweis. Auf einer affinen Teilmenge $U = \operatorname{Spek}(R) \subseteq X$ mit einer Trivialisierung

$$V|_U \cong \mathbb{A}^r_U \cong \operatorname{Spek}(R[T_1, \ldots, T_r])$$

gibt es den durch $T_i \mapsto 0$ gegebenen Nullschnitt. Wegen der Linearität der Übergangsabbildungen ist dieser Schnitt auf dem Durchschnitt $U_i \cap U_j$ unabhängig von der gewählten affinen Menge und somit wohldefiniert. Die Existenz der Addition beruht im Wesentlichen darauf, dass bei einem linearen R-Algebraisomorphimus

$$\theta\colon R[T_1, \ldots, T_r] \longrightarrow R[U_1, \ldots, U_r]$$

das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R[T_1, \ldots, T_r] & \stackrel{\alpha^*}{\longrightarrow} & R[T_1, \ldots, T_r, S_1, \ldots, S_r] \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \times \theta \\ R[U_1, \ldots, U_r] & \stackrel{\alpha^*}{\longrightarrow} & R[U_1, \ldots, U_r, V_1, \ldots, V_r] \end{array}$$

kommutiert. Die Existenz der Skalarmultiplikation ergibt sich in ähnlicher Weise. $\square$

17.2. **Vektorbündelhomomorphismen.**

Definition 17.6. Es seien V und W Vektorbündel über einem Schema X. Ein *Homomorphismus von Vektorbündeln* $\varphi\colon V \to W$ ist ein Schemamorphismus von V nach W über X derart, dass es zu jedem Punkt $P \in X$ eine offene affine Umgebung $P \in U \subseteq X$ gibt, die die vorgegebenen Trivialisierungsumgebungen der Bündel verfeinern (also $U \subseteq U_i, U'_j$ für geeignete i, j) und für die die Hintereinanderschaltungen

$$\mathbb{A}^r_U \stackrel{\psi_i|_U}{\longrightarrow} V|_U \stackrel{\varphi|_U}{\longrightarrow} W|_U \stackrel{\theta_j^{-1}|_U}{\longrightarrow} \mathbb{A}^s_U$$

auf der Ringebene durch einen linearen Einsetzungshomomorphismus gegeben sind.

In der folgenden Aussage ist Kern als Urbild des Nullschnittes zu verstehen, also in jeder Faser als Urbild des Nullpunktes. Bei einem Homomorphismus von Vektorbündeln ist über jedem Punkt $P \in X$ die Faserabbildung durch eine Matrix über dem zugehörigen Restekörper $\kappa(P)$ gegeben, allerdings gibt es in den affinen Räumen über diesem Körper Punkte mit ganz unterschiedlichenen Restekörpern, so dass man Konzepte der linearen Algebra mit einer gewissen Vorsicht anwenden muss.

Lemma 17.7. *Es seien V und W Vektorbündel über einem Schema X und $\varphi\colon V \to W$ ein surjektiver Homomorphismus von Vektorbündeln . Dann ist der (punktweise genommene) Kern ein Vektorbündel über X.*

Beweis. Siehe Aufgabe 17.18. □

Ohne die Bedingung der Surjektivität ist der Kern eines Vektorbündelhomomorphismus kein Vektorbündel. In Beispiel 17.3 ist der punktweise definierte Kern nur auf dem punktierten Spektrum ein Vektorbündel, im Nullpunkt degeneriert der Kern zu einem dreidimensionalen Vektorraum.

17.3. **Vektorbündel und lokal freie Garben.**

Definition 17.8. Zu einem geometrischen Vektorbündel $p\colon V \to X$ auf einem Schema X nennt man die zu einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ durch

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \{s : U \to V|_U \text{ Schemamorphismus} \mid p \circ s = \mathrm{Id}_U\}$$

definierte Garbe $\mathcal{F}$ die *Garbe der Schnitte* in V.

Lemma 17.9. *Zu einem geometrischen Vektorbündel $p\colon V \to X$ ist die Garbe der Schnitte $\mathcal{F}$ eine lokal freie Garbe.*

Beweis. Durch die Addition

$$V \times_X V \longrightarrow V$$

gibt es aufgrund von Aufgabe 17.19 eine wohldefinierte Addition auf der Garbe der Schnitte, wodurch $\mathcal{F}$ wegen Aufgabe 17.11 zu einer Garbe von kommutativen Gruppen wird. Durch die Skalarmultipliaktion

$$\mathbb{A}^1_X \times_X V \longrightarrow V$$

erhält man eine $\mathcal{O}_X$-Modulstruktur auf $\mathcal{F}$. Zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ mit $V|_U \cong \mathbb{A}^r{}_U$ ist

$$\mathcal{F}|_U \cong (\mathcal{O}_X|_U)^r$$

und $\mathcal{F}$ ist lokal frei. □

Geometrische Vektorbündel und lokal freie Garben sind im Wesentlichen äquivalente Objekte.

Satz 17.10. *Auf einem Schema entsprechen sich geometrische Vektorbündel und lokal freie Garben. Ferner entsprechen sich Vektorbündelhomomorphismen und $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismen. Einem geometrischen Vektorbündel V über X wird dabei die nach Lemma 17.9 lokal freie Garbe der Schnitte $\mathcal{S}_V$ zugeordnet und einem Vektorbündelhomomorphismus $\varphi\colon V \to W$ wird der Modulhomomorphismus $\mathcal{S}_V \to \mathcal{S}_W$ zugeordnet, der einen Schnitt $s\colon U \to V|_U$ auf den Schnitt $\varphi \circ s\colon U \to W|_U$ abbildet.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass jede lokal freie Garbe isomorph zu einer Garbe der Schnitte in einem Vektorbündel ist. Eine lokal freie Garbe $\mathcal{F}$ vom Rang r ist durch eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ (wobei wir die U_i als affin annehmen können) und Isomorphismen

$$\varphi_i\colon \mathcal{O}_{U_i}^r \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_i}$$

gegeben. Die Hintereinanderschaltung

$$\mathcal{O}_{U_i}^r|_{U_i\cap U_j} = \mathcal{O}_{U_i\cap U_j}^r \stackrel{\varphi_i|_{U_i\cap U_j}}{\longrightarrow} \mathcal{F}|_{U_i\cap U_j} \stackrel{\varphi_j^{-1}|_{U_i\cap U_j}}{\longrightarrow} \mathcal{O}_{U_i\cap U_j}^r = \mathcal{O}_{U_j}^r|_{U_i\cap U_j}$$

ist nach Satz 13.10 durch $e_k \mapsto f_k$ mit

$$f_k \in \Gamma\Big(U_i\cap U_j, \mathcal{O}_{U_i\cap U_j}^r\Big)$$

gegeben. Dabei ist $f_k = (f_{k\ell})_{1\le \ell\le r}$ mit

$$f_{k\ell} \in \Gamma(U_i\cap U_j, \mathcal{O}_X).$$

Ferner ist die Determinante der Matrix $(f_{k\ell})_{k\ell}$ eine Einheit in $\Gamma(U_i\cap U_j, \mathcal{O}_X)$ Dies definiert über

$$T_k \longmapsto \sum_{\ell=1}^r f_{k\ell} S_\ell$$

einen linearen $\Gamma(U_i\cap U_j, \mathcal{O}_X)$-Algebraisomorphismus

$$\Gamma(U_i\cap U_j, \mathcal{O}_X)[T_1, \ldots, T_r] \longrightarrow \Gamma(U_i\cap U_j, \mathcal{O}_X)[S_1, \ldots, S_r]$$

und einen Schemaisomorphismus

$$\varphi_{ji}\colon \mathbb{A}_{U_i\cap U_j}^r \longrightarrow \mathbb{A}_{U_i\cap U_j}^r,$$

der von der in der Definition eines geometrischen Vektorbündels geforderten Form ist. Wir betrachten das Verklebungsdatum von beringten Räumen

$$\left(W_i = \mathbb{A}_{U_i}^r,\, W_{ij} = \mathbb{A}_{U_i}^r|_{U_j} \subseteq W_i,\, \varphi_{ji} : W_{ij} \longrightarrow W_{ji}\right).$$

Die Kozykelbedingung ist dabei erfüllt, da die Daten von dem globalen Objekt $\mathcal{F}$ herrühren. Aufgrund von Lemma 7.10 gibt es ein Schema W, das dieses Verklebungsdatum realisiert. Die lokalen Projektionen

$$W_i = \mathbb{A}_{U_i}^r \longrightarrow U_i$$

verkleben dabei zu einem Schemamorphismus

$$W \longrightarrow X.$$

Aufgrund der Konstruktion handelt es sich um ein geometrisches Vektorbündel über X. Es sei $\mathcal{S}$ die Garbe der Schnitte zu W. Wir behaupten, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{S}$$

gibt. Wegen der Konstruktion gibt es natürliche Garbenisomorphismen

$$\mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{S}|_{U_i}$$

für jede offene Menge U_i, und deren Einschränkungen auf die Durchschnitte $U_i \cap U_j$ stimmen überein. Nach Korollar 4.10 gibt es daher einen globalen Garbenhomomorphismus, und dieser ist nach Lemma 4.6 ein Isomorphismus.

Die Injektivität der Zuordnung ergibt sich, da sich ein Vektorbündel (bis auf Isomomorphie) durch seine Garbe der Schnitte durch die beschriebene Konstruktion rekonstruieren lässt. Für die Aussage über die Homomorphismen siehe Aufgabe 17.21, Aufgabe 17.22 und Aufgabe 17.23. □

Die freie Garbe vom Rang r entspricht unter dieser Äquivalenz dem affinen Raum $\mathbb{A}_X^r$ über X.

Beispiel 17.11. Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$ ein Element. Dieses definiert über

$$\operatorname{Spek}(R[T]) = \mathbb{A}_R^1 \longrightarrow \operatorname{Spek}(R[T]) = \mathbb{A}_R^1,\, T \longmapsto fT,$$

einen Homomorphismus von Vektorbündeln. Dieser ist in den Fasern über den Punkten $P \in \operatorname{Spek}(R)$, in denen f eine Einheit ist (also den Punkten aus $D(f)$), eine Bijektion und über den anderen Punkten die Nullabbildung. Die Abbildung ist also nur dann injektiv (und zugleich surjektiv und bijektiv), wenn f eine Einheit ist. Das Element f definiert aber auch durch Multiplikation einen Homomorphismus der Strukturgarbe in sich

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X,\, 1 \longmapsto f.$$

Auf jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X = \operatorname{Spek}(R)$ liegt also der $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Modulhomomorphismus

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X),\, r \longmapsto rf,$$

vor. Dabei ist dieser Garbenhomomorphismus genau dann injektiv, wenn f ein Nichtnullteiler in R ist, und bijektiv genau dann, wenn f eine Einheit ist. Der Injektivitätsbegriff fällt also für Vektorbündel und lokal freie Garben auseinander.

17. Arbeitsblatt

Aufgabe 17.1. Vergleiche die Definition 17.1 eines geometrischen Vektorbündels über einem Schema mit der Definition 1.4 eines reellen Vektorbündels über einem topologischen Raum.

Aufgabe 17.2. Es sei $p\colon V \to X$ ein geometrisches Vektorbündel vom Rang r über dem Schema X. Zeige, dass die Faser zu p über dem Punkt $P \in X$ isomorph zu $\mathbb{A}^r_{\kappa(P)}$ ist.

Aufgabe 17.3. Was ist ein Vektorbündel über einem Schema X vom Rang 0?

Aufgabe 17.4. Diskutiere das triviale Geradenbündel

$$\operatorname{Spek}(\mathbb{Z}[X]) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \operatorname{Spek}(\mathbb{Z}).$$

Was kann man über die Fasern, was über Schnitte, was über abgeschlossene Teilmengen $Y \subseteq \operatorname{Spek}(\mathbb{Z}[X])$ und ihre Bilder in $\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$ sagen?

Aufgabe 17.5. Bestimme in Beispiel 17.3 die Trivialisierungen und die Übergangsabbildungen explizit.

Aufgabe 17.6. Zeige, dass in Beispiel 17.4 bei $k = 0$ das triviale Geradenbündel

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{P}^n_K} = \mathbb{A}^1_K \times \mathbb{P}^n_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

vorliegt.

Aufgabe 17.7. Zeige, dass in Beispiel 17.4 bei $k = 1$ die sogenannte Projektion weg von einem Punkt

$$\mathbb{P}^{n+1}_K \supset \mathbb{P}^{n+1}_K \setminus (0, 0, \ldots, 0, 1) = V_1 \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

vorliegt.

Aufgabe 17.8. Es sei X ein Schema und seien $p\colon V \to X$ und $W \to X$ Vektorbündel über X vom Rang r bzw. s. Definiere die *direkte Summe* $V \times_X W$ der beiden Vektorbündel unter Bezugnahme auf (simultane) Trivialisierungen $V|_U \cong \mathbb{A}^r_U$ und $W|_U \cong \mathbb{A}^s_U$ (es soll also $(V \times_X W)_U \cong V|_U \times_U W|_U \cong \mathbb{A}^{r+s}_U$ gelten).

Aufgabe 17.9. Definiere Konstruktionen aus der linearen Algebra wie direkte Summe, Dual, Tensorprodukt, äußeres Produkt für geometrische Vektorbündel über einem Schema.

Man orientiere sich an der dritten Vorlesung.

Aufgabe 17.10. Zeige, dass bei einem geometrischen Vektorbündel $V \to X$ der Nullschnitt eine abgeschlossene Einbettung ist.

Aufgabe 17.11. Es sei $p\colon V \to X$ ein Vektorbündel über X. Zeige, dass die Addition $\alpha\colon V \times_X V \to V$ die folgenden Eigenschaften besitzt (es ist zugleich zu zeigen, dass die angegebenen Morphismen existieren).

(1) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{Id} \times (N \circ p)"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & V \times_X V \arrow[d, "\alpha"] \\ & V \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei $N\colon X \to V$ den Nullschnitt bezeichnet.

(2) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times_X V \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & V \times_X V \arrow[d, "\alpha"] \\ & V \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei π die Vertauschung der beiden Faktoren bezeichnet.

(3) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times_X V \times_X V \arrow[r, "\alpha \times \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \times \alpha"'] & V \times_X V \arrow[d, "\alpha"] \\ V \times_X V \arrow[r, "\alpha"] & V \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Zur folgenden Aufgabe vergleiche man Aufgabe 1.6.

Aufgabe 17.12. Es sei K ein Körper. Wir betrachten

$$A = K[X, Y, U, V]/(XU + YV - 1),$$

die Spektrumsabbildung

$$\mathrm{Spek}\,(A) \longrightarrow \mathrm{Spek}\,(K[X, Y]) = \mathbb{A}_K^2$$

und die Einschränkung

$$p\colon\ \mathrm{Spek}\,(A) = D(X, Y) = V \longrightarrow U = D(X, Y) \subseteq \mathbb{A}_K^2$$

(worauf beruht die Gleichheit links?) Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Abbildung p ist auf $D(X)$ und auf $D(Y)$ isomorph zur affinen Gerade über der Basis.
(2) Die Abbildung $p\colon V \to U$ besitzt keinen Schnitt.
(3) V ist kein Geradenbündel.

Aufgabe 17.13. Es sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ über einem Körper K. Es seien $f_1, \ldots, f_n, f$ Elemente in R und es sei

$$A = R[T_1, \ldots, T_n]/(f_1T_1 + \cdots + f_nT_n + f)$$

die erzwingende Algebra zu diesen Daten. Es sei

$$p\colon \operatorname{Spek}(A) \supseteq V = D(f_1, \ldots, f_n) \longrightarrow U = D(f_1, \ldots, f_n) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$$

die eingeschränkte Spektrumsabbildung. Zeige, dass es eine offene affine Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ derart gibt, dass $p^{-1}(U_i)$ isomorph zu $U_i \times \mathbb{A}^{n-1}$ ist, und dass dabei die Übergangsabbildungen affin-linear sind.

Aufgabe 17.14. Zeige, dass ein Homomorphismus von trivialen Vektorbündeln

$$\varphi\colon \mathbb{A}^r_{\operatorname{Spek}(R)} \longrightarrow \mathbb{A}^s_{\operatorname{Spek}(R)}$$

über dem affinen Schema $\operatorname{Spek}(R)$ durch eine $s \times r$-Matrix über R gegeben ist.

Aufgabe 17.15. Zeige, dass ein Homomorphismus von Vektorbündeln

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

über X den Nullschnitt von V (aufgefasst als abgeschlossenes Unterschema) in den Nullschnitt von W abbildet.

Aufgabe 17.16. Es sei $\varphi\colon V \to W$ ein Homomorphismus von Vektorbündeln V, W über X. Zeige, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times_X V & \stackrel{\varphi \times \varphi}{\longrightarrow} & W \times_X W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ V & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & W \end{array}$$

kommutiert (ein Vektorbündelhomomorphismus ist also mit der Addition verträglich).

Aufgabe 17.17. Wir betrachten den Homomorphismus von trivialen Vektorbündeln

$$\varphi\colon \mathbb{A}^2_{\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})}$$

über $\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$, der durch die 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ gegeben ist. Bestimme die Punkte $P \in \operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$, für die die zugehörige Faserabbildung injektiv bzw. surjektiv ist.

Aufgabe 17.18. Es seien V und W Vektorbündel über einem Schema X und $\varphi\colon V \to W$ ein surjektiver Homomorphismus von Vektorbündeln. Zeige, dass der (punktweise genommene) Kern ein Vektorbündel über X ist.

Aufgabe 17.19. Es seien V und W Vektorbündel über einem Schema X. Zeige, dass die Garbe der Schnitte der direkten Summe $V \times_X W$ gleich der direkten Summe der Garbe der Schnitte von V und W ist.

Aufgabe 17.20. Zeige, dass die Garbe der Schnitte zu dem Geradenbündel

$$V_k \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

aus Beispiel 17.4 die getwistete Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(k)$ ist.

Aufgabe 17.21. Es seien $p\colon Y \to X$ und $q\colon Z \to X$ Schemata über einem Schema X und sei $\varphi\colon Y \to Z$ ein Schemamorphismus über X. Zeige, dass die zugehörige Abbildung der Garbe der Schnitte (in der Kategorie der Schemata) $\mathcal{S}_Y \to \mathcal{S}_Z$, die einem Schnitt $s\colon U \to p^{-1}(U)$ den Schnitt $\varphi \circ s\colon U \to q^{-1}(U)$ zuordnet, ein Garbenmorphismus ist.

Aufgabe 17.22. Es sei $\varphi\colon V \to W$ ein Vektorbündelhomomorphismus zwischen den Vektorbündeln V und W über X und sei

$$\psi\colon \mathcal{S}_V \longrightarrow \mathcal{S}_W$$

der zugehörigen Garbenmorphismus der Garbe der Schnitte. Zeige, dass ψ ein $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus ist.

Aufgabe 17.23. Es seien V und W Vektorbündel über dem Schema X und seien $\mathcal{S}_V$ $\mathcal{S}_W$ die zugehörigen Garben der Schnitte. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Hom}(V, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_W),$$

die einem Vektorbündelhomomorphismus der zugehörigen $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus zuordnet, eine Bijektion ist. Zeige ferner, dass sich unter dieser Korrespondenz die Isomorphismen entsprechen.

Aufgabe 17.24. Es seien V und W Vektorbündel über einem Schema X und $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ die zugehörigen lokal freien Garben der Schnitte. Es sei $\varphi\colon V \to W$ ein Homomorphismus von Vektorbündeln und $\psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ der zugehörige Garbenhomomorphismus. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) φ ist ein surjektiver Schemamorphismus.

(2) In jedem Punkt $P \in X$ ist die Faserabbildung $V(x) \to W(x)$ surjektiv.
(3) Der Homomorphismus $\psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist surjektiv.
(4) Es gibt eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und lokale Schnitte (Vektorbündelhomomorphismen)

$$s_i\colon W|_{U_i} \longrightarrow V|_{U_i}$$

zu φ.
(5) Es gibt eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und lokale Schnitte (Modulhomomorphismen)

$$t_i\colon \mathcal{G}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_i}$$

zu ψ.

18. Vorlesung - Kähler-Differentiale

18.1. **Der Modul der Kähler-Differentiale.**

Auf einer Mannigfaltigkeit M gibt es das Tangentialbündel $TM \to M$, das zu einem Punkt $P \in M$ aus dem Tangentialraum T_PM besteht, der durch Äquivalenzklassen von differenzierbaren Kurven

$$[-\epsilon, \epsilon] \longrightarrow M$$

durch P gegeben ist. Das Tangentialbündel ist ein reelles Vektorbündel auf M, das charakteristisch für die Mannigfaltigkeit ist und mit dessen Hilfe man viele Invarianten für die Mannigfaltigkeit definieren kann. Wir wollen ein entsprechendes Objekt für ein Schema (sagen wir vom endlichen Typ über einem Körper) definieren. Eine unmittelbare Übertragung des analytischen Konzeptes ist nicht möglich, da es keinen direkten Ersatz für die differenzierbaren Kurven gibt. Wir orientieren und daher an einem anderen Gesichtspunkt des Tangentialbündels. Einen (stetigen oder differenzierbaren) Schnitt im Tangentialbündel (über einer offenen Menge $U \subseteq M$) nennt man ein (stetiges oder differenzierbares) Vektorfeld. Ein Vektorfeld F ordnet jedem Punkt $P \in U$ einen Tangentialvektor $F(P) = T_PM$ zu. Man kann nun differenzierbare Funktionen auf M entlang eines Vektorfeldes F ableiten und erhält dabei wieder eine Funktion. Dazu setzt man

$$(D_F(f))(P) := (D_{F(P)}f)(P),$$

wobei die Richtungsableitung $(D_{F(P)}f)(P)$ von f in Richtung $F(P)$ in P bezeichnet. Diese Richtungsableitung kann man auf jeder Karte ausrechnen, das Ergebnis ist wegen der Kettenregel unabhängig von der gewählten Karte. Wenn M unendlich oft differenzierbar ist, so ergibt dies eine Abbildung

$$D_F\colon C^\infty(U, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}),\ f \longmapsto D_F(f).$$

Diese Abbildung ist eine $\mathbb{R}$-lineare Derivation im Sinne der folgenden rein algebraischen Definition. Wir werden aufbauend auf Derivationen den Modul der Kähler-Differentiale einführen und daraus dual ein Tangentialgarbe im schematheoretischen Kontext entwickeln, die ferner lokal frei ist, wenn das Schema keine Singularitäten besitzt. In dieser Vorlesung betrachten wir die affine Situation und verzichten auf Beweise.

Definition 18.1. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und M ein A-Modul. Dann heißt eine R-lineare Abbildung

$$\delta\colon A \longrightarrow M$$

mit

$$\delta(ab) \,=\, a\delta(b) + b\delta(a)$$

für alle $a, b \in A$ eine R- *Derivation* (mit Werten in M).

Die dabei verwendete Regel nennt man *Leibniz-Regel*. Oft ist $M = A$. Für den Polynomring $A = R[X_1, \ldots, X_n]$ sind beispielsweise die i-ten (formalen) partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial X_i}$$

R-Derivationen von A nach A. Die Menge der Derivationen von A nach M ist in natürlicher Weise ein A-Modul. Er wird mit $\operatorname{Der}_R(A, M)$ bezeichnet.

Definition 18.2. Es sei R ein kommutativer Ring und A eine kommutative R-Algebra. Der von allen Symbolen $d(a)$, $a \in A$, erzeugte A-Modul, modulo den Identifizierungen

$$d(ab) = ad(b) + bd(a) \text{ für alle } a, b \in A$$

und

$$d(ra + sb) = rd(a) + sd(b) \text{ für alle } r, s \in R \text{ und } a, b \in A\,,$$

heißt *Modul der Kähler-Differentiale* von A über R. Er wird mit

$$\Omega_{A|R}$$

bezeichnet.

Bei dieser Konstruktion startet man also mit dem freien A-Modul F mit da, $a \in A$ als Basis und bildet den A-Restklassenmodul zu demjenigen Untermodul, der von den Elementen

$$d(ab) - ad(b) - bd(a)\,(a, b \in A)$$

und

$$d(ra + sb) - rd(a) - sd(b)\,(r, s \in R \text{ und } a, b \in A)$$

erzeugt wird. Die Abbildung

$$d\colon A \longrightarrow \Omega_{A|R},\; a \longmapsto d(a) = da,$$

heißt die *universelle Derivation*. Man prüft sofort nach, dass es sich um eine R-Derivation handelt. Die Elemente in $\Omega_{A|R}$ heißen (algebraische) *Differentialformen*.

Lemma 18.3. *Sei R ein kommutativer Ring und A eine kommutative R-Algebra. Dann besitzt der A-Modul $\Omega_{A|R}$ der Kähler-Differentiale die folgende universelle Eigenschaft. Zu jedem A-Modul M und jeder R-Derivation*

$$\delta\colon A \longrightarrow M$$

gibt es eine eindeutig bestimmte A-lineare Abbildung

$$\epsilon\colon \Omega_{A|R} \longrightarrow M$$

mit $\epsilon \circ d = \delta$.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Diese Aussage kann man auch so ausdrücken, dass eine natürliche A-Modulisomorphie

$$\operatorname{Der}_R(A, M) \cong \operatorname{Hom}_A\left(\Omega_{A|R}, M\right)$$

vorliegt. Insbesondere ist

$$\operatorname{Der}_R(A, A) \cong \operatorname{Hom}_A\left(\Omega_{A|R}, A\right) = {\Omega_{A|R}}^*,$$

wobei rechts der Dualmodul genommen wird.

Lemma 18.4. *Sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und $\Omega_{A|R}$ der Modul der Kähler-Differentiale. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Es ist $dr = 0$ für alle $r \in R$.*
(2) *Man kann*
$$\Omega_{A|R}$$
als den Restklassenmodul des freien A-Moduls zur Basis da, $a \in A$, modulo dem Untermodul, der von den Leibnizrelationen und von dr, $r \in R$, erzeugt wird, beschreiben.
(3) *Bei $A = R[x_1, \ldots, x_n]$ ist dx_i, $i = 1, \ldots, n$, ein A-Modulerzeugendensystem von $\Omega_{A|R}$.*
(4) *Sei $A = R[x_1, \ldots, x_n] = R[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$. Für ein Polynom $F \in R[X_1, \ldots, X_n]$ und das zugehörige Element $f = F(x_1, \ldots, x_n) \in A$ gilt in $\Omega_{A|R}$ die Beziehung*
$$df = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n)dx_n,$$
wobei $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ die i-te partielle Derivation bezeichnet.
(5) *Zu einem kommutativen Diagramm*
$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array},$$
wobei die Pfeile Ringhomomorphismen repräsentieren, gibt es eine eindeutig bestimmte A-lineare Abbildung
$$\Omega_{A|R} \longrightarrow \Omega_{B|S},\ da \longmapsto d\varphi(a).$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. ☐

Lemma 18.5. *Es sei R ein kommutativer Ring und $A = R[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring in n Variablen über R. Dann ist der Modul der Kähler-Differentiale der freie A-Modul zur Basis*

$$dX_1, dX_2, \ldots, dX_n .$$

Die universelle Derivation ist bezüglich dieser Basis durch

$$A \longrightarrow AdX_1 \oplus \cdots \oplus AdX_n,\ F \longmapsto dF = \frac{\partial F}{\partial X_1} dX_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial X_n} dX_n,$$

gegeben.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. ☐

Im Allgemeinen ist der Modul der Kähler-Differentiale nicht frei.

Lemma 18.6. *Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System. Dann ist*

$$\Omega_{A_S|R} \cong \left(\Omega_{A|R}\right)_S .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 18.19. ☐

Lemma 18.7. *Es sei R ein kommutativer Ring und es seien A und B kommutative R-Algebren und*

$$\varphi\colon\ A \longrightarrow B$$

ein R-Algebrahomomorphismus. Dann ist die Sequenz

$$\Omega_{A|R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B|R} \longrightarrow \Omega_{B|A} \longrightarrow 0$$

von B-Moduln exakt. Dabei geht $da \otimes b$ auf $bd\varphi(a)$ und db (in $\Omega_{B|R}$) auf db (in $\Omega_{B|A}$).

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. ☐

18.2. **Kähler-Differentiale und Jacobi-Matrix.**

Lemma 18.8. *Es sei R ein kommutativer Ring, es sei A eine kommutative R-Algebra und $I \subseteq A$ ein Ideal mit dem Restklassenring $B = A/I$. Dann ist die Sequenz*

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A|R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B|R} \longrightarrow 0$$

von B-Moduln exakt. Dabei geht $a \in I$ auf $da \otimes 1$ und $da \otimes b$ auf bda.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. ☐

Korollar 18.9. *Es sei R ein kommutativer Ring und es sei A eine kommutative endlich erzeugte R-Algebra, die als*

$$A = R[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_k)$$

gegeben sei. Dann ist

$$\Omega_{A|R} = \bigoplus_{i=1}^{n} AdX_i/(dF_1, \ldots, dF_k).$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Bemerkung 18.10. Es sei R ein kommutativer Ring und es sei A eine kommutative endlich erzeugte R-Algebra, die als

$$A = R[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_k)$$

gegeben sei. Dann ist nach Lemma 18.4 (4)

$$dF_j = \frac{\partial F_j}{\partial X_1} dX_1 + \cdots + \frac{\partial F_j}{\partial X_n} dX_n$$

und nach Korollar 18.9 gibt es eine exakte Sequenz

$$A^k \xrightarrow{M} A^n \longrightarrow \Omega_{A|R} \longrightarrow 0\,,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial X_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial X_n} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

die transponierte Jacobi-Matrix (ohne Auswertung an einem Punkt) ist. Die Standardvektoren e_j werden auf dX_j abgebildet und die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_j}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_j}{\partial X_n} \end{pmatrix}$, die die Nullelemente dF_j repräsentieren, sind die Bilder der durch die Matrix gegebenen Abbildung.

18.3. **Glattheit und Regularität.**

Definition 18.11. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $F_1, \ldots, F_s \in K[X_1, \ldots, X_n]$ Polynome mit der zugehörigen affin-algebraischen Menge

$$Y = V(F_1, \ldots, F_s) \subseteq \mathbb{A}_K^n.$$

Es sei $P \in Y$ ein Punkt von Y mit der Eigenschaft, dass Y im Punkt P die Dimension d besitze. Dann heißt P ein *glatter Punkt* von Y, wenn der Rang der Matrix

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right)_{i,j}$$

im Punkt P mindestens $n - d$ ist. Andernfalls heißt der Punkt *singulär*.

Zu einer K-Algebra

$$A = K[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$$

und einem Punkt $P = (a_1, \ldots, a_n) \in V = V(f_1, \ldots, f_m)$ mit zugehörigem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_P \subseteq A$ und Lokalisierung

$$R = A_{\mathfrak{m}_P} = \mathcal{O}_{V,P}$$

ist

$$\Omega_{R|K} = \Omega_{A|K} \otimes_A R,$$

und die Tensorierung

$$\Omega_{R|K} \otimes_R K = \Omega_{A|K} \otimes_A K$$

zur Restekörperauswertung

$$A \longrightarrow A_{\mathfrak{m}} \longrightarrow A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} = K$$

spielt eine besondere Rolle. Es ergibt sich ein direkter Zusammenhang zum Dualraum des extrinsischen Tangentialraumes von V an P. Das bedeutet, dass $\Omega_{R|K} \otimes_R K$ in natürlicher Weise der Kotangentialraum im Punkt P ist.

Lemma 18.12. *Es sei K ein Körper,*

$$A = K[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$$

eine endlich erzeugte K-Algebra und

$$P = (a_1, \ldots, a_n) \in V = V(f_1, \ldots, f_m)$$

ein Punkt des zugehörigen Nullstellengebildes mit zugehörigem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_P \subseteq A$ und Lokalisierung

$$R = A_{\mathfrak{m}}.$$

Dann ist der Tangentialraum zu V in P in kanonischer Weise der duale Vektorraum zu $\Omega_{R|K} \otimes_R K$.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Definition 18.13. Ein noetherscher lokaler Ring $(R, \mathfrak{m})$ der Dimension n heißt *regulär*, wenn es n Elemente $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{m}$ gibt, die das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ erzeugen.

Lemma 18.14. *Es sei K ein Körper und R eine lokale kommutative K-Algebra und es sei die Gesamtabbildung*

$$K \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{m}$$

ein Isomorphismus. Dann ist die Abbildung

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega_{R|K} \otimes_R R/\mathfrak{m},\ [f] \longmapsto df \otimes 1,$$

ein $R/\mathfrak{m}$-Modulisomorphismus.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Ohne die Voraussetzung, dass die natürliche Abbildung zwischen dem Grundkörper und dem Restklassenkörper ein Isomorphismus ist, gilt diese Aussage nicht, siehe Aufgabe 18.23.

Bemerkung 18.15. In der Situation von Lemma 18.12 kann man direkt eine Beziehung zwischen dem (extrinsischen) Tangentialraum, der als Kern der Jacobi-Matrix gegeben ist, und dem Dualraum zu $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ stiften. Es sei

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in T_PV = \operatorname{kern}\left(\operatorname{Jak}(f_1, \ldots, f_m)_P\right).$$

Dies definiert eine Abbildung

$$\mathfrak{m}_P \longrightarrow K,\, g \longmapsto (dg)_P \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1\partial_1 g(P) + \cdots + v_n\partial_n g(P),$$

dabei wird, in analytischer Sprache, einer Funktion g die Auswertung in P ihrer Richtungsableitung in Richtung v zugeordnet. Die Kernbedingung stellt dabei sicher, dass Funktionen aus dem Ideal $(f_1, \ldots, f_m)$ auf 0 abgebildet werden und die Abbildung auf dem maximalen Ideal des Restklassenringes wohldefiniert ist. Nach der Produktregel wird dabei $\mathfrak{m}_P^2$ auf 0 abgebildet und es ergibt sich eine K-lineare Abbildung

$$\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \longrightarrow K.$$

Satz 18.16. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper*

$$P \in V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$$

ein Punkt der affin-algebraischen Menge zum Ideal $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_m)$ mit dem lokalen Ring

$$R = (K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}_P}.$$

Dann ist der Punkt genau dann glatt, wenn R regulär ist.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Satz 18.17. *Es sei K ein vollkommener Körper und R die Lokalisierung einer endlich erzeugten K-Algebra. Der Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}$ sei isomorph zu K. Dann ist R genau dann regulär, wenn der Modul der Kähler-Differentiale frei ist und sein Rang mit der Dimension des Ringes übereinstimmt.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Ohne die Voraussetzung, dass der Grundkörper vollkommen ist, ist diese Aussageb nicht richtig, siehe Aufgabe 18.24.

Korollar 18.18. *Es sei* $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ *eine zusammenhängende glatte Varietät über einem vollkommener Körper* K *und es sei* R *der affine Koordinatenring zu* V*. Dann ist der Modul der Kähler-Differentiale* $\Omega_{R|K}$ *lokal frei von konstantem Rang* $\dim(R)$ *und insbesondere ein projektiver Modul.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Beispiel 18.19. Wir betrachten die reelle Sphäre

$$S^2 = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

mit dem affinen Koordinatenring

$$R = \mathbb{R}[X, Y, Z]/\left(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1\right).$$

Der R-Modul der Kählerdifferentiale ist nach Korollar 18.9 gleich

$$\Omega_{R|\mathbb{R}} = RdX \oplus RdY \oplus RdZ/(XdX + YdY + ZdZ).$$

Eine direkte Überprüfung zeigt, dass die reelle Sphäre glatt ist. Nach Satz 18.17 ist somit $\Omega_{R|\mathbb{R}}$ lokal frei (von konstantem Rang 2). Dies kann man auch direkt von der Darstellung her begründen, siehe Aufgabe 18.25. Dagegen ist $\Omega_{R|\mathbb{R}}$ nicht frei. Dies ist eine algebraische Version des Satzes vom Igel, dass man ihn nicht glattkämmen kann, also die Stacheln nicht wirbelfrei tangential an die Kugel anlegen kann.

Der Tangentialraum zu einer polynomialen Abbildung $f\colon \mathbb{A}_K^n \to \mathbb{A}_K^m$ mit dem Nullstellengebilde $V = V(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ an einem Punkt $P \in V$ ist

$$T_P V := \operatorname{kern}\left(\operatorname{Jak}(f_1, \ldots, f_m)_P\right) = \{v \in \mathbb{A}_K^n \mid \operatorname{Jak}(f_1, \ldots, f_m)_P(v) = 0\}.$$

Wenn P ein regulärer Punkt der Abbildung ist und man den Satz über implizite Abbildungen anwenden kann, so handelt es sich um einen linearen Unterraum, dessen Dimension mit der (Mannigfaltigkeits-)Dimension von V übereinstimmt. Diese Konstruktion ist extrinsisch, sie hängt von der Einbettung von V in den affinen Raum ab. Wir möchten eine intrinsische Version des Tangentialraumes vorstellen, der nur von V bzw. dem affinen Koordinatenring abhängt. Dazu führen wir den Modul der Kähler-Differentiale ein, der für jede R-Algebra A eine duale Version des Tangentialraumes liefert.

18. Arbeitsblatt

Aufgabe 18.1. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra, M ein R-Modul und $D\colon A \to M$ eine R-Derivation. Zeige

$$D(f^n) = nf^{n-1}D(f)$$

für jedes $f \in A$.

Aufgabe 18.2. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra, M ein R-Modul und $D\colon A \to M$ eine R-Derivation. Zeige

$$D(f_1 \cdots f_r) = f_2 \cdots f_r D(f_1) + f_1 f_3 \cdots f_r D(f_2) + \cdots + f_1 \cdots f_{r-1} D(f_r)$$

für $f_1, \ldots, f_r \in A$.

Aufgabe 18.3. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra, M ein R-Modul und $D\colon A \to M$ eine R-Derivation. Es sei

$$x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} \in A.$$

Zeige

$$D(x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}) = n_1 x_1^{n_1-1} x_2^{n_2} \cdots x_{r-1}^{n_{r-1}} x_r^{n_r} D(x_1) + \cdots + n_r x_1^{n_1} \cdots x_{r-1}^{n_{r-1}} x_r^{n_r-1} D(x_r)$$

Aufgabe 18.4. Es sei A eine kommutative R-Algebra und M ein A-Modul. Zeige, dass die Menge der Derivationen von R nach M ein R-Modul wird, wenn man $f\delta$ durch

$$(f\delta)(a) = f\delta(a)$$

definiert.

Aufgabe 18.5. Es sei R eine kommutative K-Algebra und $W \subseteq R$ ein multiplikatives System. Es sei $D\colon R \to R$ eine K-Derivation. Zeige, dass durch

$$D\left(\frac{f}{g}\right) := \frac{gD(f) - fD(g)}{g^2}$$

eine Derivation auf der Nenneraufnahme R_W gegeben ist, die D fortsetzt.

Aufgabe 18.6.*

Es sei A eine kommutative R-Algebra über einem kommutativen Ring R. Zu $f \in A$ bezeichne

$$\mu_f\colon A \longrightarrow A,\, x \longmapsto fx,$$

die R-lineare Multiplikationsabbildung und zu zwei R-linearen Abbildungen

$$\varphi_1, \varphi_2\colon A \longrightarrow A$$

bezeichne

$$[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1 \circ \varphi_2 - \varphi_2 \circ \varphi_1.$$

Es sei $\delta\colon A \to A$ eine R-Derivation. Zeige, dass zu jedem $g \in A$ die Abbildung $[\delta, \mu_g]$ eine Multiplikationsabbildung ist.

Aufgabe 18.7. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und $\Omega_{A|R}$ der Modul der Kähler-Differentiale. Zeige, dass die universelle Derivation

$$A \longrightarrow \Omega_{A|R},\ f \longmapsto df,$$

eine Derivation ist.

Aufgabe 18.8. Bestimme $\Omega_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}$.

Aufgabe 18.9. Sei $K \subseteq L$ eine separable endliche Körpererweiterung. Zeige $\Omega_{L|K} = 0$.

Aufgabe 18.10. Bestimme $\Omega_{\mathbb{Z}[\mathrm{i}]|\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 18.11. Es sei R ein kommutativer Ring und

$$A = R[X_1, \ldots, X_n]/(X_n - f(X_1, \ldots, X_{n-1}))$$

mit einem Polynom $f \in R[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ (die Nullstellenmenge ist also der Graph zu f). Zeige auf zwei verschiedene Arten, dass $\Omega_{A|R}$ ein freier A-Modul vom Rang $n-1$ ist.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf das Tensorprodukt von Moduln und von Algebren, siehe auch den Anhang.

Aufgabe 18.12. Berechne $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(5)$.

Aufgabe 18.13. Berechne das Tensorprodukt

$$\left(\mathbb{Z}^3 \oplus (\mathbb{Z}/(2))^2 \oplus \mathbb{Z}/(3)\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(4)\right).$$

Aufgabe 18.14. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige die R-Modulisomorphie

$$R^n \otimes_R R^m \cong R^{nm}.$$

Aufgabe 18.15. Es sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ seien Ideale. Zeige die R-Algebraisomorphie

$$R/\mathfrak{a} \otimes_R R/\mathfrak{b} = R/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}).$$

Aufgabe 18.16. Es sei R ein kommutativer Ring und $S, T \subseteq R$ seien multiplikative Systeme. Zeige die R-Algebraisomorphie

$$R_S \otimes_R R_T = R_{S \cdot T}.$$

Aufgabe 18.17. Es seien M und N kommutative Monoide und R ein kommutativer Ring. Zeige die R-Algebraisomorphie

$$R[M \times N] \cong R[M] \otimes_R R[N].$$

Aufgabe 18.18.*

Es sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System. Zeige

$$\Omega_{A_S|A} = 0.$$

Aufgabe 18.19. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann

$$\Omega_{A_S|R} \cong \left(\Omega_{A|R}\right)_S$$

gilt.

Aufgabe 18.20. Diskutiere Lemma 18.8 im Fall, dass $R = K$ ein Körper der positiven Charakteristik p, $A = K[X]$ und $I = (X^p)$ ist.

Aufgabe 18.21. Beschreibe für $A = \mathbb{C}[X,Y,Z]/(X^2 + Y^3 + Z^5)$ den Modul der Kähler-Differentiale mit Erzeugern und Relationen.

Aufgabe 18.22. Bestimme $\Omega_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}$ mit Hilfe von Korollar 18.9.

Aufgabe 18.23. Sei p eine Primzahl. Wir betrachten die Körpererweiterung, die durch

$$K = \mathbb{Z}/(p)(U) \subseteq \mathbb{Z}/(p)(Y) = L$$

mit $U \mapsto Y^p$ gegeben ist. Zeige, dass Lemma 18.14 in dieser Situation nicht gilt.

Aufgabe 18.24. Sei p eine Primzahl und

$$K = \mathbb{Z}/(p)(U) \subseteq R = K[Y]/(Y^p - U).$$

Zeige, dass $R \cong K(Y)$ ist, dass R regulär ist und dass der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R|K}$ nicht frei ist.

Aufgabe 18.25. Sei $R = \mathbb{R}[X,Y,Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$. Zeige, dass der R-Modul der Kählerdifferentiale

$$\Omega_{R|\mathbb{R}} = RdX \oplus RdY \oplus RdZ/(XdX + YdY + ZdZ)$$

eingeschränkt auf die offenen Mengen $D(X)$, $D(Y)$, $D(Z)$ (also $\left(\Omega_{R|\mathbb{R}}\right)_X = \Omega_{R_X|\mathbb{R}}$ etc.) frei ist und dass damit $\Omega_{R|\mathbb{R}}$ lokal frei ist.

19.1. **Die Garbe der Kähler-Differentiale auf einem Schema.**

Es sei X ein Schema über einem Basisschema S. Wir möchten eine Garbenversion des Moduls der Kählerdifferentiale definieren.

Lemma 19.1. *Es sei A eine kommutative R-Algebra über einem kommutativen Ring R. Dann gilt für jedes $f \in A$ die Gleichheit*

$$\left(\Gamma\left(D(f), \widetilde{\Omega_{A|R}}\right), \tilde{d}\right) = \left(\Omega_{A_f|R}, d\right)$$

und für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(A)$ die Gleichheit

$$\left(\left(\widetilde{\Omega_{A|R}}\right)_{\mathfrak{p}}, d_{\mathfrak{p}}\right) = \left(\Omega_{A_{\mathfrak{p}}|R}, d\right).$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 18.6 in Verbindung mit Lemma 14.5. □

Definition 19.2. Es sei $p\colon X \to S$ ein Schema über einem Basisschema S. Dann versteht man unter der *Garbe der Kähler-Differentiale* $\Omega_{X|S}$ denjenigen quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul auf X zusammen mit einer Derivation über $p^{-1}\mathcal{O}_S$

$$d\colon \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_{X|S}$$

derart, dass für jeden Punkt $P \in X$ die Bedingung

$$\left(\left(\Omega_{X|S}\right)_P, d_P\right) = \left(\Omega_{\mathcal{O}_{X,P}|\mathcal{O}_{S,p(P)}}, d\right)$$

erfüllt ist.

Es ist zu zeigen, dass es ein solches Objekt in eindeutiger Weise gibt. Durch die Quasikohärenz muss zu jeder affinen Teilmenge $V = \operatorname{Spek}(R) \subseteq S$ und jeder affinen Teilmenge $U = \operatorname{Spek}(A) \subseteq X$ mit $U \subseteq p^{-1}(V)$ der Modul auf U mit $\widetilde{\Omega_{A|R}}$ übereinstimmen. Im affinen Fall ist nach Lemma 19.1 der Modul $\widetilde{\Omega_{A|R}}$ das richtige Modell. Wenn (Ω, d) (Ω', d') zwei Modelle sind, so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft (zuerst auf den affinen Stücken und dann allgemein) einen $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus

$$\widetilde{\Omega_{A|R}} \longrightarrow \Omega'.$$

Da dieser punktweise ein Isomorphismus ist, handelt es sich überhaupt um einen Isomorphismus. Insbesondere kann es nur eine solche Garbe geben. Wenn eine affine Überdeckung

$$S = \bigcup_{j \in J} V_j$$

und dazu eine affine Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

mit $U_i \subseteq p^{-1}(V_j)$ für ein $j = j(i)$ vorliegt, so kann man die $\Omega_{U_i|V_{j(i)}}$ miteinander verkleben, da die Einschränkungen auf affinen Stücken $U \subseteq U_i \cap U_{i'}$ über $V \subseteq V_{j(i)} \cap V_{j(i')}$ eindeutig bestimmt sind.

Definition 19.3. Es sei $p\colon X \to S$ ein Schema über einem Basisschema S. Dann versteht man unter der *Tangentialgarbe* $\mathcal{T}_{X,S}$ den Dualmodul

$$\mathcal{T}_{X,S} = \Omega^*_{X|S}.$$

Es ist also

$$\mathcal{T}_{X,S} = \Omega^*_{X|S} = \mathcal{H}om\big(\Omega_{X|S}, \mathcal{O}_X\big) = \mathcal{D}\rceil\nabla(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X),$$

wobei die letzte Gleichheit auf der universellen Eigenschaft der Kähler-Differentiale beruht. Entsprechend nennt man die Garbe der Kähler-Differentiale auch die *Kotangentialgarbe*.

Wir formulieren die Aussagen für die Kähler-Differentiale im affinen Fall aus der letzten Vorlesung allgemein für ein Schema über einem Basischema.

Lemma 19.4. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Schemamorphismus über einem Basisschema S. Dann ist die Sequenz von quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln*

$$\varphi^*\Omega_{Y|S} \longrightarrow \Omega_{X|S} \longrightarrow \Omega_{X|Y} \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 18.7. □

Lemma 19.5. *Es sei X ein Schema über einem Basischema S und sei $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ eine Idealgarbe auf X mit dem zugehörigen abgeschlossenen Unterschema $j\colon Y \to X$. Dann ist die Sequenz*

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow j^*\Omega_{X|S} \longrightarrow \Omega_{Y|S} \longrightarrow 0$$

von quasikohärenten $\mathcal{O}_Y$-Modul exakt.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 18.8. □

Korollar 19.6. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und es sei X ein zusammenhängendes Schema von endlichem Typ über K. Dann ist X genau dann glatt, wenn der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{X|K}$ lokal frei von konstantem Rang* $\dim(X)$ *ist.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 18.16 und Satz 18.17. □

Definition 19.7. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und es sei X ein zusammenhängendes glattes Schema von endlichem Typ über K der Dimension d. Dann nennt man

$$\omega_X := \operatorname{Det}\Omega_{X|K} = \bigwedge^d \Omega_{X|K}$$

die *kanonische Garbe* von X.

19.2. **Das Tangentialbündel auf dem projektiven Raum.**

Satz 19.8. *Es sei* $\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj}(R[X_0, X_1, \ldots, X_n])$ *der projektive Raum über einem kommutativen Ring R. Dann wird der* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}$*-Modul der Kähler-Differentiale* $\Omega_{\mathbb{P}^n_R|R}$ *durch die kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n_R|R} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(-1)^{\oplus n+1} \stackrel{X_0,\ldots,X_n}{\longrightarrow} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R} \longrightarrow 0$$

zusammen mit der universellen Derivation, die auf jeder offenen Menge $U \subseteq \mathbb{P}^n_R$ *eine Funktion* $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R})$ *auf*

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial X_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial X_n}\right)$$

abbildet, beschrieben.

Beweis. Wir bezeichnen die Kerngarbe links, die wir als Kähler-Modul nachweisen wollen, mit

$$\mathcal{S} = \operatorname{Syz}(X_0, \ldots, X_n).$$

Die angegebene Abbildung d (die ja von der universellen Derivation auf dem $n+1$-dimensionalen Raum herrührt) macht aus einer Funktion vom Grad 0 eine Funktion vom Grad -1, was man direkt für (rationale) Monome überprüfen kann. Daher liegt eine R-lineare Abbildung

$$d\colon \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(-1)^{\oplus n+1})$$

vor. Die Leibnizregel überträgt sich hierher, da ja die partiellen Ableitungen die Leibnizregel erfüllen. Es ist zu zeigen, dass das Bild von d im Kern der hinteren Abbildung landet. Für ein Monom X^ν vom Grad 0 ist aber

$$\sum_{j=0}^n X_j \frac{\partial X^\nu}{\partial X_j} = \sum_{j=0}^n (\nu_j X^\nu) = \left(\sum_{j=0}^n \nu_j\right) X^\nu = 0.$$

Betrachten wir die Situation auf $D_+(X_0)$ und setzen wir $Y_j = \frac{X_j}{X_0}$. Dann ist unter Verwendung von Beispiel 12.10 und Beispiel 15.5

$$\begin{aligned}
& \Gamma(D_+(X_0), \mathcal{S}) \\
= \; & \operatorname{kern}\left(\Gamma\big(D_+(X_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(-1)\big)^{\oplus n+1} \stackrel{X_0,X_1,\ldots,X_n}{\longrightarrow} \Gamma\big(D_+(X_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}\big)\right) \\
= \; & \operatorname{kern}\Big((R[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_0})_{-1} \oplus \cdots \oplus (R[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_0})_{-1} \\
& \stackrel{X_0,X_1,\ldots,X_n}{\longrightarrow} (R[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_0})_0\Big) \\
= \; & \operatorname{kern}\Big(R[Y_1, \ldots, Y_n] \cdot X_0^{-1} \oplus \cdots \oplus R[Y_1, \ldots, Y_n] \cdot X_0^{-1} \\
& \stackrel{X_0,X_0Y_1,\ldots,X_0Y_n}{\longrightarrow} R[Y_1, \ldots, Y_n]\Big) \\
\cong \; & R[Y_1, \ldots, Y_n] \oplus \cdots \oplus R[Y_1, \ldots, Y_n],
\end{aligned}$$

wobei zuletzt n Summanden stehen und darin das Tupel $(P_1, \ldots, P_n)$ dem Tupel $\left(-\sum_{i=1}^n P_i Y_i X_0^{-1}, P_1 X_0^{-1}, \ldots, P_n X_0^{-1}\right)$ des Kerns entspricht. Unter der Abbildung d wird das Monom

$$Y^\mu = \left(\frac{X_1}{X_0}\right)^{\mu_1} \cdots \left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{\mu_n} = X_0^{-\sum_{j=1}^n \mu_j} X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n} \in \Gamma\big(D_+(X_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}\big)$$

auf das Element

$$\left(-\left(\sum_{j=1}^n \mu_j\right) X_0^{-\sum_{j=1}^n \mu_j - 1} X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n},\ \mu_1 X_0^{-\sum_{j=1}^n \mu_j} X_1^{\mu_1 - 1} X_2^{\mu_2} \cdots X_n^{\mu_n},\right.$$
$$\left. \ldots, \mu_n X_0^{-\sum_{j=1}^n \mu_j} X_1^{\mu_1} X_2^{\mu_2} \cdots X_n^{\mu_n - 1}\right)$$

abgebildet. Dieses entspricht unter der oben beschriebenen Identifizierung (also die erste Komponente weglassen und mit X_0 multiplizieren) einfach dem Tupel der Ableitungen nach den Variablen Y_j. Also liegt nach Lemma 18.5 die universelle Derivation des Polynomrings $R[Y_1, \ldots, Y_n]$ vor. $\square$

Insbesondere ist der Modul der Kähler-Differentiale auf dem projektiven Raum lokal frei.

Korollar 19.9. *Es sei $\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj}(R[X_0, X_1, \ldots, X_n])$ der projektive Raum über einem kommutativen Ring R. Dann wird die Tangentialgarbe auf $\mathbb{P}^n_R$ durch die kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R} \xrightarrow{X_0, \ldots, X_n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n_R, R} \longrightarrow 0$$

beschrieben. Dabei geht hinten das globale Element $X_i e_j$ (das in der j-ten Komponente steht) auf die globale Derivation $X_i \frac{\partial}{\partial X_j}$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 19.8 durch Dualisieren. Der Zusatz folgt ebenfalls aus Satz 19.8: Das Element $X_i e_j$ in der j-ten Komponente von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)^{\oplus n+1}$ entspricht beim Dualisieren der Abbildung

$$X_i \circ p_j \colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(-1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R},$$

also der Projektion auf die j-te Komponente gefolgt von der Multiplikation mit X_i. Dies entspricht wiederum, aufgefasst als Linearform auf dem Modul der Kähler-Differentialformen $\Omega_{\mathbb{P}^n_R|R} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(-1)^{\oplus n+1}$, der Linearform, die zur Derivation $f \mapsto X_i \frac{\partial f}{\partial X_j}$ gehört. $\square$

Es ist eine Besonderheit des projektiven Raumes, verglichen mit anderen projektiven Varietäten, dass es auf ihm viele globale Vektorfelder gibt.

Korollar 19.10. *Es sei $\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj}(R[X_0, X_1, \ldots, X_n])$ der projektive Raum über einem kommutativen Ring R. Dann ist die kanonische Garbe gleich $\omega_{\mathbb{P}^n_R|R} = \operatorname{Det} \Omega_{\mathbb{P}^n_R|R} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(-n-1)$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 19.8, Satz 16.11 und Korollar 16.12. $\square$

Die antikanonische Garbe, also das Dual der kanonischen Garbe, ist auf dem projektiven Raum somit gleich $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(n+1)$ und besitzt viele globale Schnitte.

19.3. **Hyperflächen im projektiven Raum.**

Satz 19.11. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die affine Hyperfläche*
$$V(F) = \operatorname{Spek}(K[X_0, X_1, \ldots, X_n]/(F)) \subseteq \mathbb{A}_K^{n+1}$$
ist außerhalb des Nullpunktes glatt.

(2) *Die projektive Hyperfläche*
$$Y = V_+(F) = \operatorname{Proj}(K[X_0, X_1, \ldots, X_n]/(F)) \subseteq \mathbb{P}_K^n$$
ist glatt.

(3) *Für jede Variable X_i ist $K[X_0, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n]/(\tilde{F}_i)$ glatt, wobei*
$$\tilde{F}_i = F\frac{1}{X_i}$$
die Dehomogenisierung von F bezüglich X_i bezeichnet.

(4) *Der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{Y|K}$ ist lokal frei.*

(5) *Es liegt eine kurze exakte Sequenz*
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-d) \longrightarrow j_Y^* \Omega_{\mathbb{P}_K^n|K} \longrightarrow \Omega_{Y|K} \longrightarrow 0$$
von lokal freien Garben auf Y vor.

Beweis. Die Äquivalenz von (2) und (3) ist klar wegen Lemma 12.17 und da die Glattheit eine lokale Eigenschaft ist. Die Äquivalenz von (2) und (4) beruht auf Korollar 19.6. Die Äquivalenz von (1) und (3) beruht darauf, dass die Kegelabbildung lokal über $D_+(X_i)$ durch
$$D(X_i) = \operatorname{Spek}(R_{X_i}) = \operatorname{Spek}\left((R_{X_i})_0[X_i, X_i^{-1}]\right) \longrightarrow D_+(X_i) = \operatorname{Spek}((R_{X_i})_0)$$
gegeben ist. Lokal ist die Kegelabbildung also ein punktierter affiner Zylinder über der Basis.

Von (4) (bzw. (2)) nach (5). Nach Lemma 19.5 gibt es die exakte Sequenz
$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow j_Y^* \Omega_{\mathbb{P}_K^n|K} \longrightarrow \Omega_{Y|K} \longrightarrow 0\,.$$
Dabei ist $\mathcal{I}$ das von F erzeugte Hauptideal und es ist $\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^n}(-\delta)$ über die Zuordnung
$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^n}(\delta),\ 1 \longmapsto F.$$
Ferner ist die Einschränkung dieser Idealgarbe auf Y gleich
$$\mathcal{O}_Y(-\delta) = \mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_Y = \mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^n}/\mathcal{I} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2.$$
Als Einschränkung einer invertierbaren Garbe ist dies wieder invertierbar. Lokal ist die linke Abbildung wie in Bemerkung 17.10 durch die Jacobi-Matrix zur Dehomogenisierung von F gegeben, und wegen der Glattheit ist diese (sogar auch in den Restekörpern) injektiv. Von (5) nach (4) ist eine Einschränkung. $\square$

Korollar 19.12. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d derart, dass die projektive Hyperfläche $Y = V_+(F)$ glatt ist. Dann ist die kanonische Garbe gleich $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(d-n-1)$.*

Beweis. Wir wenden die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-d) \longrightarrow j_Y^* \Omega_{\mathbb{P}^n_K|K} \longrightarrow \Omega_{Y|K} \longrightarrow 0$$

von lokal freien Garben auf Y aus Satz 19.11 an. Nach Satz 16.11 und Korollar 19.10 ist

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y(-d) \otimes \omega_{Y|K} &= \mathcal{O}_Y(-d) \otimes \operatorname{Det} \Omega_{Y|K} \\ &= \operatorname{Det} j_Y^* \Omega_{\mathbb{P}^n_K|K} \\ &= j_Y^* \operatorname{Det} \Omega_{\mathbb{P}^n_K|K} \\ &= j_Y^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(-n-1) \\ &= \mathcal{O}_Y(-n-1). \end{aligned}$$

Dabei beruht die letzte Gleichung auf Lemma Anhang 4.7. Tensorierung mit $\mathcal{O}_Y(d)$ ergibt die Behauptung. □

Bemerkung 19.13. Korollar 19.12 erlaubt eine grobe Klassifikation von glatten Hyperflächen

$$Y = V_+(F) \subseteq \mathbb{P}^n_K$$

im projektiven Raum, je nachdem, ob in $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(d-n-1)$ der Twist $d-n-1$ negativ, gleich 0 oder positiv ist. Bei $n = 2$, also Kurven in der projektiven Ebene, liegt bei $d = 1, 2$ eine projektive Gerade vor, bei $d = 3$, wenn die kanonische Garbe trivial ist, eine elliptische Kurve und bei $d \geq 4$ eine Kurve vom allgemeinen Typ. Bei $n = 3$, also Flächen im projektiven Raum, liegt bei $d = 1$ eine projektive Ebene vor, bei $d = 2$ eine zu $\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K$ isomorphe Fläche und bei $d = 3$ eine Fläche, die isomorph ist zu einer projektiven Ebene, auf der man sechs Punkte aufgeblasen hat. Jedenfalls hat man bei $d \leq 3$ eine sogenannte rationale Fläche, deren Funktionenkörper gleich dem rationalen Funktionenkörper in zwei Variablen ist. Bei $d = 4$, wenn die kanonische Garbe trivial ist, liegt eine sogenannte $K3$-Fläche vor. Bei $d \geq 5$ hat man eine Fläche vom allgemeinen Typ.

19. Arbeitsblatt

Aufgabe 19.1. Zeige, dass zu $R = K[X,Y]/(XY)$ der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R|K}$ im Nullpunkt nicht frei ist.

Aufgabe 19.2. Zeige, dass es ein glattes Schema von endlichem Typ über einem Körper gibt, bei dem der Rang des Moduls der Kähler-Differentiale nicht konstant ist.

Aufgabe 19.3. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra. M ein A-Modul und $\delta\colon A \to M$ eine R-Derivation. Zeige, dass auf jeder offenen Menge $U \subseteq \operatorname{Spek}(A)$ eine R-Derivation

$$\delta_U\colon \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \longrightarrow \Gamma\left(U, \widetilde{M}\right)$$

existiert, die mit δ kommutiert.

Betrachte zuerst die offenen Mengen $D(f)$.

Aufgabe 19.4. Es sei X ein integres Schema über einem integren Basisschema S. Zeige, dass eine auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ definierte $p^{-1}\mathcal{O}_S$-Derivation $\delta\colon \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ eine $Q(S)$-Derivation

$$Q(X) \longrightarrow Q(X)$$

definiert.

Aufgabe 19.5. Es sei X ein Schema von endlichem Typ über einem Basisschema S. Zeige, dass $\Omega_{X|S}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

Aufgabe 19.6. Es sei $p\colon X \to S$ ein Schema über dem Schema S. Zeige, dass die Garbe der Kähler-Differentiale $\Omega_{X|S}$ auf X die Vergarbung der Prägarbe

$$U \longmapsto \operatorname{colim}_{V \subseteq S \text{ offen},\, U \subseteq p^{-1}(V)} \Omega_{\Gamma(U,\mathcal{O}_X)|\Gamma(V,\mathcal{O}_S)}$$

ist.

Aufgabe 19.7. Zeige, dass der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{\mathbb{P}^1_R|R}$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_R$ über einem kommutativen Ring R isomorph zur getwisteten Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(-2)$ ist.

Aufgabe 19.8. Betrachte die Tangentialgarbe $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1_R,R}$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_R$ über einem kommutativen Ring R mit der Isomorphie

$$\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1_R,R} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(2).$$

Bestimme die globalen Schnitte von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(2)$, die den globalen Derivationen $X\frac{\partial}{\partial X}$, $Y\frac{\partial}{\partial X}$, $X\frac{\partial}{\partial Y}$, $Y\frac{\partial}{\partial Y}$ entsprechen.

Aufgabe 19.9. Bestimme auf der projektiven Ebene

$$\mathbb{P}^2_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y,Z])$$

die Ableitung $Y\frac{\partial f}{\partial X}$ zur rationalen Funktion $f = \frac{XY-YZ+3Z^2-X^2}{4X^2-YZ}$. Auf welcher offenen Teilmenge sind f und $Y\frac{\partial f}{\partial X}$ definiert?

Aufgabe 19.10.*

Wie betrachten die Kurve

$$C = V_+(X^3 + Y^3 + Z^3) \subseteq \mathbb{P}^1_K$$

über einem Körper der Charakteristik $\neq 3$. Zeige, dass die Differentialformen

$$\frac{X^2}{Y^2} d\frac{Z}{X} \text{ auf } D_+(XY),\ \frac{Y^2}{Z^2} d\frac{X}{Y} \text{ auf } D_+(YZ) \text{ und } \frac{Z^2}{X^2} d\frac{Y}{Z} \text{ auf } D_+(XZ),$$

auf den Durchschnitten übereinstimmen und daher eine nichttriviale Differentialform auf der Kurve C definieren.

Aufgabe 19.11. Drücke die Einschränkungen der globalen Derivationen $X_i \frac{\partial}{\partial X_j}$ des projektiven Raumes $\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj}(R[X_0, X_1, \ldots, X_n])$ auf die offene Teilmenge

$$D_+(X_0) = \operatorname{Spek}(R[Y_1, \ldots, Y_n]) \subseteq \mathbb{P}^n_R$$

(mit $Y_k = \frac{X_k}{X_0}$) als Linearkombinationen der Form $\sum_{k=1}^n g_k \frac{\partial}{\partial Y_k}$ mit $g_k \in R[Y_1, \ldots, Y_n]$ aus.

Aufgabe 19.12. Wir betrachten die Fermat-Kubik in vier Variablen, also

$$V = V_+(X^3 + Y^3 + Z^3 + W^3) \subseteq \mathbb{P}^3_K$$

und den affinen Ausschnitt

$$U = D_+(W) \cap V = \operatorname{Spek}\big(K[X, Y, Z]/(X^3 + Y^3 + Z^3 + 1\big)$$

über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik $\neq 3$. Zeige, dass durch

$$x(s,t) = \frac{3t - \frac{1}{3}(s^2 + st + t^2)^2}{t(s^2 + st + t^2) - 3},$$

$$y(s,t) = \frac{3s + 3t + \frac{1}{3}(s^2 + st + t^2)^2}{(s^2 + st + t^2) - 3}$$

und

$$z(s,t) = \frac{-3 - (s^2 + st + t^2)(s + t)}{t(s^2 + st + t^2) - 3}$$

eine rationale Parametrisierung

$$K^2 \longrightarrow U$$

gegeben ist.

20. Vorlesung - Die Picardgruppe

20.1. **Die Picardgruppe.**

Definition 20.1. Zu einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ nennt man die Menge der Isomorphieklassen von invertierbaren Garben auf X mit der Tensorierung als Verknüpfung, der dualen Garbe als inverses Element und der Strukturgarbe als neutralem Element die *Picardgruppe* von X. Sie wird mit $\operatorname{Pic}(X)$ bezeichnet.

Die folgende Überlegung zu den Verklebungsdaten einer invertierbaren Garbe knüpft einerseits an Aufgabe 2.19 an und weist andererseits auf die ?ech-Kohomologie voraus.

Bemerkung 20.2. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Dies bedeutet, dass es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Trivialisierungen

$$\varphi_i \colon \mathcal{L}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{O}_X|_{U_i}$$

gibt. Für zwei offene Mengen U_i, U_j ergeben sich auf $U_i \cap U_j$ die Übergangsabbildungen

$$\varphi_i|_{U_i \cap U_j} \circ \varphi_j^{-1}|_{U_i \cap U_j} \colon \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}.$$

Diese Isomorphien sind (vergleiche Aufgabe 13.8) durch (Multiplikation mit) Einheiten $r_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times)$ gegeben. Da die Daten von der einen invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ herrühren, gilt dabei die Kozykelbedingung $r_{kj} \cdot r_{ji} = r_{ki}$, was man auch als $r_{kj} \cdot r_{ki}^{-1} \cdot r_{ji} = 1$ schreiben kann. Ein solcher Datensatz legt durch eine Verklebung wiederum eine invertierbare Garbe fest. Wenn die invertierbare Garbe trivial ist, so gibt es einen globalen $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus $\psi \colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$. Dann liegen auf den U_i die Isomorphismen

$$\mathcal{O}_X|_{U_i} \xrightarrow{\psi|_{U_i}} \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{O}_X|_{U_i}$$

vor, die insgesamt durch Einheiten $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X^\times)$ festgelegt sind. Für diese gilt die Beziehung

$$s_i \cdot s_j^{-1} = (\varphi_i \circ \psi) \circ (\varphi_j \circ \psi)^{-1} = r_{ij}$$

für alle i, j. Wenn umgekehrt solche realisierende Einheiten s_i gegeben sind, so werden durch

$$\psi|_{U_i} := \varphi_i^{-1} \circ s_i$$

Modulisomorphismen auf U_i festgelegt, die verträglich sind und daher einen globalen Isomorphismus zwischen $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{L}$ festlegen. Eine invertierbare Garbe kann man also mit dem Datensatz (U_i, r_{ij}) (mit den obigen Bedingungen, man spricht von einem *Kozykel*) identifizieren, wobei ein solcher Datenstz als trivial anzusehen ist, wenn es Einheiten s_i mit

$$r_{ij} = s_i \cdot s_j^{-1}$$

gibt.

Bemerkung 20.3. Die Identifizierung aus Bemerkung 20.2 zwischen invertierbaren Garben und Kozykeln in der Einheitengarbe ist insofern nicht kanonisch, da man hier ein Vorzeichenproblem hat. Dies hängt damit zusammen, ob man die lokalen Trivialisierungen der invertierbaren Garben mit der Strukturgarbe als $\varphi_i \colon \mathcal{L}|_{U_i} \to \mathcal{O}_X|_{U_i}$ ansetzt oder in umgekehrter Richtung und wie man die Indexmenge ordnet.

Bemerkung 20.4. Die Tensorierung von invertierbaren Garben $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ lässt sich auf der Ebene der zugehörigen Datensätze aus Bemerkung 20.2 durchführen. Dazu geht man zu einer gemeinsamen Verfeinerungsüberdeckung über und kann annehmen, dass beide Garben Trivialisierungen bezüglich einer Überdeckung U_i, $i \in I$, besitzen. Dann beschreibt der Datensatz $r_{ij} \cdot r'_{ij}$ das Tensorprodukt.

Wir beschränken uns im Weiteren auf Schemata.

Lemma 20.5. *Für einen lokalen Ring R ist die Picardgruppe von* Spec (R) *trivial.*

Beweis. Das ist trivial. □

Lemma 20.6. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein integres Schema. Dann ist jede invertierbare Garbe auf X isomorph zu einem $\mathcal{O}_X$-Untermodul der konstanten Funktionenkörpergarbe.*

Beweis. Es sei K der Funktionenkörper von X und $\mathcal{K}$ die zugehörige Garbe. Für eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ ist der Halm im generischen Punkt η ein eindimensionaler K-Vektorraum. Wir fixieren einen K-Isomorphismus $\mathcal{L}_\eta = \mathcal{K}_\eta = K$. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ gibt es eine natürliche Abbildung

$$\Gamma(U, \mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{L}_\eta \longrightarrow K\,.$$

Diese sind injektiv (vergleiche den Beweis zu Lemma 11.16) und definieren einen Untermodul von $\mathcal{K}$. □

Bemerkung 20.7. Ein invertierbarer Untermodul $\mathcal{L}$ der konstanten Funktionenkörpergarbe ist gegeben durch eine offene Überdeckung U_i, $i \in I$, von X zusammen mit von 0 verschiedenen Elementen $q_i \in Q$, die die Bedingung $\frac{q_i}{q_j} \in (\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X))^\times$ erfüllen. Wenn man eine trivialisierende Überdeckung U_i heranzieht, so ist

$$\mathcal{L}|_{U_i} \,\cong\, q_i \mathcal{O}_{U_i},$$

und aus den Übergangsabbildungen auf den Durchschnitten folgt, dass der Quotient q_i/q_j eine Einheit sein muss. Wenn umgekehrt ein solcher Datensatz (U_i, q_i) gegeben ist, so ist

$$q_i \mathcal{O}_{U_i} \,\subseteq\, \mathcal{Q}_{U_i}$$

eine triviale Untergarbe, die auf X eine invertierbare Untergarbe festlegt. Ein weiterer Gesichtspunkt ergibt sich aus der exakten Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow \mathcal{Q}^\times \longrightarrow \mathcal{Q}^\times / \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 0\,.$$

Aufgrund von Lemma 5.9 sind die beschriebenen Datensätze die globalen Schnitte aus der Quotientengarbe $\mathcal{Q}^\times/\mathcal{O}_X^\times$.

Lemma 20.8. *Sei R ein Integritätsbereich. Dann ist jede invertierbare Garbe auf $X = \operatorname{Spek}(R)$ isomorph zu eine Idealgarbe.*

Beweis. Nach Lemma 20.6 können wir direkt davon ausgehen, dass ein invertierbarer Untermodul $L \subseteq K$ des Quotientenkörpers $K = Q(R)$ vorliegt. Die Invertierbarkeit bedeutet nach Satz 16.2, dass es eine Familie

$$f_1, \ldots, f_k \in R$$

derart gibt, dass $L_{f_i} \cong R_{f_i} \cdot q_i$ mit $q_i \in K \setminus \{0\}$ gibt. Es sei b ein Hauptnenner der q_i. Dann wird unter der Multiplikationsabbildung

$$K \longrightarrow K,\ q \longmapsto qb,$$

die ein R-Modulisomorphismus von K ist, der Untermodul L auf einen dazu isomorphen Untermodul L' abgebildet. Dieser ist in der gegebenen Überdeckung ein Untermodul der Strukturgarbe, also ein Ideal. $\square$

Es gibt im Allgemeinen viele Möglichkeiten, eine invertierbare Garbe als eine Untergarbe der Funktionenkörper zu realisieren, allein schon deshalb, weil man aus einer Realisierung durch Multiplikation mit einem $f \in K$ eine neue Realisierung erhält.

Beispiel 20.9. Auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}_K^d$ über einem Körper K lässt sich eine getwistete Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^d}(\ell)$ folgendermaßen in die Funktionenkörpergarbe $\mathcal{Q}$ einbetten. Es sei

$$G \in K(X_0, \ldots, X_n)_{-\ell}$$

ein homogenes Element vom Grad $-\ell$. Auf jeder offenen Menge $U \subseteq \mathbb{P}_K^d$ ist dann die natürliche Abbildung

$$\Gamma\Big(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^d}(\ell)\Big) \longrightarrow Q(\mathbb{P}_K^d),\ s \longmapsto sG,$$

eine Realisierung als Untermodul.

Lemma 20.10. *Es sei X ein integres Schema und seien $\mathcal{L}, \mathcal{M} \subseteq \mathcal{Q}$ invertierbare Untergarben der konstanten Garbe $\mathcal{Q}$ zum Funktionenkörper $Q(X)$. Dann ist*

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} \cong \mathcal{L} \cdot \mathcal{M},$$

wobei $\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}$ diejenige Untergarbe von $\mathcal{Q}$ bezeichnet, die halmweise in jedem Punkt $P \in X$ aus allen Produkten fg mit $f \in \mathcal{L}_P$ und $g \in \mathcal{M}_P$ erzeugt wird.

Beweis. Für den Quotientenkörper Q eines Integritätsbereiches R gilt $Q \otimes_R Q = Q$ über die natürliche Multiplikation. Daher gilt in einem integren Schema die Isomorphie

$$\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{Q} \cong \mathcal{Q}.$$

Daher gibt es einen natürlichen Homomorphismus

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q}$$

durch Multiplikation. Das es sich um invertierbare Garben handelt, liegt lokal und damit auch global ein Isomorphismus auf die Bildgarbe vor. □

20.2. **Die Picardgruppe im faktoriellen Fall.**

Lemma 20.11. *Es sei R ein faktorieller Integritätsbereich. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(1) *Zu $f \in R$, $f \neq 0$, ist $(f)R_{(p)} = (p^s)$ genau dann, wenn p mit dem Exponenten s in der Primfaktorzerlegung von f vorkommmt.*
(2) *Zwei Hauptideale (f) und (g) stimmen genau dann überein, wenn für jedes Primelement p in der Lokalisierung $R_{(p)}$ die Ideale $(f)R_{(p)}$ und $(g)R_{(p)}$ übereinstimmen*

Beweis. Siehe Aufgabe 20.4. □

Satz 20.12. *Die Picardgruppe eines faktoriellen Integritätsbereiches ist trivial.*

Beweis. Es sei $I \subseteq R$ ein Ideal, das invertierbar sei, und sei

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i)$$

eine offene Überdeckung derart, dass IR_{f_i} ein Hauptideal ist. Es ist insbesondere zu jedem Primelement p das Ideal $I_{(p)} \subseteq R_{(p)}$ ein Hauptideal und damit von der Form p^{s_p}, da $R_{(p)}$ ein diskreter Bewertungsring ist. Dabei sind die s_p nur für endlich viele Primelemente von 0 verschieden. Zu einem Element $g \in I$, $g \neq 0$. gibt es nämlich nur endlich viele Primteiler und für die anderen Primelemente q ist g eine Einheit in $R_{(q)}$. Wir behaupten, dass I mit dem von $h = \prod_p p^{s_p}$ erzeugten Hauptideal übereinstimmt. Da man die Gleichheit von Idealen lokal zu einer Überdeckung testen kann, können wir in R_{f_i} argumentieren. Die Aussage folgt dann aus Lemma 20.11. □

Lemma 20.13. *Es sei R ein noetherscher faktorieller Integritätsbereich und $U \subseteq$ Spek(R) eine offene Teilmenge. Dann ist die Picardgruppe von U trivial.*

Beweis. Es sei

$$U = D(f_1, \ldots, f_n),$$

wir führen Induktion über n, wobei der Induktionsanfang nach Satz 20.12 klar ist. Wir können also davon ausgehen, dass $\mathcal{L}$ auf $D(f_1, \ldots, f_{n-1})$ trivial ist. Wir ziehen Bemerkung 20.2 heran, somit ist die invertierbare Garbe durch eine Einheit über $D(f_1, \ldots, f_{n-1}) \cap D(f_n)$ festgelegt. Nach Satz 9.8 ist die Strukturgarbe und damit auch die Garbe der Einheiten im faktoriellen Fall besonders einfach, ein Element $h \in R$ ist genau dann eine Einheit auf U, wenn $U \subseteq D(h)$ gilt. Daher sind Einheiten auf offenen Mengen generell von der Form $h = up_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ mit Primelementen $p_j \in R$, u einer Einheit aus R und $r_j \in \mathbb{Z}$. Dabei ist h eine Einheit auf

$$D(f_1, \ldots, f_{n-1}) \cap D(f_n) = D(f_1 f_n, \ldots, f_{n-1} f_n)$$

genau dann, wenn die beteiligten p_j (also die mit einem Exponenten $r_j \neq 0$) die $f_i f_n$ teilen. Dies bedeutet, dass p_j das Element f_n oder aber alle Elemente $f_1, \ldots, f_{n-1}$ teilt. In jedem Fall kann man h als ein Produkt von Einheiten über $D(f_1, \ldots, f_{n-1})$ und Einheiten über $D(f_n)$ schreiben. Mit diesen Einheiten kann man die Garbe trivialisieren. □

Korollar 20.14. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein noethersches integres Schema und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Für jeden Punkt $P \in X \setminus U$ sei der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,P}$ faktoriell. Dann lässt sich jede invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf U zu einer invertierbaren Garbe auf X fortsetzen.*

Beweis. Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf U und es sei $P \in X \setminus U$ ein Punkt. Es sei $W = \operatorname{Spek}(R)$ eine offene affine Umgebung von P, wobei P dem Primideal $\mathfrak{p}$ entspreche. Nach Voraussetzung ist $R_{\mathfrak{p}}$ faktoriell. Wir betrachten die (injektiven) Schemamorphismen

$$\operatorname{Spek}(R_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow W \longrightarrow X\,.$$

Die offene Menge U hat mit W und mit $\operatorname{Spek}(R_{\mathfrak{p}})$ einen nichtleeren Durchschnitt, sagen wir $V \subseteq \operatorname{Spek}(R_{\mathfrak{p}})$, da der generische Punkt von X dem Nullideal von $R_{\mathfrak{p}}$ entspricht. Die zurückgezogene Garbe auf V ist wegen Lemma 20.13 trivial und rührt von einem $R_{\mathfrak{p}}$-Modul und auch von einem R-Modul L her. Aufgrund der Trivialisierbarkeit gibt es einen $R_{\mathfrak{p}}$-Modulisomorphismus

$$R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow L_{\mathfrak{p}}.$$

Dieses Isomorphismus kann man auf eine offene Umgebung $P \in D(f) = W' \subseteq W$ ausdehnen. Somit ist eine Ausdehnung von $\mathcal{L}$ auf $U \cap W'$ gefunden. Daher können wir die offene Menge durch zunehmend größere offene Menge, auf der eine Ausdehnung existiert, ersetzen. Dieser Prozess endet wegen noethersch beim Gesamtraum. □

Unter der vorstehenden Voraussetzung ist also der natürliche Einschränkungshomomorphismus

$$\operatorname{Pic}(X) \longrightarrow \operatorname{Pic}(U)$$

surjektiv.

Beispiel 20.15. Wir betrachten den kommutativen Ring

$$R = K[X, Y, Z]/(XY - Z^n)$$

über einem Körper K mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$ und die offene Menge

$$U = D(X,Y) = D(X) \cup D(Y) = \text{Spek}\,(R) \setminus \{\mathfrak{m}\} \subseteq \text{Spek}\,(R).$$

Es ist

$$R_X \cong K[X, X^{-1}, Z]$$

(vermöge $Y = \frac{Z^n}{X}$) ein faktorieller Integritätsbereich und somit sind sämtliche invertierbaren Garben auf $D(X)$ (und entprechend auf $D(Y)$) nach Satz 20.12 trivial. Ferner ist

$$R_{XY} = R_Z \cong K[X, X^{-1}, Z, Z^{-1}].$$

Eine invertierbare Garbe auf U ist somit durch einen Isomorphismus

$$K[X, X^{-1}, Z, Z^{-1}] \cong \mathcal{O}_U|_{D(XY)} \longrightarrow K[X, X^{-1}, Z, Z^{-1}] \cong \mathcal{O}_U|_{D(XY)},$$

gegeben, der wiederum einer Einheit aus $K[X, X^{-1}, Z, Z^{-1}]$ entspricht. Sei cX^iZ^j eine solche Einheit. Die Einheiten, die von R_X oder R_Y herrühren und multiplikative Kombinationen daraus führen Bemerkung 20.2 zu einer trivialen invertierbaren Garbe. Die Restklassengruppe besteht aus Z^j mit $j = 0, 1, \ldots, n-1$ und daher ist die Picardgruppe von U gleich $\mathbb{Z}/(n)$.

Beispiel 20.16. Wir betrachten die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_K$ über einem Körper K mit der Standardüberdeckung

$$\mathbb{P}^1_K = D_+(X) \cup D_+(Y)$$

mit den beiden affinen Geraden

$$D_+(X) = \text{Spek}\left(K[\frac{Y}{X}]\right) \cong \mathbb{A}^1_K$$

und $D_+(Y) = \text{Spek}\left(K[\frac{X}{Y}]\right) \cong \mathbb{A}^1_K$. Wegen Satz 20.12 und Bemerkung 20.2 können wir die Picardgruppe der projektiven Geraden berechnen, indem wir die Einheiten in

$$\Gamma\left(D_+(XY), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}\right) = K[\frac{X}{Y}, \frac{Y}{X}]$$

modulo den Einheiten auf den beiden affinen Stücken betrachten. Dies ergibt die Gruppe $\left(\frac{X}{Y}\right)^k$, $k \in \mathbb{Z}$, somit ist die Picardgruppe isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Die vorstehende Aussage gilt allgemein für den projektiven Raum $\mathbb{P}^d_K$ zu $d \geq 1$, siehe Satz 22.12

20. Arbeitsblatt

Aufgabe 20.1. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Schemamorphismus. Zeige, dass durch $\mathcal{L} \mapsto \varphi^*\mathcal{L}$ ein Gruppenhomomorphismus

$$\text{Pic}\,(Y) \longrightarrow \text{Pic}\,(X)$$

festgelegt ist.

Für die beiden folgenden Aufgaben beachte man Bemerkung 20.3.

Aufgabe 20.2. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Schemamorphismus. Zeige, dass der Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{Pic}(Y) \longrightarrow \operatorname{Pic}(X),\ \mathcal{L} \longmapsto \varphi^*\mathcal{L},$$

mit Hilfe der Kozykelbeschreibung aus Bemerkung 20.2 folgendermaßen beschrieben werden kann: Dem Kozykel $r_{ij} \in (\Gamma(V_i \cap V_j, \mathcal{O}_Y))^\times$, $i < j$, zu einer offenen Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ wird der Kozykel

$$\theta_{ij}(r_{ij}) \in \big(\Gamma\big(\varphi^{-1}(V_i) \cap \varphi^{-1}(V_j), \mathcal{O}_X\big)\big)^\times$$

i¡ j , bezüglich der Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} \varphi^{-1}(V_i)$ zugeordnet, wobei die

$$\theta_{ij}\colon\ \Gamma(V_i \cap V_j, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma\big(\varphi^{-1}(V_i \cap V_j), \mathcal{O}_X\big)$$

die zugehörigen Ringhomomorphismen bezeichnen.

Aufgabe 20.3. Es sei $A = K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ ein standard-graduierter Ring mit der offenen Überdeckung

$$U \,=\, \operatorname{Spek}(A) \setminus \{A_+\} \,=\, \bigcup_{i=1}^{n} D(X_i) \,\subseteq\, \operatorname{Spek}(R) \,=\, X$$

des punktierten Spektrums und der offenen Überdeckung

$$Y \,=\, \operatorname{Proj}(A) \,=\, \bigcup_{i=1}^{n} D_+(X_i)$$

des zugehörigen projektiven Spektrums. Sei $\ell \in \mathbb{Z}$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Familie der Einheiten $X_i^\ell \in (\Gamma(D(X_i), \mathcal{O}_X))^\times$, $i = 1, \ldots, n$, legt den Kozykel $X_j^\ell X_i^{-\ell} \in (\Gamma(D(X_iX_j), \mathcal{O}_X))^\times$, $i < j$, fest, der die triviale invertierbare Garbe auf U repräsentiert.
(2) Den Kozykel aus (1) kann man als einen Kozykel auf dem projektiven Spektrum Y auffassen.
(3) Die invertierbare Garbe, die durch den Kozykel aus (2) auf Y festgelegt ist, ist isomorph zur getwisteten Strukturgarbe $\mathcal{O}_Y(\ell)$ (oder aber zu $\mathcal{O}_Y(-\ell)$, hier gibt es eine Vorzeichenwahl).
(4) Die zurückgezogene Garbe einer getwisteten Strukturgarbe unter der Kegelabbildung $U \to Y$ ist trivial.

Aufgabe 20.4. Es sei R ein faktorieller Integritätsbereich. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Zu $f \in R$, $f \neq 0$, ist $(f)R_{(p)} = (p^s)$ genau dann, wenn p mit dem Exponenten s in der Primfaktorzerlegung von f vorkommmt.

(2) Zwei Hauptideale (f) und (g) stimmen genau dann überein, wenn für jedes Primelement p in der Lokalisierung $R_{(p)}$ die Ideale $(f)R_{(p)}$ und $(g)R_{(p)}$ übereinstimmen.

Als Einstimmung auf Lemma 20.13 dient die folgende Aufgabe.

Aufgabe 20.5. Es sei R ein faktorieller Integritätsbereich und $f, g \in R$. Zeige mit Hilfe von Bemerkung 20.2, dass die Picardgruppe von

$$D(f, g) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$$

trivial ist.

Aufgabe 20.6. Es sei R ein noetherscher Integritätsbereich derart, dass sämtliche Lokalisierungen $R_{\mathfrak{p}}$ faktoriell seien. Es sei $U \subseteq \operatorname{Spek}(R)$ eine offene Teilmengen und es sei $\mathfrak{p} \notin U$ ein Punkt der Kodimension ≥ 2 (das Primideal $\mathfrak{p}$ besitzt also eine Höhe ≥ 2.) Zeige, dass dann eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf U eine eindeutige Ausdehnung auf eine offene Menge U' besitzt, die U und $\mathfrak{p}$ umfasst.

Aufgabe 20.7. Wir betrachten den quadratischen Zahlbereich $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ mit der offenen Teilmenge $D(2) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$. Zeige, dass man die Strukturgarbe auf $D(2)$ in mehrfacher Weise zu einer invertierbaren Garbe auf $\operatorname{Spek}(R)$ fortsetzen kann.

Aufgabe 20.8. Zeige, dass die Picardgruppe zum punktierten Spektrum

$$U = D(X, Y, Z) \subseteq \operatorname{Spek}\left(K[X, Y, Z]/(XY - Z^n)_{(X,Y,Z)}\right)$$

zum lokalen Ring $K[X, Y, Z]/(XY - Z^n)_{(X,Y,Z)}$ gleich $\mathbb{Z}/(n)$ ist (vergleiche Beispiel 20.15).

Aufgabe 20.9. Zeige, dass es auf dem punktierten Spektrum

$$U = D(X, Y, Z) \subseteq \operatorname{Spek}(K[X, Y, Z]/(XY - Z^n))$$

zu $n \geq 2$ invertierbare Garben gibt, die man nicht zu einer invertierbaren Garbe auf $\operatorname{Spek}(K[X, Y, Z]/(XY - Z^n))$ ausdehnen kann.

Aufgabe 20.10. Zeige, dass die invertierbaren Garben auf dem punktierten Spektrum

$$U = D(X, Y, Z) \subseteq \operatorname{Spek}(K[X, Y, Z]/(XY - Z^n))$$

Einschränkungen der kohärenten Idealgarben zu den Idealen (X, Z^i), $i = 0, \ldots, n-1$ in $K[X, Y, Z]/(XY - Z^n)$ sind.

Aufgabe 20.11. Es sei $R = K[X,Y,Z]/(XY - Z^n)$. WIr betrachten zu $i = 0,1,\ldots,n-1$ die R-Algebren $A_i = R[S,T]/(SX + TZ^i)$ und die zugehörige Spektrumsabbildung

$$\pi_i\colon\ \mathrm{Spek}\,(A_i) \longrightarrow \mathrm{Spek}\,(R).$$

Zeige, dass die π_i oberhalb von

$$U = D(X,Y,Z) \subseteq \mathrm{Spek}\,(K[X,Y,Z]/(XY - Z^n))$$

Geradenbündel sind, die für $i \neq 0$ nicht trivial sind. Zeige ferner, dass Spek (A_i) bei $i \neq 0$ kein Geradenbündel über Spek (R) ist.

Aufgabe 20.12. Es sei $\mathbb{P}^d_K = \mathrm{Proj}\,(K[X_0,X_1,\ldots,X_d])$ der projektive Raum über einem Körper K. Zeige, dass die Picardgruppe zur offenen Teilmenge

$$D_+(X_i,X_j) \subseteq \mathbb{P}^d_K$$

($i \neq j$) isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 20.13. Es sei $\mathbb{P}^d_K = \mathrm{Proj}\,(K[X_0,X_1,\ldots,X_d])$ der projektive Raum über einem Körper K. Zeige, dass die Picardgruppe von $\mathbb{P}^d_K$ bei $d \geq 1$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

21. Vorlesung - Normale Schemata

21.1. **Normale Ringe.**

Definition 21.1. Sei R ein kommutativer Ring und sei $S \subseteq R$ die Menge der Nichtnullteiler von R. Dann nennt man die Nenneraufnahme R_S den *totalen Quotientenring* von R. Er wird mit $Q(R)$ bezeichnet.

Definition 21.2. Ein kommutativer Ring heißt *normal*, wenn er ganz-abgeschlossen in seinem totalen Quotientenring ist.

Definition 21.3. Sei R ein kommutativer Ring und $Q(R)$ sein totaler Quotientenring. Dann nennt man den ganzen Abschluss von R in $Q(R)$ die *Normalisierung* von R.

Beispiel 21.4. Wir bestimmen die Normalisierung des Ringes $K[X,Y]/(XY)$ über einem Körper K. Das Element $X+Y$ ist ein Nichtnullteiler und für das Element $\frac{X-Y}{X+Y}$ aus dem totalen Quotientenring $Q(R)$ gilt

$$\left(\frac{X-Y}{X+Y}\right)^2 = \frac{(X-Y)^2}{(X+Y)^2} = \frac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2} = 1,$$

d.h. dieses Element erfüllt eine Ganzheitsgleichung und gehört somit zur Normalisierung.

21.2. **Diskrete Bewertungsringe.**

Definition 21.5. Ein *diskreter Bewertungsring* R ist ein Hauptidealbereich mit der Eigenschaft, dass es bis auf Assoziiertheit genau ein Primelement in R gibt.

Definition 21.6. Zu einem Element $f \in R$, $f \neq 0$, in einem diskreten Bewertungsring mit Primelement p heißt die Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $f = up^n$, wobei u eine Einheit bezeichnet, die *Ordnung* von f. Sie wird mit $\operatorname{ord}(f)$ bezeichnet.

Lemma 21.7. *Sei R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (p)$. Dann hat die Ordnung*

$$R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N},\, f \longmapsto \operatorname{ord}(f),$$

folgende Eigenschaften.

1. $\operatorname{ord}(fg) = \operatorname{ord}(f) + \operatorname{ord}(g)$.
2. $\operatorname{ord}(f+g) \geq \min\{\operatorname{ord}(f), \operatorname{ord}(g)\}$.
3. $f \in \mathfrak{m}$ *genau dann, wenn* $\operatorname{ord}(f) \geq 1$.
4. $f \in R^\times$ *genau dann, wenn* $\operatorname{ord}(f) = 0$.

Beweis. Siehe Aufgabe 21.7. □

Wir zitieren den folgenden Charakterisierungssatz, der insbesondere besagt, dass normale lokale eindimensionale Integritätsbereiche diskrete Bewertungsringe und somit faktoriell und regulär sind. Dies bedeutet wiederum für einen normalen noetherschen Integritätsbereich R, dass sämtliche Lokalisierungen an Primidealen der Höhe 1 diskrete Bewertungsringe sind.

Satz 21.8. *Sei R ein noetherscher lokaler Integritätsbereich mit der Eigenschaft, dass es genau zwei Primideale $0 \subset \mathfrak{m}$ gibt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *R ist ein diskreter Bewertungsring.*
2. *R ist ein Hauptidealbereich.*
3. *R ist faktoriell.*
4. *R ist normal.*
5. *$\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.*

Lemma 21.9. *Es sei K ein Körper, B ein diskreter Bewertungsring über K, dessen Restklassenkörper gleich K ist. Dann ist die Ordnung von einem Element $f \in B$, $f \neq 0$, gleich der K-Vektorraumdimension von $B/(f)$.*

Beweis. Dies folgt aus Aufgabe 21.2 durch Induktion über die Ordnung von f. □

21.3. **Normale Schemata.**

Definition 21.10. Ein Schema heißt *normal*, wenn jeder lokale Ring $\mathcal{O}_x$ zu $x \in X$ ein normaler Ring ist.

Lemma 21.11. *Für ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

(1) *X ist normal.*
(2) *Für jede offene affine Teilmenge $U = \operatorname{Spek}(R)$ von X ist R ein normaler Ring.*
(3) *Es gibt eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i = \operatorname{Spek}(R_i)$, wobei R_i ein normaler Ring ist.*

Beweis. Von (2) nach (3) ist eine Einschränkung. Sei (3) erfüllt. Für einen jeden Punkt $x \in X$ gibt es somit eine offene affine Umgebung

$$x \in U = \operatorname{Spek}(R) \subseteq X$$

mit R normal. Dabei ist $\mathcal{O}_x = R_{\mathfrak{p}}$ mit einem Primideal $\mathfrak{p}$ aus R. Nach Satz 23.3 (Kommutative Algebra) ist $R_{\mathfrak{p}}$ ebenfalls normal. □

Satz 21.12. *Es sei R ein normaler noetherscher Integritätsbereich. Dann ist*

$$R = \bigcap_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}},$$

wobei $\mathfrak{p}$ über alle Primideale $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 von R läuft.

Beweis. Sei $f = g/h \in Q(R)$ und sei vorausgesetzt, dass f nicht zu R gehört. Dann gibt es nach Lemma 27.1 (Kommutative Algebra) auch ein zu einem Restklassenring nach einem Hauptideal assoziiertes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $f \notin R_{\mathfrak{p}}$. Es ist also $\mathfrak{p}$ das Annullatorideal zu einem Element x modulo dem Hauptideal (y). Wir können durch Lokalisierung annehmen, dass $\mathfrak{p}$ das maximale Ideal von R ist. Wir betrachten den R-Untermodul

$$N = \{q \in Q(R) \mid q\mathfrak{p} \subseteq R\} \subseteq Q(R).$$

Dabei gilt

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}N \subseteq R.$$

Wegen der Maximalität von $\mathfrak{p}$ ist

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}N$$

oder

$$\mathfrak{p}N = R.$$

Im ersten Fall folgt aus Lemma 22.6 (Kommutative Algebra), dass die Elemente aus N ganz über R sind. Wegen der Normalität von R folgt $N = R$. Wegen $x\mathfrak{p} \subseteq (y)$ ist auch $\frac{x}{y}\mathfrak{p} \subseteq R$, also

$$\frac{x}{y} \in N = R,$$

ein Widerspruch. Also liegt der zweite Fall, $\mathfrak{p}N = R$, vor. Doch dann muss es Elemente $a \in \mathfrak{p}$ und $q \in N$ mit

$$aq = 1$$

geben. Für $b \in \mathfrak{p}$ ist dann $bq = b/a \in R$, also $b \in (a)$ und damit ist $\mathfrak{p} = (a)$ ein Hauptideal. Nach Satz 24.5 (Kommutative Algebra) ist R ein diskreter Bewertungsring und $\mathfrak{p}$ besitzt die Höhe 1. $\square$

21. Arbeitsblatt

Aufgabe 21.1. Beschreibe das Spektrum eines diskreten Bewertungsringes.

Aufgabe 21.2. Sei R ein diskreter Bewertungsring und sei $\mathfrak{m} = (\pi)$. Es sei $K = R/(\pi)$ der Restklassenkörper von R. Zeige, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen R-Modulisomorphismus

$$(\pi^n)/(\pi^{n+1}) \longrightarrow K$$

gibt.

Aufgabe 21.3. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen R und Q gibt.

Aufgabe 21.4. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Charakterisiere die endlich erzeugten R-Untermoduln von Q. Auf welche Form kann man ein Erzeugendensystem bringen?

Aufgabe 21.5. Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $f \in K[X]$, $f \neq 0$, und $a \in K$. Zeige, dass die folgenden „Ordnungen“ von f an der Stelle a übereinstimmen.

(1) Die Verschwindungsordnung von f an der Stelle a, also die maximale Ordnung einer formalen Ableitung mit $f^{(k)}(a) = 0$.
(2) Der Exponent des Linearfaktors $X - a$ in der Zerlegung von f.
(3) Die Ordnung von f an der Lokalisierung $K[X]_{(X-a)}$ von $K[X]$ am maximalen Ideal $(X - a)$.

Aufgabe 21.6. Sei K ein Körper und $K(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über K. Finde einen diskreten Bewertungsring $R \subset K(T)$ mit $Q(R) = K(T)$ und mit $R \cap K[T] = K$.

Aufgabe 21.7. Beweise für einen diskreten Bewertungsring die Eigenschaften der Ordnung, die in Lemma 21.7 formuliert sind.

Aufgabe 21.8. Sei p eine fixierte Primzahl. Zu jeder ganzen Zahl $n \neq 0$ bezeichne $\nu_p(n)$ den Exponenten, mit dem die Primzahl p in der Primfaktorzerlegung von n vorkommt.

a) Zeige: die Abbildung $\nu_p : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ ist surjektiv.

b) Zeige: es gilt $\nu_p(nm) = \nu_p(n) + \nu_p(m)$.

c) Finde eine Fortsetzung $\nu_p : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ der gegebenen Abbildung, die ein Gruppenhomomorphismus ist (wobei $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation und $\mathbb{Z}$ mit der Addition versehen ist).

d) Beschreibe den Kern des unter c) beschriebenen Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 21.9.*

Sei K ein Körper und sei

$$\nu\colon\ (K^\times, \cdot, 1) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, 0)$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\nu(f+g) \geq \min\{\nu(f), \nu(g)\}$ für alle $f, g \in K^\times$. Zeige, dass

$$R = \left\{ f \in K^\times \mid \nu(f) \geq 0 \right\} \cup \{0\}$$

ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 21.10.*

Es sei $P \in C = V(F) \subset \mathbb{A}_K^2$ ein glatter Punkt einer ebenen irreduziblen Kurve. Zeige, dass der zugehörige lokale Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 21.11. Es sei $V = V(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_K^2$ der Einheitskreis über einem Körper K und es sei $P = (a, b) \in V$ ein Punkt.

(1) Zeige, dass der lokale Ring R von V im Punkt P ein diskreter Bewertungsring ist.
(2) Folgere, dass der Koordinatenring $K[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ normal ist (man kann K algebraisch abgeschlossen annehmen).
(3) Zeige, dass $K[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ nicht faktoriell ist.
(4) Bestimme die Ordnung von X und von $Y - 1$ im lokalen Ring zum Punkt $(0, 1)$.

Aufgabe 21.12. Sei K ein Körper. Eine *Potenzreihe in einer Variablen* über K ist ein formaler Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + \dots \text{ mit } a_i \in K\,.$$

Es kann hier also unendlich viele von 0 verschiedene Koeffizienten a_i geben. Definiere eine Ringstruktur auf der Menge aller Potenzreihen, die die Ringstruktur auf dem Polynomring in einer Variablen fortsetzt. Zeige, dass dieser Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

Ein Modul, der außer 0 keine Torsionselemente enthält, heißt *torsionsfrei*.

Aufgabe 21.13. Zeige, dass ein torsionsfreier endlich erzeugter Modul M über einem diskreten Bewertungsring frei ist.

22. Vorlesung - Die Divisorenklassengruppe

22.1. **Weil-Divisoren.**

Wir nennen eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y \subset X$ der Kodimension 1 in einem integren Schema X einen *Primdivisor*. Wenn X normal und noethersch ist, so ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,\eta}$ am generischen Punkt η zu Y ein diskreter Bewertungsring. Somit besitzt jedes Element $f \neq 0$ aus dem Funktionenkörper $K(X)$ eine wohlbestimmte Ordnung $\operatorname{ord}(f)$ längs Y, die wir mit $\operatorname{ord}_Y(f)$ bezeichnen. Wenn π die Ortsuniformisierende im diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_{X,\eta}$ bezeichnet, so kann man $f = u\pi^n$ mit einer Einheit u aus dem Ring und $n \in \mathbb{Z}$ schreiben, und dieser Exponent n ist die Ordnung von f längs Y heißt. Bei positiver Ordnung spricht man von einer Nullstelle, bei negativer Ordnung von einem Pol. Wenn $U = \operatorname{Spek}(R) \subseteq X$ eine offene affine Teilmenge mit $U \cap Y \neq \emptyset$ ist, so entspricht Y einem Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 in R und für den lokalen Ring gilt $\mathcal{O}_{X,\eta} = R_{\mathfrak{p}}$.

Definition 22.1. Es sei X ein normales noethersches integres Schema mit Funktionenkörper K und sei $f \in K$, $f \neq 0$. Dann heißt die formale Summe

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{Y \text{ Primdivisor}} \operatorname{ord}_Y(f) \cdot Y,$$

wobei $\operatorname{ord}_Y(f)$ die Ordnung von f im lokalen Ring zu Y bezeichnet, der durch f definierte *Hauptdivisor*.

Der Hauptdivisor beschreibt also das Nullstellen- und das Polverhalten der Funktion f. Wir zeigen zunächst, dass es sich bei einem Hauptdivisor um eine endliche Summe handelt.

Lemma 22.2. *Es sei X ein normales noethersches integres Schema mit Funktionenkörper K und sei $f \in K$, $f \neq 0$. Dann gibt es nur endlich viele Primdivisoren Y mit*

$$\operatorname{ord}_Y(f) \neq 0,$$

Beweis. Es sei $U \subseteq X$ eine nichtleere offene affine Teilmenge mit

$$f \in R = \Gamma(U, \mathcal{O}_X).$$

Da der generische Punkt von X zu U gehört, sind die Primdivisoren, die U nicht treffen, irreduzible Komponenten von $X \setminus U$. Da $X \setminus U$ eine abgeschlossene Teilmenge von X und damit noethersch ist, gibt es dort nur endlich viele Komponenten. D.h. wir müssen nur noch diejenigen Primdivisoren betrachten, die U treffen. Deren generische Punkte entsprechen dann Primidealen der Höhe 1 von R. Es ist

$$\mathrm{ord}_Y(f) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f) \geq 0$$

und dies ist nur dann positiv, wenn $f \in \mathfrak{p}$ ist. Die Primideale $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 oberhalb von f sind die minimalen Primideale von $R/(f)$, und wegen noethersch gibt es davon nur endlich viele. □

Definition 22.3. Es sei X ein normales noethersches integres Schema. Dann nennt man eine formale Summe $\sum_Y n_Y \cdot Y$, wobei Y die Primdivisoren von X durchläuft und nur endlich viele der n_Y von 0 verschieden sind, einen *Weildivisor* auf X.

Ein Weildivisor ist eine freie Vorgabe für das „theoretisch mögliche" Nullstellen- bzw Polverhalten einer rationalen Funktion, allerdings muss ein solche Vorgabe nicht durch eine Funktion realisiert werden können. Einen Divisor, bei dem sämtliche Zahlen $a_Y \geq 0$ sind, nennt man *effektiv*. Auf einer irreduziblen normalen (also glatten) Kurve X ist ein Primdivisor einfach ein abgeschlossener Punkt. Ein Weildivisor ist also in diesem Fall einfach eine endliche Summe $\sum_{P \in X} n_P \cdot P$.

Definition 22.4. Es sei X ein normales noethersches integres Schema. Dann nennt die Gruppe aller Weildivisoren mit komponentenweiser Addition die *Weildivisorengruppe* von X. Sie wird mit $\mathrm{Div}(X)$ bezeichnet.

Lemma 22.5. *Es sei X ein normales noethersches integres Schema mit Funktionenkörper K. Dann ist die Zuordnung*

$$K^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(X),\ f \longmapsto \mathrm{div}(f),$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Nach Lemma 22.2 ist der Hauptdivisor zu f in der Tat ein Weildivisor. Die Homomorphieeigenschaft folgt, bezogen auf einen fixierten Primdivisor Y mit dem zugehörigen diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_Y$, aus Lemma 21.7 (1). □

22.2. **Die Divisorenklassengruppe.**

Definition 22.6. Es sei X ein normales noethersches integres Schema mit Funktionenkörper K. Dann nennt man die Restklassengruppe

$$\mathrm{KG}(X) = \mathrm{Div}(X)/\,\mathrm{HDiv}(X)$$

die *Divisorenklassengruppe* von X.

Für einen noetherschen normalen Integritätsbereich R nennt man entsprechend $\mathrm{KG}\,(R) = \mathrm{KG}\,(\mathrm{Spek}\,(R))$ die *Divisorenklassengruppe* des Rings R. Im zahlentheoretischen Kontext, wenn R der Ring der ganzen Zahlen in einer endlichen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist, spricht man auch von der *Idealklassengruppe*. Divisoren, die die gleiche Divisorenklasse definieren, heißen *linear äquivalent*.

Satz 22.7. *Es sei R ein normaler noetherscher Integritätsbereich und es bezeichne* $\mathrm{KG}\,(R)$ *die Divisorenklassengruppe von R. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *R ist faktoriell.*
(2) *Jedes Primideal der Höhe* 1 *ist ein Hauptideal.*
(3) *Jeder Divisor ist ein Hauptdivisor.*
(4) *Es ist* $\mathrm{KG}\,(R) = 0$.

Beweis. Sei (1) erfüllt und $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe 1. Es gibt ein Element $f \in \mathfrak{p}$, $f \neq 0$. Dieses hat eine Primfaktorzerlegung $f = p_1 \cdots p_n$ und aufgrund der Primeigenschaft muss $p_i \in \mathfrak{p}$ für ein i sein. Dann ist aber wegen der Höhenbedingung $(p_i) = \mathfrak{p}$. Sei nun jedes Primideal der Höhe 1 Hauptideal. Dann gilt mit

$$\mathfrak{p} = (p)$$

die Divisorbeziehung

$$\mathrm{div}\,(p) = 1 \cdot \mathfrak{p},$$

da p in keinem anderen Primideal der Höhe 1 enthalten ist und da p auch in $R_{\mathfrak{p}}$ ein Erzeuger von $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ ist. Somit sind die Gruppenerzeuger der Divisorenklasengruppe Hauptdivisoren und damit sind überhaupt alle Divisoren Hauptdivisoren. Die Äquivalenz von (3) und (4) ist klar. Sei nun vorausgesetzt, dass jeder Divisor ein Hauptdivisor ist. Dann gibt es zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 ein $f \in Q(R)$, $f \neq 0$, mit

$$\mathrm{div}\,(f) = 1 \cdot \mathfrak{p}.$$

Wegen der Nichtnegativität des Hauptdivisors ist nach Satz 21.12 $f \in R$. Somit ist f nur in $\mathfrak{p}$ als einzigem Primideal der Höhe 1 enthalten. Sei $\mathfrak{p} = (g_1, \ldots, g_n)$. Dann ist

$$\mathrm{div}\,(g_i) \geq \mathrm{div}\,(f)$$

und somit ist $\frac{g_i}{f} \in R$, also $g_i \in (f)$ und damit $\mathfrak{p} = (f)$.

Sei schließlich (2) erfüllt, und $f \in R$, $f \neq 0$. Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ die minimalen Primoberideale von f. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz besitzen diese alle die Höhe 1. Sei $\mathfrak{p}_i = (p_i)$ mit Primelementen p_1. Es ist

$$\mathrm{div}\,(f) = \sum_{i=1}^{s} n_i \mathfrak{p}_i.$$

Das Element $\prod_{i=1}^s p_i^{n_i}$ besitzt den gleichen Hauptdivisor. Deshalb ist der Quotient $f/\prod_{i=1}^s p_i^{n_i}$ eine Einheit und

$$f = u\prod_{i=1}^s p_i^{n_i}$$

mit einer Einheit u. Daher ist R faktoriell. □

Beispiel 22.8. Wir wollen die Weildivisoren und die Divisorenklassengruppe des projektiven Raumes $\mathbb{P}_K^d$ über einem Körper K verstehen ($d \geq 1$). Wir betrachten die disjunkte Zerlegung

$$\mathbb{P}_K^d = D_+(X_0) \cup V_+(X_0) = \mathbb{A}_K^d \cup \mathbb{P}_K^{d-1},$$

d.h. wir fixieren die Hyperebene

$$H = V_+(X_0) \cong \mathbb{P}_K^{d-1}$$

im „Unendlichen". Ein Primdivisor des projektiven Raumes stimmt also entweder mit der Hyperebene rechts überein oder sie schneidet den affinen Raum links nichtleer und kann als ein Primideal der Höhe 1 im Polynomring $K[\frac{X_1}{X_0},\ldots,\frac{X_d}{X_0}]$ aufgefasst werden. Jede Funktion f des Funktionenkörpers lässt sich (bis auf Skalierung und kürzen) eindeutig als $f = \frac{P}{Q}$ mit Polynomen $P,Q \in K[\frac{X_1}{X_0},\ldots,\frac{X_d}{X_0}]$ schreiben. Mit den Primfaktorzerlegungen zu P und Q kann man direkt

$$f = \prod_{i=1}^n cP_i^{\nu_i}$$

(mit einer Konstanten $c \neq 0$ und $\nu_i \in \mathbb{Z}$) schreiben und daraus den Hauptdivisor zu f ablesen, sofern er such auf die Komponenten im affinen Raum bezieht. Die („unendlich ferne") Ordnung von f an $V_+(X_0)$ ergibt sich folgendermaßen. Der lokale Ring zu diesem Primdivisor ist

$$\begin{aligned} & K[X_0,X_1,\ldots,X_n]_{((X_0))} \\ = \;& \big(K[X_0,X_1,\ldots,X_n]_{K[X_0,X_1,\ldots,X_n]\setminus (X_0)\cap \text{ homogene Elemente }}\big)_0 \\ = \;& K\left(\frac{X_2}{X_1},\ldots,\frac{X_d}{X_1}\right)[\frac{X_0}{X_1}]_{\left(\frac{X_0}{X_1}\right)}. \end{aligned}$$

Man schreibt P (bzw. Q oder f), indem man überall $\frac{X_i}{X_0}$ durch $\frac{X_i}{X_1}\cdot\frac{X_1}{X_0}$ ersetzt. Dies betrachtet man als rationale Funktion über dem Körper $K\left(\frac{X_2}{X_1},\ldots,\frac{X_d}{X_1}\right)$ in der einen Variablen $\frac{X_0}{X_1}$. Der (typischerweise negative) Grad bezüglich $\frac{X_0}{X_1}$ ist die Ordnung.

Beispielsweise ist bei

$$\begin{aligned} P &= \frac{X_1}{X_0} + \left(\frac{X_2}{X_0}\right)^3 \\ &= \frac{X_1}{X_0} + \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^3\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^3 \end{aligned}$$

$$= \left(\left(\frac{X_0}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^3\right)\left(\frac{X_0}{X_1}\right)^{-3}$$

und die Ordnung ist -3. Da jeder Weildivisor mit einem Hauptdivisor auf dem affinen Raum wegen der Faktorialität des Polynomringes übereinstimmt, ist jeder Weildivisor linear äquivalent zu einem Divisor der Form $nV_+(X_0)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ (die Klasse zu $V_+(X_0)$ nennt man auch die *Hyperebenenklasse.*). Ein solcher Divisor ist aber bei $n \neq 0$ kein Hauptdivisor, da ein solcher Hauptdivisor auf dem affinen Raum trivial ist und daher von einer Konstanten herrühren muss. Eine solche besitzt aber auch im Unendlichen die Ordnung 0. Die Divisorenklassengruppe des projektiven Raumes ist also $\mathbb{Z}$, als Erzeuger kann man jede Hyperebene nehmen.

22.3. **Divisorenklassengruppe und Picardgruppe.**

Wir besprechen nun den Zusammenhang zwischen Divisoren und invertierbaren Untergarben der Funktionenkörpergarben $\mathcal{K}$ und zwischen der Divisorenklassengruppe und der Picardgruppe. Eine invertierbare Untergarbe $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ definiert für jeden Punkt $x \in X$ einen freien $\mathcal{O}_{X,x}$-Untermodul $\mathcal{L}_x \subseteq \mathcal{K}_x = K$ vom Rang 1. Wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ ein diskreter Bewertungsring mit Ortsuniformisierender π ist, was bei einem normalen Schema für jeden generischen Punkt zu einem Primdivisor der Fall ist, gilt

$$\mathcal{L}_x = \pi^n \mathcal{O}_{X,x}$$

mit einem eindeutigen $n \in \mathbb{Z}$. Dieses n bezeichnen wir mit $\operatorname{ord}_Y(\mathcal{L})$, wenn Y den Primdivisor bezeichnet.

Satz 22.9. *Es sei X ein lokal faktorielles noethersches integres Schema. Dann entsprechen sich die invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Untermoduln der konstanten Funktionenkörpergarbe $\mathcal{K}$ und die Weildivisoren über die Korrespondenz*

$$\mathcal{L} \longmapsto \sum_Y \operatorname{ord}_Y(\mathcal{L})$$

und

$$D = \sum_Y a_Y Y \longmapsto \mathcal{L}_D$$

mit

$$\mathcal{L}_D(U) = \{f \in K \mid \operatorname{ord}_Y(f) \geq D \text{ für alle } Y \in U\}$$

für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$. Diese Zuordnungen sind mit den Gruppenstrukturen verträglich und dabei entsprechen sich trivale Untergarben und Hauptdivisoren. Invertierbare Ideale $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{K}$ entsprechen den effektiven Divisoren.

Beweis. Es gibt eine endliche offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit

$$\mathcal{L} = (f_i)\mathcal{O}_X|_{U_i}$$

mit $f_i \in K$, $f_i \neq 0$. Nach Lemma 22.2 gibt es jeweils nur endlich viele irreduzible Weildivisoren in U_i mit

$$\operatorname{ord}_Y(f_i) \neq 0.$$

Daher ist $D = \sum_Y \operatorname{ord}_Y(\mathcal{L})Y$ in der Tat ein Weildivisor.

Sei umgekehrt D ein Weildivisor und $\mathcal{L}$ die zugehörige Untergarbe der konstanten Garbe zum Funktionenkörper. Es ist zu zeigen, dass diese invertierbar ist. Sei $x \in X$ ein Punkt und $x \in U \subseteq X$ eine affine offene Umgebung. Im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$, der nach Voraussetzung faktoriell ist, ist nach Satz 22.7 der Divisor D_x, der aus allen irreduziblen Komponenten von D besteht, die durch x verlaufen, ein Hauptdivisor. Indem man die Komponenten von D, die nicht durch x verlaufen, entfernt, kann man U durch eine kleinere affine Umgebung V von x ersetzen, auf der der Divisor ein Hauptdivisor ist. Dort gilt also

$$D|_V = \operatorname{div}(f)|_V$$

mit einem $f \in K$. Es ist dann

$$\mathcal{L}_D|_V = (f)\mathcal{O}_X|_V.$$

Wir müssen nun zeigen, dass diese Zuordnungen invers zueinander sind. Wir beginnen mit einer invertierbaren Untergarbe und übernehmen die Bezeichnungen von oben. Auf U_i ist $D|_{U_i} = \operatorname{div}(f_i)|_{U_i}$. Daher gilt für $g \in K$ die Zugehörigkeit

$$g \in \{f \in K \mid \operatorname{ord}_Y(f) \geq D \text{ für alle } Y \in U\}$$

genau dann, wenn auf U für die Hauptdivisoren die Beziehung

$$\operatorname{div}(g) \geq \operatorname{div}(f_i)$$

gilt, was wegen Satz 21.12 wiederum zu $g \in f \cdot \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ äquivalent ist.

Wenn man mit einem Weildivisor startet, so stimmt dieser lokal mit einem Hauptdivisor überein. Dann erzeugt ein Element des Funktionenkörpers, das diesen Hauptdivisor besitzt, lokal die zugehörige invertierbare Garbe, und dieses Element wird auch verwendet, um den zugehörigen Divisor auszurechnen. □

Bei der vorstehenden Korrespondenz entsprechen die Ideale den effektiven Divisoren, das Hauptideal (f) entspricht dem Hauptdivisor $\operatorname{div}(f)$. Es gibt aber auch gute Gründe, die Korrespondenz abzuändern, indem man Negationen miteinarbeitet. Dann entspricht ein effektiver Divisor einem globalen Schnitt in der zugehörigen invertierbaren Garbe.

Satz 22.10. *Es sei X ein lokal faktorielles noethersches integres Schema. Dann stimmt die Divisorenklassengruppe von X mit der Picardgruppe von X überein.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 20.6 und Satz 22.9. □

Korollar 22.11. *Es sei X ein glattes Schema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann stimmt die Divisorenklassengruppe von X mit der Picardgruppe von X überein.*

Beweis. In einem glatten Schema sind die lokalen Ringe nach Satz 18.16 regulär und diese sind nach Satz 25.12 (Singularitätentheorie (Osnabrück 2019)) faktoriell. Daher folgt die Aussage aus Satz 22.10. $\square$

Satz 22.12. *Die Picardgruppe des projektiven Raumes $\mathbb{P}^d_K$ mit $d \geq 1$ über einem Körper K ist $\mathbb{Z}$. Die invertierbaren Garben auf dem projektiven Raum werden repräsentiert durch die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(\ell)$, $\ell \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 22.10 und Beispiel 22.8. Aufgrund der expliziten Übersetzung in Satz 22.9 entspricht die negierte Hyperebenenklasse dem tautologischen Bündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(1)$. $\square$

22. Arbeitsblatt

Aufgabe 22.1. Bestimme den Hauptdivisor zu $\frac{1000}{333}$ auf Spek $(\mathbb{Z})$.

Aufgabe 22.2. Bestimme den Hauptdivisor zu $f = (t-3)^2(t-1)^{-5}t^2(t+2)^{-1}$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K = \text{Proj}\,(K[X,Y])$.

Aufgabe 22.3. Bestimme den Hauptdivisor zu $f = \frac{t}{t^2+1}$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K = \text{Proj}\,(K[X,Y])$ mit $t = \frac{Y}{X}$ für die Körper $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$.

Aufgabe 22.4. Wir betrachten die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_K = \text{Proj}\,(K[X,Y])$ über einem Körper K sowie die affine Gerade

$$\mathbb{A}^1_K \subset \mathbb{P}^1_K = D_+(X) \cup \{\infty\}$$

mit dem globalen Schnittring

$$K[\frac{Y}{X}] = K[t].$$

Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Der Hauptdivisor zu einem Polynom $P \in K[t]$ besitzt in $\mathbb{A}^1_K$ keine negative Ordnung (keine Polstelle).
(2) Die Ordnung von einem Polynom $P \in K[t]$ in ∞ ist das negative des Grades von P.
(3) Es sei $D = \sum_P n_P \cdot P$ und K algebraisch abgeschlossen. Dann ist D genau dann ein Hauptdivisor, wenn $\sum_P n_P = 0$ ist.

Aufgabe 22.5. Sei $\mathbb{P}_K^n = \operatorname{Proj}(K[X_0, X_1, \ldots, X_n])$ der projektive Raum über einem Körper K. Zeige, dass die effektiven Weildivisoren auf $\mathbb{P}_K^n$ den normierten homogenen Polynomen $P \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ entsprechen.

Aufgabe 22.6. Zeige, dass auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}_K^d$ über einem Körper je zwei Hyperebenen $H_1 = V_+(a_0X_0 + a_1X_0 + \cdots + a_dX_d)$ und $H_2 = V_+(b_0X_0 + b_1X_0 + \cdots + b_dX_d)$ zueinander linear äquivalent sind.

Aufgabe 22.7. Es sei $V = V_+(F) \subseteq \mathbb{P}_K^d$ eine irreduzible Hyperfläche vom Grad d im projektiven Raum über einem Körper, die wir als Element in der Divisorenklassengruppe auffassen. Zeige, dass V linear äquivalent zu dH ist, wobei H die Klasse einer Hyperebene bezeichnet.

Aufgabe 22.8. Es sei X ein normales noethersches integres Schema und sei $Z \subset X$ eine abgeschlossene Teilmengen mit einer Kodimension ≥ 2. Zeige, dass die Divisorenklassengruppen von X und von $X \setminus Z$ übereinstimmen.

Aufgabe 22.9. Es sei X ein normales noethersches integres Schema und sei $U \subset X$ eine offene Teilmengen. Zeige, dass man durch Weglassen derjenigen Primdivisoren, die U nicht treffen, einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\operatorname{Div}(X) \to \operatorname{Div}(U)$ erhält. Zeige, dass dabei Hauptdivisoren auf Hauptdivisoren gehen und dass es daher einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\operatorname{KG}(X) \to \operatorname{KG}(U)$ gibt.

Aufgabe 22.10. Es sei X ein normales noethersches integres Schema und sei $x \in X$ ein Punkt. Zeige, dass man durch Weglassen derjenigen Primdivisoren, die nicht durch x verlaufen, einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\operatorname{Div}(X) \to \operatorname{Div}(\mathcal{O}_{X,x})$ erhält. Zeige, dass dabei Hauptdivisoren auf Hauptdivisoren gehen und dass es daher einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\operatorname{KG}(X) \to \operatorname{KG}(\mathcal{O}_{X,x})$ gibt.

Aufgabe 22.11. Es sei

$$D = \sum_Y a_Y \cdot Y = \sum_j a_j \cdot Y_j = \sum_j a_j \cdot V_+(G_j)$$

ein Weildivisor des projektiven Raumes $\mathbb{P}_K^d$, wobei die beteiligten Primdivisoren durch homogene Primelemente $G_j \in K[X_0, X_1, \ldots, X_d]$ beschrieben werden. Wir betrachten das Polynom $G := \prod_j G_j^{a_j}$ vom Grad $\delta = \sum_j a_j \operatorname{grad}(G_j)$. Zeige, dass die zugehörige invertierbare Untergarbe $\mathcal{L}_D$ in der Funktionenkörpergarbe im Sinne von Satz 22.9 mit der Realisierung der getwisteten Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^d}(-\delta)$ durch Multiplikation mit G aus Beispiel 20.9 übereinstimmt.

In den folgenden Aufgaben arbeiten wir mit

$$\mathcal{O}_X(D) = -\mathcal{L}_D$$

zu einem Divisor D. Es ist also für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in K \mid \operatorname{ord}_Y(f) \geq -D \text{ für alle } Y \in U\}.$$

Aufgabe 22.12. Es sei X ein lokal faktorielles projektives integres Schema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und sei D ein Weildivisor auf X mit zugehöriger Garbe $\mathcal{O}_X(D)$. Zeige, dass es eine natürliche Korrespondenz zwischen den zu D linear äquivalenten effektiven Weildivisoren und den nichttrivialen globalen Schnitten von $\mathcal{O}_X(D)$ gibt, wobei man Schnitte miteinander identifiziert, wenn sie durch Skalierung auseinander hervorgehen.

Aufgabe 22.13. Es sei X ein lokal faktorielles noethersches integres Schema und sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Untergarbe der konstanten Funktionenkörpergarbe. Es sei

$$s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$$

ein nichttrivialer Schnitt. Zeige, dass die Nullstellenmenge zu s, also $Z(s) = X \setminus X_s$, in natürlicher Weise ein effektiver Weildivisor D auf X ist, derart, dass $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$ ist.

Aufgabe 22.14. Es sei

$$F = F_1^{a_1} \cdots F_r^{a_r}$$

die Primfaktorzerlegung eines homogenen Polynoms $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_d]$ (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K) vom Grad e im homogene Primpolynome F_j und sei

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_j V_+(F_j)$$

der zugehörige Weildivisor auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}_K^d$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Man kann jeden effektiven Weildivisor auf dem projektiven Raum in dieser Form (eindeutig bis auf Skalierung) darstellen.
(2) Es gilt mengentheoretisch

$$V_+(F) = \bigcup_{j=1}^{n} V_+(F_i).$$

(3) Es sei $C \subseteq \mathbb{P}_K^d$ eine glatte projektive Kurve, die keine Teilmenge von $V_+(F)$ sei. Dann induziert D einen Weildivisor $D|_C$ auf der Kurve C, indem man zu jedem Punkt $P \in C$ die Ordnung von F in $\mathcal{O}_{C,P}$ betrachtet.

(4) Die eingeschränkte invertierbare Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(e)|_C$ ist isomorph zur invertierbaren Garbe auf C ist, die zu $D|_C$ gehört. Es gilt also
$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(D)|_C = \mathcal{O}_C(D|_C).$$
(5) Linear äquivalente Divisoren auf dem projektiven Raum induzieren linear äquivalente Divisoren auf der Kurve.

Aufgabe 22.15. Es sei D ein effektiver Weildivisor im projektiven Raum $\mathbb{P}^d_K$ mit zumindest einer positiven Komponente. Zeige, dass D mit jeder projektiven Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^d_K$ einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.

Verwende, dass $D_+(f)$ affin ist und dass eine projektive Kurve nicht affin ist.

Insbesondere haben also auf der projektiven Ebene zwei Kurven einen nichtleeren Durchschnitt. Für glatte Kurven kann man auch mit Aufgabe 22.14 argumentieren. Diese Eigenschaft gilt keineswegs für alle projektiven Flächen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Aufgabe 22.16. Zeige, dass es auf der projektiven Fläche
$$V_+(XY - ZW) \subseteq \mathbb{P}^3_K$$
zueinander disjunkte Geraden (als Objekte im projektiven Raum) gibt.

Aufgabe 22.17.*

Zeige, dass es auf der projektiven Fläche
$$V_+(X^3 + Y^3 - Z^3 - W^3) \subseteq \mathbb{P}^3_K$$
vom Grad 3 über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik $\neq 3$ zueinander disjunkte Geraden (als Objekte im projektiven Raum) gibt.

Aufgabe 22.18. Es seien C_1 und C_2 zwei konzentrische Kreise in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(0,0)$. Bestimme die Schnittpunkte der Kreise (aufgefasst als projektive Kurven) in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

23. Vorlesung - Injektive Moduln

23.1. Injektive Moduln.

Definition 23.1. Es sei R ein kommutativer Ring. Ein R-Modul I heißt *injektiv*, wenn es für jeden R-Modul M, jeden Untermodul $N \subseteq M$ und jeden R-Modul-Homomorphismus $\varphi\colon N \to I$ eine Fortsetzung
$$\tilde{\varphi}\colon M \longrightarrow I$$
gibt.

Über einem Körper ist jeder Vektorraum injektiv, da jeder Untervektorraum in einem Vektorraum ein direktes Komplement besitzt, und die lineare Abbildung auf dem Komplement irgendwie fortgesetzt werden kann. Für $R = \mathbb{Z}$ wird die Sache schon komplizierter.

Definition 23.2. Eine kommutative Gruppe G heißt *divisibel*, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ und jedem $g \in G$ ein $h \in G$ mit $g = nh$ gibt.

Die Gruppe $\mathbb{Z}$ selbst ist nicht divisibel, dagegen ist $\mathbb{Q}$ als kommutative Gruppe divisibel, da ja zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ die Multiplikationsabbidung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\, x \longmapsto nx,$$

surjektiv ist (man kann durch n dividieren, daher der Name divisibel).

Lemma 23.3. *Zu einer divisiblen Gruppe D ist auch jede Restklassengruppe D/H divisibel.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Für jedes $d \in D$ gibt es $e \in D$ mit $d = ne$. Dann gilt auch $[d] = n[e]$ in D/H. □

Lemma 23.4. *Zu jeder kommutativen Gruppe G gibt es eine divisible Gruppe D mit $G \subseteq D$.*

Beweis. Wir schreiben $G = \mathbb{Z}^{(J)}/H$ mit einer geeigneten Indexmenge J, die ein Erzeugendensystem von G indiziere. Die freie Gruppe $\mathbb{Z}^{(J)}$ kann man in die divisible Gruppe $\mathbb{Q}^{(J)}$ einbetten. Daher gibt es eine Einbettung

$$G \subseteq \mathbb{Q}^{(J)}/H$$

und letztere ist nach Lemma 23.3 divisibel. □

Ohne Beweis erwähnen wir das folgende Resultat.

Lemma 23.5. *Eine kommutative Gruppe G ist genau dann divisibel, wenn sie injektiv ist.*

Lemma 23.6. *Es sei I ein injektiver Modul über einem kommutativen Ring R. Dann spaltet jede kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

von R-Moduln.

Beweis. Zur Identität $\mathrm{Id}_I \colon I \to I$ gibt es eine Fortsetzung $\varphi \colon B \to I$. Diese vermittelt die Spaltung. □

Lemma 23.7. *Es sei R ein kommutativer Ring, S eine kommutative R-Algebra und I ein injektiver R-Modul. Dann ist auch der S-Modul* $\mathrm{Hom}_R(S, I)$ *injektiv.*

Beweis. Es seien $A \subseteq B$ S-Moduln und

$$\varphi\colon A \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(S,I),\, a \longmapsto \varphi_a,$$

ein S-Modulhomomorphismus. Dies bedeutet explizit, dass $\varphi_a(s) = \varphi_{as}(1)$ gilt. Wir betrachten A und B als R-Moduln und wir betrachten den R-Modulhomomorphismus

$$A \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_R(S,I) \xrightarrow{\theta \mapsto \theta(1)} I\,.$$

Aufgrund der Injektivität von I als R-Modul gibt es eine R-lineare Fortsetzung $\tilde{\varphi}\colon B \to I$ dieser Hintereinanderschaltung. Wir behaupten, dass die Abbildung

$$B \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(S,I),\, b \longmapsto (s \mapsto \tilde{\varphi}(sb)),$$

ein S-Modulhomomorphismus ist. Zunächst ist klar, dass die Abbildung

$$S \xrightarrow{1 \mapsto b} B \xrightarrow{\tilde{\varphi}} I$$

zu $\mathrm{Hom}_R(S,I)$ gehört. Die Gesamtzuordnung ist S-linear aufgrund der S-Modulstruktur von $\mathrm{Hom}_R(S,I)$. Für $a \in A$ gilt $\tilde{\varphi}(sa) = \varphi_{as}(1) = \varphi_a(s)$, so dass in der Tat eine Fortsetzung gegeben ist. □

23.2. **Injektive Auflösungen.**

Korollar 23.8. *Zu einem R-Modul M über einem kommutativen Ring R gibt es einen injektiven Modul I mit $M \subseteq I$.*

Beweis. Für die kommutative Gruppe M gibt es nach Lemma 23.4 eine divisible Gruppe D und eine Einbettung $M \subseteq D$. Nach Lemma 23.5 ist D ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul. Nach Lemma 23.7 ist dann auch der R-Modul $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,D)$ injektiv. Es liegt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,D) \end{array}$$

vor, wobei die vertikalen Abbildungen durch $v \mapsto (r \mapsto rv)$ gegeben sind. Alle Abbildungen sind injektiv. Die linke vertikale Abbildung und die untere horizontale Abbildung sind R-Modulhomomorphismen, daher liegt insgesamt ein R-Untermodul $M \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,D)$ vor. □

Definition 23.9. Eine *injektive Auflösung* eines R-Moduls M über einem kommutativen Ring R ist ein exakter Komplex

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \ldots$$

von R-Moduln, wobei die I_n, $n \geq 0$, injektive Moduln sind.

Lemma 23.10. *Ein R-Modul M über einem kommutativen Ring R besitzt eine injektive Auflösung.*

Beweis. Nach Korollar 23.8 gibt es einen injektiven Modul I_0 mit $M \subseteq I_0$. Für den Restklassenmodul I_0/M gibt es entsprechend einen injektiven Modul I_1 mit $I_0/M \subseteq I_1$, u.s.w. □

Lemma 23.11. *Es seien L und M R-Moduln über einem kommutativen Ring R. Es sei*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow \ldots$$

ein exakter Komplex,

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \ldots$$

eine injektive Auflösung und

$$\varphi \colon L \longrightarrow M$$

ein R-Modulhomomorphismus. Dann gibt es R-Modulhomomorphismen

$$\varphi_n \colon L_n \longrightarrow I_n,$$

die mit den Homomorphismen in den Komplexen kommutieren.

Beweis. Die Existenz der kommutierenden Homomorphismen wird durch Induktion über n bewiesen. Zum Homomorphismus $L \to M \subseteq I_0$ gibt es wegen $L \subseteq L_0$ und der Injektivität von I_0 einen kommutierenden Homomorphismus

$$\varphi_0 \colon L_0 \longrightarrow I_0,$$

dies sichert den Induktionsanfang. Sei nun die Existenz der Homomorphismen bis φ_n bereits bewiesen. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} L_{n-1} & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & L_{n+1} \\ \varphi_{n-1} \downarrow & & \varphi_n \downarrow & & \downarrow \\ I_{n-1} & \longrightarrow & I_n & \longrightarrow & I_{n+1} \end{array},$$

wobei der rechte vertikale Pfeil zu konstruieren ist. Es liegt eine Injektion

$$L_n / \operatorname{bild} L_{n-1} \longrightarrow L_{n+1}$$

vor, und wegen der Kommutativität wird L_{n-1} insgesamt auf 0 nach I_{n+1} hinein abgebildet. Daher liegt ein Homomorphismus

$$L_n / \operatorname{bild} L_{n-1} \longrightarrow I_{n+1}$$

vor und dieser besitzt eine Fortsetzung nach L_{n+1}. □

Im Allgemeinen gibt es in der vorstehenden Situation mehrere Homomomorphismen von Kettenkomplexen. Allerdings sind sie zueinander homotop.

Lemma 23.12. *Es sei M ein R-Modul über einem kommutativen Ring R. Es sei*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow \ldots$$

ein exakter Komplex und es sei

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \ldots$$

ein Komplex, wobei die Moduln I_n injektiv seien. Es seien

$$\varphi, \psi\colon\ L_\bullet \longrightarrow I_\bullet$$

Homomorphismen von Kettenkomplexen. Dann sind φ und ψ homotop.

Beweis. Wir definieren induktiv die Homotopien

$$\Theta_n\colon\ L_{n+1} \longrightarrow I_n$$

und legen

$$\Theta_{-1}\colon\ L_0 \longrightarrow M = I_{-1}$$

als die Nullabbildung fest (M ist aber im Allgemeinen nicht injektiv). Nehmen wir nun an, dass die Homotopien bis einschließlich Θ_{n-1} schon konstruiert seien. Es liegt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} L_{n-1} & \xrightarrow{d_n} & L_n & \xrightarrow{d_{n+1}} & L_{n+1} \\ \downarrow & \Theta_{n-1} \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\ I_{n-1} & \xrightarrow{e_n} & I_n & \xrightarrow{e_{n+1}} & I_{n+1}\ . \end{array}$$

vor, und es gilt

$$\varphi_{n-1} - \psi_{n-1} \ = \ e_{n-1} \circ \Theta_{n-2} + \Theta_{n-1} \circ d_n .$$

Wir betrachten den Homomorphismus $\varphi_n - \psi_n - e_n \circ \Theta_{n-1}$ von L_n nach I_n. Für $x \in L_{n-1}$ gilt dabei

$$\begin{aligned} & (\varphi_n - \psi_n - e_n \circ \Theta_{n-1})(d_n(x)) \\ = \ & (\varphi_n - \psi_n)(d_n(x)) - (e_n \circ \Theta_{n-1})(d_n(x)) \\ = \ & (\varphi_n - \psi_n)(d_n(x)) - e_n(\Theta_{n-1}(d_n(x))) \\ = \ & (\varphi_n - \psi_n)(d_n(x)) - e_n(-e_{n-1}(\Theta_{n-2}(x)) + \varphi_{n-1}(x) - \psi_{n-1}(x)) \\ = \ & \varphi_n(d_n(x)) - \psi_n(d_n(x)) - e_n(\varphi_{n-1}(x)) + e_n(\psi_{n-1}(x)) \\ = \ & \varphi_n(d_n(x)) - e_n(\varphi_{n-1}(x)) - \psi_n(d_n(x)) + e_n(\psi_{n-1}(x)) \\ = \ & 0, \end{aligned}$$

da ja die φ als auch die ψ mit den Ableitungen kommutieren. Dies bedeutet, dass $\varphi_n - \psi_n - e_n \circ \Theta_{n-1}$ das Bild von d_n auf 0 abbildet. Wir haben also einen induzierten Homomorphismus

$$L_n / \operatorname{bild} d_n \longrightarrow I_n .$$

Da der Komplex $L_\bullet$ exakt ist, liegt eine injektive Abbildung

$$L_n / \operatorname{bild} d_n \longrightarrow L_{n+1}$$

vor, und da I_n injektiv ist, ergibt sich eine Fortsetzung

$$-\Theta_n\colon\ L_{n+1} \longrightarrow I_n .$$

Dabei gilt

$$\varphi_n - \psi_n - e_n \circ \Theta_{n-1} \ = \ -\Theta_n \circ d_{n+1} .$$

$\square$

23.3. **Injektive und welke Garben.**

Ein injektiver Modul ist nach Definition durch die Existenz von Homomorphismen in gewissen Situationen gekennzeichnet. Insofern gibt es das entsprechende Konzept (*injektives Objekt*) in jeder Kategorie, in der man von injektiven Homomorphismen sprechen kann. Der übliche Rahmen sind hier die additiven bzw. die abelschen Kategorien, siehe die Anhänge. Die Kategorie der Garben von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum (und die Kategorie der Garben von Moduln auf einem beringten Raum) bildet eine solche abelsche Kategorie, das haben wir im Wesentlichen in den Vorlesungen 5 und 6 bewiesen. Wir zeigen nun, dass man auch in dieser Situation Garben in injektive Garben einbetten kann.

Lemma 23.13. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und es sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann gibt es eine injektive Modulgarbe $\mathcal{I}$ auf X mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{I}$.*

Beweis. Für jede Modulgarbe $\mathcal{M}$ ist

$$\mathcal{M} \longrightarrow \prod_{x \in X} i_* \mathcal{M}_x$$

ein injektiver $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus, wobei (für $x \in X$) $i_* \mathcal{M}_x$ den Vorschub des $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduls $\mathcal{M}_x$ (aufgefasst als Garbe auf $\{x\}$) unter der Einbettung $i \colon \{x\} \to X$ bezeichnet. Nach Korollar 23.8 gibt es zu $\mathcal{M}_x$ einen injektiven $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul I_x auf x. Wir setzen $\mathcal{I} := \prod_{x \in X} i_* I_x$. Somit erhalten wir Inklusionen

$$\mathcal{M} \longrightarrow \prod_{x \in X} i_* \mathcal{M}_x \longrightarrow \prod_{x \in X} i_* I_x$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{I}$ injektiv ist. Seien dazu $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ und ein $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus

$$\varphi \colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}$$

gegeben. Dies entspricht nach Aufgabe 3.18 und wegen Lemma Anhang 4.3 einem Element $(\varphi_x) \in \prod_{x \in X} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{F}, i_* I_x) = \prod_{x \in X} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}} (\mathcal{F}_x, I_x)$. Zu jedem φ_x gibt es eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}_x \colon \mathcal{G}_x \to I_x$ und diese setzen sich zu einer Fortsetzung

$$\tilde{\varphi} \colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{I}$$

zusammen. □

Injektive Garben stehen in einem engen Verhältnis zu welken Garben. Diese sind häufig rechnerisch zugänglicher.

Definition 23.14. Eine Garbe $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum heißt *welk*, wenn für offene Teilmengen $U \subseteq X$ die Einschränkungsabbildungen

$$\mathcal{G}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

surjektiv sind.

Im Fall einer welken Garbe sind dann für beliebige offene Teilmengen $U \subseteq V$ die Einschränkungsabbildungen $\mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}(U)$ surjektiv.

Lemma 23.15. *Es sei X ein topologischer Raum und es sei*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben von abelschen Gruppen. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn $\mathcal{F}$ eine welke Garbe ist, so ist die globale Auswertung*

$$\Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H})$$

surjektiv.

(2) *Wenn $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ welk sind, so ist auch $\mathcal{H}$ welk.*

Beweis. (1) Sei $t \in \Gamma(X, H)$ vorgegeben. Wir verwenden das Lemma von Zorn und betrachten die Menge

$$\mathcal{M} = \{(U, s) \mid U \subseteq X \text{ offen und } s \in \Gamma(U, \mathcal{G}),\ s \mapsto t \text{ auf } U\}.$$

Wir führen auf $\mathcal{M}$ durch $(U, s) \preccurlyeq (U', s')$, falls $U \subseteq U'$ und s' eine Fortsetzung von s ist, eine Ordnung ein. Diese Menge ist aufgrund der Garbeneigenschaft induktiv geordnet. Nach dem Lemma von Zorn gibt es somit ein maximales Element (U, s) in $\mathcal{M}$. Es ist zu zeigen, dass $U = X$ ist. Sei also $U \neq X$ angenommen und sei $x \notin U$. Wegen der Garbensurjektivität $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ gibt es eine offene Umgebung $x \in V$ und einen Schnitt $r \in \Gamma(V, \mathcal{G})$, der auf (die Restriktion auf V) t abbildet. Daher bildet $s|_{U \cap V} - r|_{U \cap V}$ auf 0 ab und gehört somit zu $\Gamma(U \cap V, \mathcal{F})$. Wegen der Welkheit von $\mathcal{F}$ gibt es einen Schnitt

$$z \in \Gamma(X, \mathcal{F}),$$

der auf $s|_{U \cap V} - r|_{U \cap V}$ einschränkt. Wir ersetzen r durch

$$r' = r + z|_V .$$

Dieses Element wird nach wie vor nach $t|_V$ abgebildet und es ist

$$s|_{U \cap V} - r'|_{U \cap V} = z|_V - z|_V = 0.$$

Somit sind s und r' als Schnitte von $\mathcal{G}$ über U bzw. V verträglich und legen einen Schnitt $s' \in \Gamma(U \cup V, \mathcal{F})$ fest, der nach t abbildet. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von U.

(2) Folgt aus (1).

$\square$

Lemma 23.16. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und $\mathcal{I}$ ein injektiver $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist $\mathcal{I}$ welk.*

Beweis. Es sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Wir betrachten die Prägarbe

$$\mathcal{P}(V) := \begin{cases} \mathcal{O}_X(V), \text{ falls } V \subseteq U, \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$$

und nennen die Vergarbung davon $\mathcal{O}_U$. Der natürliche Prägarbenhomomorphismus $\mathcal{P} \to \mathcal{O}_X$ führt nach Lemma 5.2 (4) zu einem Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_U \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$

Dieser ist injektiv. Es ist

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_U, \mathcal{I}) = \Gamma(U, \mathcal{I}).$$

Da $\mathcal{I}$ injektiv ist, lässt sich jedes Element daraus zu einem Element aus

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}) = \Gamma(X, \mathcal{I})$$

fortsetzen. Dies bedeutet, dass die Restriktionsabbildung $\Gamma(X, \mathcal{I}) \to \Gamma(U, \mathcal{I})$ surjektiv ist. □

23. Arbeitsblatt

Aufgabe 23.1. Es sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe einer kommutativen Gruppe G und sei $\varphi\colon H \to \mathbb{Z}$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass es einen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathbb{Q}$ gibt, der φ (als Abbildung nach $\mathbb{Q}$) fortsetzt.

Aufgabe 23.2. Zeige, dass die Gruppe $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ nicht divisibel ist.

Aufgabe 23.3. Zeige, dass die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ divisibel sind. Ist auch $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ divisibel?

Aufgabe 23.4. Zeige, dass die Gruppen $\mathbb{Z}/(n)$ mit $n \in \mathbb{N}_+$ nicht injektiv sind.

Aufgabe 23.5. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass die Einheitengruppe $K^\times$ divisibel ist.

Aufgabe 23.6. Beschreibe für die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/(n)$ eine divisible Gruppe D mit $\mathbb{Z}/(n) \subseteq D$

Aufgabe 23.7. Es sei D eine divisible Gruppe und S eine Menge. Zeige, dass die Gruppe $\operatorname{Abb}(S, D)$ ebenfalls divisibel ist.

Aufgabe 23.8. Es sei D eine divisible Gruppe und S eine kommutative Gruppe. Zeige, dass die Gruppe $\operatorname{Hom}(S, D)$ ebenfalls divisibel ist.

Aufgabe 23.9. Diskutiere Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen injektiven und projektiven Moduln über einem kommutativen Ring R.

Aufgabe 23.10. Man gebe ein Beispiel für einen injektiven R-Modul M über einem kommutativen Ring R derart, dass M als kommutative Gruppe nicht divisibel ist.

Aufgabe 23.11. Man gebe ein Beispiel für einen nicht injektiven R-Modul M über einem kommutativen Ring R derart, dass M als kommutative Gruppe divisibel ist.

Tipp: Betrachte $R = M = \mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 23.12. Es sei R ein injektiver R-Modul über einem kommutativen Ring R und sei $r \in R$ ein Nichtnullteiler. Zeige, dass die Multiplikation $\mu_r \colon I \to I$, $v \mapsto rv$, surjektiv ist.

Aufgabe 23.13. Zeige, dass jede kommutative Gruppe G eine injektive Auflösung der Form

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0$$

besitzt.

Aufgabe 23.14. Es sei $\mathcal{I}_j$, $j \in J$, eine Familie von injektiven Garben von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X. Zeige, dass auch das direkte Produkt $\prod_{j \in J} \mathcal{I}_j$ injektiv ist.

Aufgabe 23.15. Zeige, dass die Garbe der reellwertigen stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ nicht welk ist.

Aufgabe 23.16. Zeige, dass auf einem diskreten topologischen Raum X jede Garbe welk ist.

Aufgabe 23.17. Zeige, dass eine lokal konstante Garbe $\mathcal{G}$ auf einem irreduziblen topologischen Raum welk ist.

Aufgabe 23.18. Zeige, dass eine lokal konstante Garbe $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum nicht welk sein muss.

Aufgabe 23.19. Es sei G eine kommutative Gruppe und X ein topologischer Raum. Zeige, dass die Garbe $U \mapsto \text{Abb}\,(U, G)$ auf X welk ist.

Aufgabe 23.20. Es sei $\mathcal{G}_j$, $j \in J$, eine Familie von welken Garben auf einem topologischen Raum X. Zeige, dass auch das direkte Produkt $\prod_{j \in J} \mathcal{G}_j$ welk ist.

Aufgabe 23.21. Es sei X ein topologischer Raum mit einer Zerlegung $X = Y \uplus Z$ in disjunkte offene nichtleere Teilmengen. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y und $\mathcal{H}$ eine Garbe auf Z. Zeige, dass die durch

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U \cap Y) \times \mathcal{H}(U \cap Z)$$

genau dann welk ist, wenn $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ welk sind.

24. Vorlesung - Rechtsderivierte Funktoren

24.1. **Abelsche Kategorien.**

Das Konzept einer abelschen Kategorie wird abstrakt durch eine Liste von Axiomen beschrieben, die wir in einem Anhang zusammengestellt haben. Für uns sind die folgenden vier Hauptbeispiele wichtig.

- Die Kategorie der kommutativen Gruppen mit den Gruppenhomomorphismen.
- Die Kategorie der R-Moduln über einem kommutativen Ring mit den R-Modulhomomorphismen.
- Die Kategorie der Garben von kommutativen Gruppen über einem topologischen Raum X mit den Garbenhomomorphismen.
- Die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ mit den $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismen.

In diesen Kategorien ist jeweils klar, was kurze exakte Sequenzen bzw. die Exaktheit von Komplexen bedeutet. Ferner kann man in diesen Kategorien jedes Objekt in ein injektives Objekt der Kategorie einbetten und somit auch injektive Auflösungen konstruieren, siehe Korollar 23.8 und Lemma 23.13. Diese Eigenschaft verdient sogar einen eigenen Namen.

Definition 24.1. Man sagt, dass eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ *genügend viele injektive Objekte* enthält, wenn es zu jedem Objekt $M \in \mathcal{A}$ ein injektives Objekt I und einen Monomorphismus $M \to I$ gibt.

24.2. **Linksexakte additive Funktoren.**

Definition 24.2. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Ein kovarianter Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *additiv*, wenn für Objekte $G, H \in \mathcal{A}$ die Abbildungen

$$\mathrm{Mor}\,(G,H) \longrightarrow \mathrm{Mor}\,(F(G),F(H)),\ \varphi \longmapsto F(\varphi),$$

Gruppenhomomorphismen sind.

Definition 24.3. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Ein kovarianter Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *linksexakt*, wenn er additiv ist und wenn für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{A}$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

in $\mathcal{B}$ exakt ist.

Für uns werden zwei Funktoren mit diesen beiden Eigenschaften wichtig sein.

Beispiel 24.4. Es sei R ein kommutativer Ring und A ein fixierter R-Modul. Dann ist die Zuordnung, die jedem R-Modul M den Homomorphismenmodul $\mathrm{Hom}_R\,(A,M)$ zuordnet, linksexakt, siehe Aufgabe 24.1.

Beispiel 24.5. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\mathcal{A}$ die Kategorie der Garben von kommutativen Gruppen auf X, also die Zuordnung $\mathcal{G} \mapsto \Gamma(X,\mathcal{G})$. Es sei

$$\mathcal{B} = \mathrm{ABEL}$$

die Kategorie der abelschen Gruppen und F sei die globale Auswertung auf X. Dann besitzt $\mathcal{A}$ genügend Injektive und F ist ein kovarianter additiver linksexakter Funktor. Die Linksexaktheit beruht auf Lemma 6.8, die Existenz von hinreichend vielen injektiven Garben auf Lemma 23.13.

In den vorstehenden Beispielen sind die Zuordnungen nicht rechtsexakt, siehe Aufgabe 24.2 und Beispiel 6.6. Die Kohomologietheorien, die wir betrachten werden, werden unter anderem diese fehlende Rechtsexaktheit theoretisch erfassen.

24.3. **Abgeleitete Funktoren.**

Definition 24.6. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend viele injektive Objekte. Es sei

$$F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

ein kovarianter additiver linksexakter Funktor. Der n-te *rechtsabgeleitete Funktor*

$$R^nF\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

($n \in \mathbb{N}$) ist folgendermaßen definiert: Für ein Objekt $M \in \mathcal{A}$ nimmt man eine injektive Auflösung $I^\bullet$ von M und setzt

$$R^nF(M) := H^n(F(I^\bullet)),$$

und für einen Homomorphismus $\varphi\colon M \to N$ in $\mathcal{A}$ nimmt man eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}\colon I^\bullet \to J^\bullet$ (wobei $J^\bullet$ eine injektive Auflösung von N ist) und setzt

$$R^nF(\varphi) := (H^n(\tilde{\varphi}) : H^n(F(I^\bullet)) \to H^n(F(J^\bullet)))$$

mit dem induzierten Homomorphismus auf der Homologie im Sinne von Lemma Anhang 8.5.

Satz 24.7. *Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend viele injektive Objekte. Es sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein kovarianter additiver linksexakter Funktor und es bezeichne R^nF die rechtsabgeleiteten Funktoren. Dann gelten folgende Eigenschaften*

(1) *Die R^nF sind wohldefinierte additive Funktoren von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.*
(2) *Es liegt ein natürlicher Isomorphismus $R^0F \cong F$ vor.*
(3) *Zu jeder kurzen exakten Sequenz*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{A}$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es natürliche Verbindungshomomorphismen

$$\delta^n\colon R^nF(C) \longrightarrow R^{n+1}F(A)$$

derart, dass ein exakter Komplex

$$\ldots \longrightarrow R^{n-1}F(C) \xrightarrow{\delta^{n-1}} R^nF(A) \longrightarrow R^nF(B) \longrightarrow R^nF(C) \xrightarrow{\delta^n} R^{n+1}F(A) \longrightarrow R^{n+1}F(B) \longrightarrow \ldots$$

in $\mathcal{B}$ vorliegt.
(4) *Zu einem Homomorphismus von exakten Sequenzen*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^nF(C) & \xrightarrow{\delta^n} & R^{n+1}F(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^nF(C') & \xrightarrow{\delta^n} & R^{n+1}F(A') . \end{array}$$

Beweis. (1) Die Wohldefiniertheit, also die Unabhängigkeit von der gewählten injektiven Auflösung, zeigen wir den Fall, dass $\mathcal{A}$ die Kategorie der R-Moduln ist, der Formulierungsaufwand im allgemeinen Fall ist etwas größer. Es seien

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow \ldots$$

und

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \dots$$

injektive Auflösungen zu einem Modul N. Dann gibt es nach Lemma 23.11 Homomorphismen von Kettenkomplexen

$$\varphi\colon\ L_\bullet \longrightarrow I_\bullet$$

und

$$\psi\colon\ I_\bullet \longrightarrow L_\bullet.$$

Dabei sind die Hintereinanderschaltungen $\psi \circ \varphi$ und $\varphi \circ \psi$ nach Lemma 23.12 homotop zur Identität auf $L_\bullet$ bzw. auf $I_\bullet$. Dies gilt nach Lemma Anhang 8.9 auch für die zugehörigen Homomorphismen auf den Komplexen $F(L_\bullet)$ bzw. $F(I_\bullet)$. D.h. für die induzierten Homomorphismen auf den Homologien gilt, dass die Verknüpfung

$$H_nF(L_\bullet) \xrightarrow{H_n(\varphi)} H_nF(I_\bullet) \xrightarrow{H_n(\psi)} H_nF(L_\bullet)$$

die Identität ist. Somit sind die $H(\varphi)$ kanonische Isomorphismen.

Die Additivität gilt nach Lemma Anhang 8.5 stets in der Homologie.

(2) Es sei $I^\bullet$ eine injektive Auflösung des Objektes M. Die 0-te Homologie des Komplexes

$$0 \longrightarrow F(I^0) \longrightarrow F(I^1) \longrightarrow F(I^2) \longrightarrow \dots$$

ist einfach der Kern des Homomorphismus

$$F(I^0) \longrightarrow F(I^1).$$

Wegen der Linksexaktheit von F ist dieser Kern aber gleich $F(M)$.

(3) Nach Lemma Anhang 9.9 gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & J^0 & \longrightarrow & K^0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & J^1 & \longrightarrow & K^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

mit exakten Zeilen und Spalten. Da die einzelnen Zeilen (bis auf die Ausgangssequenz) spalten, erhält man für jedes $n \geq 0$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F(I^n) \longrightarrow F(J^n) \longrightarrow F(K^n) \longrightarrow 0\,.$$

Es liegt somit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F(I^{n-1}) & \longrightarrow & F(J^{n-1}) & \longrightarrow & F(K^{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F(I^{n}) & \longrightarrow & F(J^{n}) & \longrightarrow & F(K^{n}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F(I^{n+1}) & \longrightarrow & F(J^{n+1}) & \longrightarrow & F(K^{n+1}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen vor. In einer solchen Situation gibt es nach Lemma Anhang 8.6 einen Homomorphismus vom Kern von $F(K^{n-1}) \to F(K^n)$ in den Kern von $F(I^n) \to F(I^{n+1})$ und somit auch nach $R^nF(A)$. Dabei geht das Bild von $F(K^{n-2})$ auf 0 und somit induziert dies einen Homomorphismus

$$R^{n-1}F(C) \longrightarrow R^nF(A).$$

(4) Siehe Aufgabe 24.5.

□

Die Abbildung δ nennt man auch den *verbindenden Homomorphismus*

Satz 24.8. *Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend viele injektive Objekte. Es sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein kovarianter additiver linksexakter Funktor. Dann gilt für jedes injektive Objekt I aus $\mathcal{A}$ und $n \geq 1$ für die rechtsabgeleiteten Funktoren $R^nF(I) = 0$.*

Beweis. Dies ergibt sich unmittelbar, da wir mit der injektiven Auflösung

$$I_0 = I \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

arbeiten können. □

Definition 24.9. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend viele injektive Objekte. Es sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein kovarianter additiver linksexakter Funktor. Ein Objekt Z aus $\mathcal{A}$ heißt *azyklisch* (bezüglich F), wenn für jedes $n \geq 1$ für die rechtsabgeleiteten Funktoren die Beziehung $R^nF(Z) = 0$ gilt.

Nach Satz 24.8 ist ein injektives Objekt azyklisch.

Korollar 24.10. *Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend viele injektive Objekte. Es sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein kovarianter additiver linksexakter Funktor. Es sei A ein Objekt aus $\mathcal{A}$ und es sei*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Z$$

exakt mit einem azyklischen Objekt Z. Dann ist

$$R^1F(A) = F(Z/A)/\operatorname{bild}(F(Z))$$

und

$$R^nF(A) = R^{n-1}F(Z/A)$$

für $n \geq 2$.

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Z \longrightarrow Z/A \longrightarrow 0\,.$$

Die Behauptungen folgen aus der langen exakten Sequenz, da ja die mittleren Terme $R^nF(Z) = 0$ nach Voraussetzung sind. $\square$

Definition 24.11. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Dann nennt man den rechtsabgeleiteten Funktor zum Funktor $N \mapsto \operatorname{Hom}_R(M,N)$ (von der Kategorie der R-Moduln in sich) den *Ext-Funktor*. Er wird mit $\operatorname{Ext}^n(M,N)$ bezeichnet.

Zur Berechnung der Ext-Moduln muss man nach Definition eine injektive Auflösung des hinteren Moduls nehmen, also

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \ldots$$

und dann die Homologie des Komplexes

$$\operatorname{Hom}(M, I_{n-1}) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, I_n) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, I_{n+1})$$

ermitteln.

24. Arbeitsblatt

Aufgabe 24.1. Es sei R ein kommutativer Ring und A ein R-Modul. Es sei

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Zeige, dass

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(A,L) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A,M) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A,N)$$

exakt ist.

Aufgabe 24.2. Es sei R ein kommutativer Ring und A ein R-Modul. Es sei $M \to N$ ein surjektiver R-Modulhomomorphismus. Zeige, dass die induzierte Abbildung

$$\operatorname{Hom}(A,M) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A,N)$$

nicht surjektiv sein muss.

Man denke an $A = N = \mathbb{Z}/(k)$.

Aufgabe 24.3. Es sei R ein kommutativer Ring, P ein projektiver R-Modul und M ein weiterer R-Modul. Zeige $\operatorname{Ext}^n(P,M) = 0$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 24.4. Zeige mit Hilfe der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot k} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(k) \longrightarrow 0\,,$$

dass $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}/(k), \mathbb{Z})$ zu $k \geq 2$ nicht der Nullmodul ist.

Aufgabe 24.5. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend viele injektive Objekte. Es sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein kovarianter additiver linksexakter Funktor und es bezeichne R^nF die rechtsabgeleiteten Funktoren. Zeige, dass zu einem Homomorphismus von exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^nF(C) & \stackrel{\delta^n}{\longrightarrow} & R^{n+1}F(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^nF(C') & \stackrel{\delta^n}{\longrightarrow} & R^{n+1}F(A') \end{array}$$

kommutiert.

25. Vorlesung - Garbenkohomologie

25.1. **Garbenkohomologie.**

Definition 25.1. Zu einer Garbe $\mathcal{G}$ von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X nennt man den rechtsabgeleiteten Funktor zum globalen Auswertungsfunktor $\Gamma(X,-)$ die n-te *Garbenkohomologie* von $\mathcal{G}$ auf X. Sie wird mit

$$H^n(X,\mathcal{G}) := R^n\Gamma(X,\mathcal{G})$$

bezeichnet.

Korollar 25.2. *Es sei X ein topologischer Raum. Dann erfüllt die Garbenkohomologie folgende Eigenschaften.*

(1) *Die $H^n(X,-)$ sind (für jedes $n \in \mathbb{N}$) additive Funktoren von der Kategorie der Garben auf X in die Kategorie der abelschen Gruppen.*
(2) *Es liegt ein natürlicher Isomorphismus $H^0(X,\mathcal{G}) \cong \Gamma(X,\mathcal{G})$ vor.*
(3) *Zu einer kurzen exakten Garbensequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{H}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow$$
$$H^1(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{H}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \dots .$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Satz 24.7. □

Es ist im Allgemeinen schwierig, Kohomologiegruppen zu berechnen. Wir listen einige grundsätzliche Berechnungsmöglichkeiten auf.

(1) Verschwindungssätze: Man zeigt, dass für gewisse Räume, gewisse Garben und gewisse Indizes die Kohomologiegruppen 0 sind. Wenn in der langen exakten Kohomologiesequenz an gewissen Stellen eine 0 steht, so bedeutet dies, dass zuvor eine surjektive Abbildung und danach eine injektive Abbildung steht.
(2) Statt mit injektiven Garben kann man mit anderen azyklischen (beispielsweise welken) Garben arbeiten.
(3) Interpretation von H^1 als klassifizierende Gruppe für gewisse geometrische Objekte (Picardgruppe).
(4) Wenn die Garben Moduln auf einem beringten Raum sind, so besitzen auch die Kohomologiegruppen die Struktur von Moduln über dem globalen Schnittring $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ (siehe Lemma 25.5). Wenn dieser ein Körper ist (was insbesondere für zusammenhängende projektive Varietäten der Fall ist), so sind die Kohomologiegruppen sogar Vektorräume. Im endlichdimensionalen Fall sind die Dimensionen wichtige Invarianten.
(5) Vergleich der Kohomologie auf X mit der Kohomologie auf einer offenen Teilmenge.
(6) Vergleich mit anderen Kohomologietheorien: ?ech-Kohomologie, singuläre Kohomologie, simpliziale Kohomologie.

Lemma 25.3. *Eine welke Garbe $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum X ist azyklisch, d.h. es ist $H^n(X, \mathcal{G}) = 0$ für $n \geq 1$.*

Beweis. Nach Lemma 23.13 gibt es eine Einbettung von $\mathcal{G}$ in eine injektive Garbe $\mathcal{I}$, wir betrachten die zugehörige kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{G} \longrightarrow 0\,.$$

Nach Lemma 23.16 ist $\mathcal{I}$ eine welke Garbe. Dann ist nach Lemma 23.15 (2) auch die Quotientengarbe $\mathcal{I}/\mathcal{G}$ welk. Die lange exakte Kohomologiesequenz ergibt unter Verwendung von Satz 24.8 einerseits

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}/\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

und andererseits

$$0 \longrightarrow H^n(X, \mathcal{I}/\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X, \mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

für $n \geq 1$. Aus dem ersten Ausschnitt folgt wegen der Surjektivität (siehe Lemma 23.15 (1)) von

$$\Gamma(X, \mathcal{I}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}/\mathcal{G}),$$

dass $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$ ist. Dies gilt für alle welke Garben. Daher gilt aufgrund des zweiten Ausschnittes, angewendet für $n = 2$, auch $H^2(X, \mathcal{G}) = 0$, u.s.w. $\square$

Bemerkung 25.4. Es sei G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Wir betrachten die Garbe der stetigen Abbildungen nach G, also $C^0(-,G)$, mit

$$C^0(U,G) = \{f : U \to G \text{ Abbildung} \mid f \text{ stetig}\}.$$

Es gibt eine natürliche Inklusion von Garben

$$C^0(-,G) \subseteq \text{Abb}\,(-,G)$$

und somit eine kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow C^0(-,G) \longrightarrow \text{Abb}\,(-,G) \longrightarrow \text{Abb}\,(-,G)/C^0(-,G) \longrightarrow 0\,.$$

Hierbei ist die Abbildungsgarbe in der Mitte welk, da man ja jede Abbildung auf eine größere Menge fortsetzen kann. Daher ist

$$H^1(X, \text{Abb}\,(-,G)) = 0$$

nach Lemma 25.3 und somit beginnt die lange exakte Kohomologiesequenz mit

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow C^0(X,G) \longrightarrow \text{Abb}\,(X,G) \longrightarrow \Gamma\big(X, \text{Abb}\,(-,G)/C^0(-,G)\big) \\ \longrightarrow H^1(X, C^0(-,G)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Jede erste Kohomologieklasse zu $C^0(-,G)$ wird also durch ein globales Element der Quotientengarbe Abb $(-,G)/C^0(-,G)$ repräsentiert, und zwei solche Repräsentanten definieren genau dann die gleiche Klasse, wenn ihre Differenz von einer Abbildung von X nach G herrührt. Wie bei jeder Quotientengarbe wird gemäß Lemma 5.9 (1) ein globales Element durch eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Schnitte $f_i \in \Gamma(U_i, \text{Abb}\,(-,G))$ (also Abbildungen $f_i \colon U_i \to G$) repräsentiert mit der Eigenschaft, dass die Differenzen $f_i - f_j|_{U_i \cap U_j}$ von der Untergarbe herkommen, also stetige Funktionen auf $U_i \cap U_j$ sind. Ein solches Element rührt nach Lemma 5.9 (2) genau dann von links her (und geht auf die triviale Kohomologieklasse), wenn es eine Funktion $f \colon X \to G$ mit der Eigenschaft gibt, dass die Differenzen $g_i := f_i - f|_{U_i}$ für alle i stetig sind. In diesem Fall ist auf $U_i \cap U_j$

$$g_i - g_j = f_i - f - (f_j - f) = f_i - f_j.$$

Wenn es umgekehrt eine solche Familie von stetigen Funktionen g_i auf U_i gibt, deren Differenzen mit den vorgegebenen Differenzen übereinstimmen, so kann man daraus über

$$f := f_i - g_i$$

auf U_i, da dies eine verträgliche Bedingung ist, eine globale Funktion auf X definieren. Die erste Kohomologiegruppe der Garbe der stetigen Funktionen ist somit genau dann trivial, wenn es zu jeder Familie (U_i, f_i) mit $f_i - f_j$ stetig eine Familie (U_i, g_i) mit stetigen Funktionen g_i und den gleichen Differenzen gibt.

Lemma 25.5. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$Modul. Dann sind die Garbenkohomologien $H^n(X, \mathcal{M})$ in natürlicher Weise $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-Moduln.*

Beweis. Jedes Element $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ definiert einen $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus

$$f\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M},$$

wobei auf jeder offenen Menge $U \subseteq X$ die Restriktion von f auf $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ durch Multiplikation als Skalar wirkt, also

$$\Gamma(U, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{M}),\ s \longmapsto fs.$$

Die Multiplikation mit f ist insbesondere ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Aufgrund der Funktorialität (siehe Korollar 25.2) der Garbenkohomologie induziert dies einen Gruppenhomomorphismus

$$H^n(f)\colon\ H^n(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{M}).$$

Wir müssen zeigen, dass die Zuordnung

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \times H^n(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{M}),\ (f, c) \longmapsto H^n(f)(c),$$

eine Modulstruktur auf $H^n(X, \mathcal{M})$ festlegt. Da ein Gruppenhomomorphismus vorliegt, ist die Additivität im Modul gesichert. Wegen der Funktorialität geht die 1 auf die Identität (zuerst als Garbenhomomorphismus und dann in der Kohomologie) und wegen der Verträglichkeit mit der Verknüpfung ist

$$H^n(fg) \,=\, H^n(f) \circ H^n(g).$$

Für globale Ringelemente f, g ist die Skalarmultiplikation (auf der Ebene der Modulgarben) mit $f + g$ gleich der Summe der Skalarmultiplikationen zu f und zu g. Da die H^n additive Funktoren sind, gilt daher auch

$$H^n(f+g) \,=\, H^n(f) + H^n(g).$$

□

25.2. **Kohomologie auf Schemata.**

Wir betrachten nun die Kohomologie von Garben auf Schemata.

Lemma 25.6. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein integres Schema mit dem Funktionenkörper K, den wir als konstante Garbe $\mathcal{K}$ auf X auffassen. Dann ist*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \,=\, \Gamma(X, \mathcal{K}/\mathcal{O}_X)/\operatorname{bild}(K \to \Gamma(X, \mathcal{K}/\mathcal{O}_X)).$$

Beweis. Da X insbesondere irreduzibel ist, ist die konstante Prägarbe $\mathcal{K}$ zu K eine Garbe. Wegen Lemma 11.16 gibt es einen injektiven Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{K}$$

und somit eine kurze exakte Garbensequenz

$$0 \,\longrightarrow\, \mathcal{O}_X \,\longrightarrow\, \mathcal{K} \,\longrightarrow\, \mathcal{K}/\mathcal{O}_X \,\longrightarrow\, 0\,.$$

Die zugehörige lange exakte Kohomologiesequenz lautet

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}/\mathcal{O}_X) \longrightarrow \\ H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{K}) \longrightarrow \cdots.$$

Als konstante Garbe ist $\mathcal{K}$ welk und somit nach Lemma 25.3 azyklisch und insbesondere gilt

$$H^1(X, \mathcal{K}) = 0.$$

Also ist $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ der Kokern der zuvor stehenden Abbildung. □

Lemma 25.7. *Es sei R ein Integritätsbereich und* Spek $(R) = (X, \mathcal{O}_X)$ *das zugehörige integre affine Schema. Dann ist*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow K \longrightarrow K/R \longrightarrow 0$$

und die zugehörige, nach Lemma 14.9 exakte Sequenz von quasikohärenten Garben

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \widetilde{K} \longrightarrow \widetilde{K/R} \longrightarrow 0$$

Insbesondere gilt

$$\widetilde{K/R} = \widetilde{K}/\mathcal{O}_X$$

und $\widetilde{K}$ ist die konstante Garbe zum Funktionenkörper. Die globale Auswertung dieseer Garbensequenz ergibt die Ausgangssequenz. Aus Lemma 25.6 folgt die Aussage. □

Beispiel 25.8. Wir betrachten die punktierte affine Ebene

$$U = \mathbb{A}^2_K \setminus \{(0,0)\}$$

über einem Körper K und wollen $H^1(U, \mathcal{O}_U)$ mit Hilfe von Lemma 25.7 verstehen. Der Funktionenkörper ist $K(X,Y)$, wir bezeichnen die zugehörige konstante Garbe mit $\mathcal{Q}$. Die lange exakte Kohomologiesequenz beginnt

$$0 \longrightarrow K[X,Y] \longrightarrow K(X,Y) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{Q}/\mathcal{O}_U) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_U) \longrightarrow 0\,.$$

Es ist $U = D(X) \cup D(Y)$. Wir betrachten Schnitte von $\Gamma(U, \mathcal{Q}/\mathcal{O}_U)$ der Form $(D(X), X^\alpha Y^\beta; D(Y), 0)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Der Schnitt wird also auf $D(X)$ durch die rationale Funktion $X^\alpha Y^\beta$ und auf $D(Y)$ durch die rationale Funktion 0 festgelegt. Da die Differenz, also einfach $X^\alpha Y^\beta$, zur Strukturgarbe auf dem Durchschnitt $D(X) \cap D(Y) = D(XY)$ gehört, liegt in der Tat ein Schnitt der Quotientengarbe vor, vergleiche Lemma 5.9. Wir bestimmen, abhängig von α und β, ob dieser Schnitt im Bild liegt, was äquivalent zur Frage ist, ob dieser Schnitt ein triviales Element in der ersten Kohomologie definiert. Dass es von links herkommt bedeutet, dass es eine rationale Funktion $q \in K(X,Y)$ gibt, das mit dem Schnitt übereinstimmt, und das bedeutet wiederum, dass die Differenz auf $D(X)$ bzw. $D(Y)$ von der Strukturgarbe herkommt, es muss also gleichzeitig $q - X^\alpha Y^\beta \in \Gamma(D(X), \mathcal{O}_U)$ und $q - 0 \in \Gamma(D(Y), \mathcal{O}_U)$ sein. Die zweite Bedingung bedeutet

$$q = \frac{h}{Y^n}$$

und die erste Bedingung bedeutet

$$\frac{h}{Y^n} - X^\alpha Y^\beta = \frac{g}{X^m}.$$

Es geht also um die Frage, ob die Gleichung

$$X^\alpha Y^\beta = \frac{h}{Y^n} - \frac{g}{X^m}$$

eine Lösung (mit $g, h \in K[X,Y]$ und $m, n \in \mathbb{N}$ besitzt). Wenn $\alpha \geq 0$ oder $\beta \geq 0$ ist, so ist dies möglich. Wenn hingegen $\alpha, \beta < 0$ sind, so ist dies nicht möglich, da ja die rechte Seite gleich $\frac{hX^m - gY^n}{X^m Y^n}$ ist. Multiplikation mit $X^m Y^n$ zeigt die Unmöglichkeit, da das Ideal (X^m, Y^n) nur Monome enthält, die Vielfache der einzelnen Erzeuger sind.

Beispiel 25.9. Wir knüpfen an Beispiel 16.9 an, d.h. wir betrachten auf dem Polynomring $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $n \geq 2$ und die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Syz}(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow R^n \longrightarrow (X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow 0\,.$$

Die Einschränkung der zugehörigen Garbensequenz auf den punktierten Raum $U = \mathbb{A}_K^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ ist

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} = \widetilde{\operatorname{Syz}(X_1, \ldots}, X_n) \longrightarrow \mathcal{O}_U^n \longrightarrow \mathcal{O}_U \longrightarrow 0\,.$$

Die Auswertung dieser Garbensequenz auf U ergibt

$$0 \longrightarrow \operatorname{Syz}(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow R^n \longrightarrow R \longrightarrow H^1(U, \mathcal{S}) \longrightarrow H^1(U, \mathcal{O}_U^n) \longrightarrow\,.$$

Da das Bild der Abbildung $R^n \to R$ nach wir vor das maximale Ideal, ist diese Abbildung nicht surjektiv und es folgt, dass $H^1(U, \mathcal{S}) \neq 0$ ist.

Lemma 25.10. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein integres Schema mit dem Funktionenkörper K. Es sei $\mathcal{O}_X^\times$ die Garbe der Einheiten auf X und es sei $\mathcal{U}$ die konstante Garbe zu $K^\times$. Dann ist*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) = \Gamma\big(X, \mathcal{U}/\mathcal{O}_X^\times\big)/\operatorname{bild}\big(K^\times \to \Gamma\big(X, \mathcal{U}/\mathcal{O}_X^\times\big)\big).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 25.10. □

Wir erwähnen ohne Beweis die folgenden wichtigen Sätze.

Satz 25.11. *Sei X ein noethersches Schema. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(1) *X ist ein affines Schema.*
(2) *Für jede quasikohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$*
(3) *Für jede kohärente Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf X ist $H^1(X, \mathcal{I}) = 0$.*

Satz 25.12. *Es sei X ein noetherscher topologischer Raum der Dimension d. Dann ist $H^i(X, \mathcal{G}) = 0$ für $i > d$ und jede Garbe $\mathcal{G}$ von kommutativen Gruppen.*

25. Arbeitsblatt

Aufgabe 25.1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und $I = U \cup V$ eine Überdeckung mit (in I) offenen Intervallen. Zeige, dass man eine stetige Funktion

$$f\colon U \cap V \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$f = g|_{U\cap V} - h|_{U\cap V}$$

mit stetigen Funktionen $g\colon U \to \mathbb{R}$ und $g\colon V \to \mathbb{R}$ schreiben kann.

Aufgabe 25.2. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall. Wir betrachten die kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow C^0(-,\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,\mathbb{R})/C^0(-,\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

auf I. Es sei $I = U \cup V$ eine Überdeckung mit (in I) offenen Intervallen und es sei ein globaler Schnitt in der Quotientengarbe $\operatorname{Abb}(-,\mathbb{R})/C^0(-,\mathbb{R})$ gegeben, der durch Schnitte $s \in \operatorname{Abb}(U,\mathbb{R})$ und $t \in \operatorname{Abb}(V,\mathbb{R})$ repräsentiert werde. Zeige, dass dieser Schnitt durch eine Abbildung $r \in \operatorname{Abb}(I,\mathbb{R})$ repräsentiert wird.

Aufgabe 25.3. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles abgeschlossenes Intervall. Wir betrachten die kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow C^0(-,\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,\mathbb{R})/C^0(-,\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

auf I. Zeige, dass

$$\operatorname{Abb}(-,\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,\mathbb{R})/C^0(-,\mathbb{R})$$

surjektiv ist.

Aufgabe 25.4. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles abgeschlossenes Intervall. Zeige

$$H^1(I, C^0(-,\mathbb{R})) = 0.$$

Aufgabe 25.5. Es sei G eine diskrete topologische Gruppe mit zumindest zwei Elementen $a \neq b$. Wir betrachten auf S^1 die exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,G) \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,G)/G \longrightarrow 0\,,$$

wobei hier G die Garbe der lokal konstanten Funktionen mit Werten in G, also $C^0(-,G)$, bezeichnet. Es sei $S^1 = U \cup V$ eine offene Überdeckung des Einheitskreises durch zwei sich überlappende Kreissegmente derart, dass der Durchschnitt $U \cap V$ aus zwei disjunkten Kreissegmenten A und B besteht. Es sei

$$h \in \Gamma\big(S^1, \operatorname{Abb}(-,G)/G\big)$$

ein Schnitt, der auf V durch die Nullabbildung $0 \in \operatorname{Abb}(V, G)$ und auf U durch eine Abbildung $g \in \operatorname{Abb}(U, G)$ repräsentiert werde, die auf A den konstanten Wert a und auf B den konstanten Wert b besitze. Zeige, dass dieser Schnitt nicht durch ein Element aus $\operatorname{Abb}(S^1, G)$ repräsentiert werden kann und dass folglich $H^1(S^1, G) \neq 0$ ist.

Aufgabe 25.6. Zeige unter Verwendung von Beispiel 6.6, dass

$$H^1(\mathbb{C}^\times, \mathbb{Z}) \neq 0$$

ist (hier bezeichnet $\mathbb{Z}$ die Garbe der stetigen Funktionen mit Werten in der diskreten topologischen Gruppe $\mathbb{Z}$).

Aufgabe 25.7. Es sei X ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, dass es einen Punkt $x \in X$ gibt, dessen einzige offene Umgebung der Gesamtraum ist.

(1) Zeige, dass das Spektrum eines lokalen Ringes diese Eigenschaft hat.
(2) Zeige, dass sämtliche Garben von kommutativen Gruppen $\mathcal{G}$ auf X keine nichtriviale Kohomologie besitzen.
(3) Zeige, dass nicht sämtliche Garben auf $\operatorname{Spek}(R)$ zu einem lokalen Ring R welk sind.

Aufgabe 25.8. Es sei R ein Integritätsbereich und I ein Ideal in R mit der zugehörigen quasikohärenten Idealgarbe $\widetilde{I}$ auf $\operatorname{Spek}(R)$. Zeige unter Verwendung von Lemma 25.7, dass

$$H^1(\operatorname{Spek}(R), \widetilde{I}) = 0$$

ist.

Aufgabe 25.9. Sei $R = K[X, Y]$ der Polynomring über einem Körper K mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (X, Y)$. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow R \stackrel{e \mapsto (Y, -X)}{\longrightarrow} R^2 \stackrel{e_1 \mapsto X,\, e_2 \mapsto Y}{\longrightarrow} \mathfrak{m} \longrightarrow 0 .$$

(1) Formuliere die kurze exakte Garbensequenz der zugehörigen quasikohärenten Moduln auf $\mathbb{A}_K^2 = \operatorname{Spek}(R)$.
(2) Zeige, dass die Auswertung der Garbensequenz aus (1) auf $U = D(X, Y) \subset \mathbb{A}_K^2$ nicht exakt ist.
(3) Was ist das Bild unter dem verbindenen Homomorphismus von

$$1 \in R = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U, \widetilde{\mathfrak{m}})$$

in $H^1(U, \mathcal{O}_X)$?

Aufgabe 25.10. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein integres Schema mit dem Funktionenkörper K. Es sei $\mathcal{O}_X^\times$ die Garbe der Einheiten auf X und es sei $\mathcal{U}$ die konstante Garbe zu $K^\times$. Zeige

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) = \Gamma\big(X, \mathcal{U}/\mathcal{O}_X^\times\big) / \operatorname{bild}\big(K^\times \to \Gamma\big(X, \mathcal{U}/\mathcal{O}_X^\times\big)\big).$$

Aufgabe 25.11. Es sei R ein faktorieller Integritätsbereich. Zeige

$$H^1(\operatorname{Spek}(R), \mathcal{O}_X^\times) = \{1\}.$$

Aufgabe 25.12. Wir betrachten den quadratischen Zahlbereich $R = A_{-5} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \cong \mathbb{Z}[T]/(T^2+5)$. Zeige unter Verwendung von Beispiel 14.6, dass

$$H^1(\operatorname{Spek}(R), \mathcal{O}_{\operatorname{Spek}(R)}^\times) \neq \{1\}$$

ist.

Aufgabe 25.13. Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeige, dass durch den Vorschub $\mathcal{G} \mapsto f_*\mathcal{G}$ ein linksexakter kovarianter Funktor von der Kategorie der Garben von kommutativen Gruppen auf X in die Kategorie der Garben von kommutativen Gruppen auf Y gegeben ist.

Bemerkung: Die zugehörigen rechtsderivierten Funktoren nennt man *höhere Bildgarben*.

26. Vorlesung - Čech-Kohomologie

Wir fragen uns, ob es auf einem endlichen topologischen Raum, also einem Raum mit nur endlich vielen Punkten, nichttriviale Kohomomologie geben kann. Wenn der Raum diskret ist, also jeder Punkt offen und abgeschlossen ist, so kann es das nicht geben, da dann jede Garbe welk ist. Auch auf dem Spektrum eines diskreten Bewertungsringes (generell auf einem lokalen Raum, wie dem Spektrum eines lokalen Ringes) kann es keine nichttriviale Kohomologie geben. Aber schon in einem dreielementigen Raum tritt Kohomologie auf, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 26.1. Wir betrachten den topologischen Raum $X = \{a, b, c\}$ mit den offenen Mengen $\emptyset, X, U = \{a, c\}, V = \{b, c\}, U \cap V = \{c\}$. Dieser Raum besitzt die beiden abgeschlossenen Punkte a und b, er ist irreduzibel und c ist der generische Punkt. Abgesehen von der leeren Menge bilden die offenen Mengen das Inklusionsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & U \\ \uparrow & & \uparrow \\ V & \longleftarrow & U \cap V\,. \end{array}$$

Eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X ist gegeben, wenn man diesen Teilmengen Gruppen und Restriktionshomomorphismen zuweist (und die Verträglichkeitsbedingung überprüft). Wir betrachten die Garbe $\mathcal{F}$, die durch

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

gegeben ist. Diese kann man in die konstante Garbe $\mathcal{F}$ (mit Identitäten)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

einbetten. Die Quotientengarbe $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ ist durch

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{Z} \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

gegeben. Die Werte für $U \cap V, U, V$ ergeben sich direkt durch Restklassenbildung, die Vergarbung hat keinen Effekt, und für X ergibt sich das Produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, da die Schnitte über U und V automatisch verträglich sind. Somit ist die globale Abbildung

$$\Gamma(X, \mathcal{G}) = \mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

nicht surjektiv, die lange exakte Kohomologiesequenz ist vielmehr

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}) = \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,.$$

Hierbei geht vorne $n \mapsto (n, n)$ und hinten $(r, s) \mapsto (r - s)$ (das folgt aus der Exaktheit).

Eine wichtige Frage ist umgekeht, ob man die Kohomologie eines komplizierten topologischen Raumes durch endliche Daten erfassen und berechnen kann. In der Tat ist dies in vielen Situationen über die ?ech-Kohomologie möglich, die Bezug nimmt auf eine endliche offene Überdeckung einschließlich der zugehörigen Durchschnitte.

Beispiel 26.2. Wir knüpfen an Bemerkung 20.2 an, es sei also $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und wir interessieren uns für die invertierbaren Garben auf X, und zwar für solche, die bezüglich einer fixierten offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ Trivialisierungen besitzen. Diese invertierbaren Garben entsprechen den Datensätzen

$$\left(U_i,\, r_{ij} \in \Gamma\big(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times\big) \text{ mit } r_{kj} \cdot r_{ki}^{-1} \cdot r_{ji} = 1 \text{ in } \Gamma\big(U_i \cap U_j \cap U_k, \mathcal{O}_X^\times\big)\right),$$

wobei allerdings ein solcher Datensatz als trivial anzusehen ist, wenn es Elemente $s_i \in \Gamma\big(U_i, \mathcal{O}_X^\times\big)$ mit $s_i \cdot s_j^{-1} = r_{ij}$ für alle i, j gibt. Diese Situation kann man insgesamt durch den Komplex

$$\prod_{i \in I} \Gamma\big(U_i, \mathcal{O}_X^\times\big) \longrightarrow \prod_{i<j} \Gamma\big(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times\big) \longrightarrow \prod_{i<j<k} \Gamma\big(U_i \cap U_j \cap U_k, \mathcal{O}_X^\times\big)$$

ausdrücken, wozu man auf I eine totale Ordnung einführt und die vordere Abbildung durch

$$(s_i) \longmapsto (s_j s_i^{-1})_{i<j}$$

und die hintere Abbildung durch

$$(r_{ij}) \longmapsto (r_{jk} r_{ik}^{-1} r_{ij})$$

gegeben ist. Ein Element in der Mitte gehört genau dann zum Kern der hinteren Abbildung, wenn es die Kozykelbedingung erfüllt, und es gehört genau dann zum Bild der vorderen Abbildung, wenn es die triviale invertierbare Garbe repräsentiert.

26.1. **?ech-Kohomologie.**

Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X. Für eine Teilmenge $J \subseteq I$ setzen wir $U_J := \bigcap_{i \in J} U_i$. Für $J \subseteq L \subseteq I$ ist $U_L \subseteq U_J$. Für eine Garbe $\mathcal{G}$ von kommutativen Gruppen auf X betrachtet man die Auswertungen $\mathcal{G}(U_J)$ zu den verschiedenen J, und zu $J \subseteq L$ gehören die Restriktionen $\mathcal{G}(U_J) \to \mathcal{G}(U_L)$. Für ein Element $s \in \mathcal{G}(U_J)$ schreiben wir dann abkürzend

$$s|_L = s|_{U_L}$$

und oft häufig einfach s. Wir fixieren eine Wohlordnung auf I (man braucht hauptsächlich den Fall für endliches I). Damit können wir nun den ?ech-Komplex und die ?ech-Kohomologie definieren, die ein wichtiges Werkzeug zur Berechnung von Garbenkohomologien ist.

Definition 26.3. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X und $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X. Zu $k \in \mathbb{N}$ setzt man

$$\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \prod_{\{J \mid \#(J) = k+1\}} \mathcal{G}(U_J)$$

und definiert Gruppenhomomorphismen

$$\delta_k \colon \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}),\ s = (s_J)_J \longmapsto \delta_k(s) = (\delta_k(s)_L)_L,$$

durch

$$(\delta_k(s))_L = \sum_{\ell=0}^{k+1} (-1)^\ell s|_{L \setminus \{i_\ell\}},$$

wobei man $L = \{i_0, i_1, \ldots, i_{k+1}\}$ gemäß der Ordnung auf I schreibt. Der Komplex

$$\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \left(\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}), k \geq 0,\ \delta_k\right)$$

heißt *?ech-Komplex* (zur Garbe $\mathcal{G}$ und zur Überdeckung).

Bei $k = 0$ ist

$$\check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \prod_{i \in I} \mathcal{G}(U_i)$$

und bei $k = \#(I)$ ist

$$\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \mathcal{G}\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right).$$

Wenn $k > \#(I)$ ist, so ist die Indexmenge zu $\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ leer und dieser Term ist einfach 0. Ebenso setzt man für negatives k den Komplex gleich 0. Bei einer Überdeckung aus zwei offenen Mengen U und V ist der Komplex gleich

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}) \times \Gamma(V, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

und bei einer Überdeckung aus drei offenen Mengen U, V und W ist der Komplex gleich

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}) \times \Gamma(V, \mathcal{G}) \times \Gamma(W, \mathcal{G}) \longrightarrow & \\ \Gamma(V \cap W, \mathcal{G}) \times \Gamma(U \cap W, \mathcal{G}) \times \Gamma(U \cap V, \mathcal{G}) \longrightarrow & \\ \Gamma(U \cap V \cap W, \mathcal{G}) \longrightarrow 0. & \end{aligned}$$

Zum Verständnis der Homomorphismen ist es schon in diesen Fällen sinnvoll, mit den durchnummerierten Bezeichnungen U_1, U_2, U_3 zu arbeiten.

Lemma 26.4. *Der Čech-Komplex ist in der Tat ein Komplex.*

Beweis. Es sei $(s_J)_J \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ ein Tupel. Dann ist für die fixierte Indexmenge $L = \{i_0, i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, i_{k+2}\}$

$$\begin{aligned} (\delta(\delta s))_L &= \sum_{p=0}^{k+2} (-1)^p (\delta s)|_{L \setminus \{i_p\}} \\ &= \sum_{p=0}^{k+2} (-1)^p \left(\sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q s|_{(L \setminus \{i_p\}) \setminus \{i_q\}} + \sum_{q=p+1}^{k+1} (-1)^{q+1} s|_{(L \setminus \{i_p\}) \setminus \{i_q\}} \right) \\ &= \sum_{\{i_p, i_q\} \subseteq J} (-1)^{p+q} \big(s|_{L \setminus \{i_p, i_q\}} - s|_{L \setminus \{i_p, i_q\}} \big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Man beachte, dass das Vorzeichen in der Klammer von der Position von i_q in $L \setminus \{i_p\}$ abhängt. □

Definition 26.5. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X und $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X. Zu $k \in \mathbb{N}$ definiert man die k-te *Čech-Kohomologie* $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ als die k-te Homologie des Čech-Komplexes $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

Wie bei jeder Homologie zu einem Komplex geht es also um die Restklassengruppe aus dem Kern modulo dem Bild an einer jeden Stelle des Komplexes. Die Elemente des k-ten Kernes nennt man auch *Čech-Kozykel*, die Elemente des k-ten Bildes auch *Čech-Koränder*. Das zu einem Čech-Kozykel gehörige

Element in der k-ten Čech-Kohomologie nennt man auch *Čech-Kohomologieklasse*. Die nullte Čech-Kohomologiegruppe ist einfach gleich $\mathcal{G}(X)$, wie direkt aus der Garbeneigenschaft folgt, siehe Aufgabe 26.2.

Beispiel 26.6. Wir betrachten auf dem Kreis die Überdeckung mit zwei offenen (zu reellen Intervallen homöomorphen) Kreissegmenten

$$S^1 = U \cup V,$$

deren Durchschnitt

$$U \cap V = S \cup T$$

die Vereinigung von zwei Intervallen ist. Wir betrachten verschiedene Garben von kommutativen Gruppen, die wir multiplikativ schreiben. Es sei h die auf $U \cap V$ definierte Funktion, die durch den konstanten Wert 1 auf S und den Wert -1 auf T gegeben ist. Dies ist ein nichttrivialer Čech-Kozykel für die Garbe der lokal konstanten Funktionen mit Werten in der Einheitengruppe $K^\times$ zu einem Körper K und ebenso in der Garbe der stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}^\times$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist. Ob dieser Kozykel eine nichttriviale Čech-Kohomologieklasse in $\check{H}^1(\{U,V\},\mathcal{G})$ definiert ist äquivalent dazu, ob es (lokal konstante, stetige) Funktionen $f\colon U \to K^\times$und $g\colon V \to K^\times$ mit $h = fg^{-1}$ gibt. Im lokal konstanten Fall ist dies nicht möglich, da lokal konstante Funktionen auf den zusammenhängenden Segmenten U bzw. V konstant sind und daher auch fg^{-1} konstant ist, also $\neq h$. Bei der Garbe der stetigen reellwertigen nullstellenfreien Funktionen ist es ebenfalls nicht möglich. In diesem Fall haben f und g konstantes Vorzeichen und somit stimmt fg^{-1} nur auf genau einem Intervall des Durchschnittes mit h überein. Die zugehörige nichttriviale erste Čech-Kohomologieklasse

$$[h] \in \check{H}^1(\{U,V\}, C^0(-,\mathbb{R}^\times))$$

repräsentiert das Möbiusband über dem Einheitskreis. Im komplexen Fall ist es hingegen möglich, h als einen Quotienten von zwei nullstellenfreien komplexwertigen stetigen Funktionen zu schreiben, man kann $g = 1$ und für f eine Funktion nehmen, die auf S die konstante 1-Funktion und auf T die konstante -1-Funktion und dazwischen, also auf $U \setminus \{S \cup T\}$, die Werte stetig entlang des komplexen Einheitskreises wählt.

Beispiel 26.7. Für einen kommutativen Ring und Elemente $f_1,\ldots,f_n \in R$, die das Ideal $\mathfrak{a}$ erzeugen, hat man eine offene Überdeckung $D(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$ des quasiaffinen Schemas $D(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$. Zu einem R-Modul M kann man den Čech-Komplex zur Modulgarbe $\widetilde{M}$ auf $D(\mathfrak{a})$ direkt hinschreiben, ohne dass man den Vergarbungsprozess beachten muss. Für die relevanten offenen Mengen ist ja

$$\Gamma\left(D(\prod_{i \in J} f_i), \widetilde{M})\right) = M_{\prod_{i \in J} f_i}$$

wegen Lemma 14.5. Der Čech-Komplex ist somit gleich

$$0 \longrightarrow \prod_{1 \leq i \leq n} M_{f_i} \longrightarrow \prod_{1 \leq i < j \leq n} M_{f_i f_j} \longrightarrow \prod_{1 \leq i < j < k \leq n} M_{f_i f_j f_k} \longrightarrow \ldots .$$

Die Berechnung der Homologien dieses Komplexes ist im Allgemeinen immer noch schwierig, aber allein ein Problem der kommutativen Algebra.

26.2. Čech-Kohomologie und Garbenkohomologie.

Wir besprechen nun Situationen, in denen die Čech-Kohomologie für gewisse Überdeckungen mit der „richtigen“ über injektive Auflösungen definierten Garbenkohomologie übereinstimmt.

Lemma 26.8. *Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X und es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung mit $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ und $H^1(U_i \cap U_j, \mathcal{F}) = 0$ für alle i, j. Dann ist*

$$\check{H}^1(U_i, \mathcal{F}) = H^1(X, \mathcal{F}).$$

Beweis. Es sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ eine Einbettung in eine injektive Garbe und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

die zugehörige kurze exakte Garbensequenz. Aufgrund der langen exakten Kohomologiesequenz (siehe Korollar 25.2 (3)) und wegen Satz 24.8 ist

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{H}) / \operatorname{bild}(\Gamma(X, \mathcal{I}) \to \Gamma(X, \mathcal{H})).$$

Wir definieren zuerst einen Homomorphismus

$$\Gamma(X, \mathcal{H}) \longrightarrow \check{H}^1(U_i, \mathcal{F}).$$

Ein Schnitt $t \in \Gamma(X, \mathcal{H})$ legt Restriktionen $t_i = t|_{U_i}$ fest. Da $\mathcal{F}$ auf den U_i keine Kohomologie besitzt, gibt es

$$s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{I}),$$

die auf die t_i abbilden. Die Elemente (zu $i < j$)

$$r_{ij} := s_i - s_j$$

werden auf 0 in $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{H})$ abgebildet, daher ist

$$r_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F}).$$

Für Indizes $i < j < k$ ist

$$r_{ij} - r_{ik} + r_{jk} = s_i - s_j - (s_i - s_k) + s_j - s_k = 0,$$

deshalb ist die Kozykelbedingung erfüllt. Somit ist die Familie $(r_{ij})_{i<j}$ ein Čech-Kozykel und definiert ein Element in $\check{H}^1(U_i, \mathcal{F})$. Diese Zuordnung ist unabhängig von den gewählten s_i und ein Gruppenhomomorphismus, siehe Aufgabe 26.5. Sei nun $t \in \Gamma(X, \mathcal{H})$ das Bild eines globalen Elementes $s \in \Gamma(X, \mathcal{I})$. Dann kann man die s_i als $s|_{U_i}$ ansetzen und daher sind die zu t konstruierten r_{ij} alle gleich 0. Ein solches Element t wird also unter der

angegebenen Abbildung auf 0 abgebildet. Dies ergibt nach Satz 47.1 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) eine Faktorisierung

$$H^1(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{H})/\operatorname{bild}(\Gamma(X,\mathcal{I}) \to \Gamma(X,\mathcal{I})) \longrightarrow \check{H}^1(U_i,\mathcal{F}).$$

Sei nun umgekehrt ein erster Čech-Kozykel von $\mathcal{F}$ gegeben, sagen wir

$$(r_{ij})_{i<j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})$$

mit $r_{ij}-r_{ik}+r_{jk} = 0$ repräsentiert sei. Wir fassen die r_{ij} in $\mathcal{I}$ auf, und zwar als globale Elemente, was aufgrund der Welkheit von injektiven Garben möglich ist. Wir definieren

$$s_i := r_{i1}$$

(mit $s_1 = 0$) und fassen diese als Elemente in $\Gamma(U_i,\mathcal{I})$ auf. Diese Schnitte erfüllen $s_i - s_j = r_{i1} - r_{j1} = r_{ij}$. Diese Elemente s_i definieren Elemente

$$t_i \in \Gamma(U_i,\mathcal{H}).$$

Da ihre Differenzen von $\mathcal{F}$ herrühren, sind sie verträglich und definieren ein globales Element

$$t \in \Gamma(X,\mathcal{H}).$$

Dies definiert über den verbindenden Homomorphismus δ die Kohomologieklasse

$$\delta(t) \in H^1(X,\mathcal{F}).$$

Wenn der Čech-Kozykel r_{ij} durch andere Elemente $s'_i \in \Gamma(X,\mathcal{I})$ repräsentiert werden, so sind die Elemente $s_i - s'_i$, $i \in I$, wegen

$$(s_i - s'_i) - (s_j - s'_j) = s_i - s_j - (s'_i - s'_j) = r_{ij} - r_{ij} = 0$$

verträglich und definieren ein globales Element in $\Gamma(X,\mathcal{I})$. Daher geht die Differenz der beiden Repräsentierungen in $H^1(X,\mathcal{F})$ auf 0. Insgesamt liegt daher eine wohldefinierte Abbildung

$$\check{C} - \text{Kozykel}^1(U_i,\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{H})/\operatorname{bild}(\Gamma(X,\mathcal{I}) \to \Gamma(X,\mathcal{H}))$$

vor. Es sei nun der Čech-Kozykel so, dass er die Nullklasse in der ersten Čech-Kohomologie definiert. Dann gibt es nach Definition Elemente $r_i \in \Gamma(U_i,\mathcal{F})$ mit

$$r_i - r_j = r_{ij}.$$

Wir fassen diese Elemente wieder als globale Elemente in $\mathcal{I}$ auf und die r_i können direkt die Rolle der s_i von oben übernehmen. Dann sind die t_i alle gleich 0 und damit ist das Bild in $H^1(X,\mathcal{F})$ ebenfalls gleich 0. Somit hat man eine Abbildung

$$\check{H}^1(U_i,\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F}).$$

Diese ist ein Gruppenhomomorphismus und invers zu der zuvor konstruierten Abbildung. □

Lemma 26.9. *Es sei $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X und es sei eine azyklische Auflösung $\mathcal{Z}^\bullet$ von $\mathcal{F}$ mit zugehörigen kurzen exakten Sequenzen*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{Z}_n \longrightarrow \mathcal{F}_{n+1} \longrightarrow 0$$

gegeben. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung mit $H^k(\bigcap_{i \in J} U_i, \mathcal{F}_n) = 0$ für alle nichtleeren Teilmengen $J \subseteq I$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Dann ist

$$\check{H}^k(U_i, \mathcal{F}) = H^k(X, \mathcal{F}).$$

Beweis. Wir führen Induktion über k (für alle n gleichzeitig), der Fall $k = 1$ wurde in Lemma 26.8 behandelt, die Argumentation orientiert sich an diesem Satz. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{Z}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 = \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

und die Isomorphismen

$$H^k(X, \mathcal{F}) = H^{k-1}(X, \mathcal{H}) = \check{H}^{k-1}(U_i, \mathcal{H}),$$

wobei der linke Isomorphismus durch den verbindenden Homomorphismus und die Azyklizität von $\mathcal{Z}_0$ und der rechte Isomorphismus auf der Induktionsvoraussetzung, angewendet auf $\mathcal{H}$, beruht. Wir müssen also noch zeigen, dass es einen Isomorphismus

$$\check{H}^{k-1}(U_i, \mathcal{H}) = \check{H}^k(U_i, \mathcal{F})$$

gibt. Eine Klasse links wird durch ein Tupel

$$(t_J) \in \prod_{\#(J)=k} \Gamma(U_J, \mathcal{H})$$

mit der Bedingung

$$\sum_{\ell=0}^{k+1} (-1)^i t_{L \setminus \{i_\ell\}} = 0$$

für alle $k+1$-elementigen Teilmengen $L \subseteq I$ repräsentiert. Wegen der Azyklizität der Überdeckung für $\mathcal{F}$ gibt es ein Tupel

$$(s_J) \in \prod_{\#(J)=n} \Gamma(U_J, \mathcal{Z}),$$

das auf (t_J) abbildet. Dieses definiert wiederum ein Differenzentupel (r_L), wobei L die $k+1$-elementigen Teilmengen von I durchläuft, durch

$$r_L := \sum_{\ell=0}^{k+1} (-1)^\ell s_{L \setminus \{i_\ell\}}.$$

Da s_J auf t_J abgebildet wird, werden die r_L wegen der obigen Bedingung auf 0 abgebildet und daher ist

$$(r_L)_L \in \prod_{\#(L)=k+1} \Gamma(U_L, \mathcal{F}).$$

Weitere Überlegungen zeigen, dass es sich um Kozykel handelt, dass die Abbildung wohldefiniert und ein bijektiver Gruppenhomomorphismus ist. □

Satz 26.10. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein projektives Schema über einem kommutativen Ring R und sei $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter Modul auf X. Dann stimmt die Garbenkohomologie von $\mathcal{F}$ mit der Čech-Kohomologie zur affinen Überdeckung durch die $D_+(X_i)$ überein.*

Beweis. Es seien $X_0, X_1, \ldots, X_n$ die Variablen des homogenen Koordinatenringes zum projektiven Schema X, also $X = \operatorname{Proj}(R[X_0, X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a})$ Sämtliche Durchschnitte

$$\bigcap_{i \in J} D_+(X_i) = D_+(\prod_{i \in J} X_i)$$

sind affin nach Lemma 12.9. Zu $\mathcal{F}$ gibt es eine welke quasikohärente Garbe $\mathcal{Z}$ mit zugehöriger kurzer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0\,.$$

Hierbei ist der Quotient nach Aufgabe 14.21 wieder quasikohärent. Nach Satz 25.11 besitzen quasikohärente Garben auf affinen Schemata keine Kohomologie. Daher können wir Lemma 26.9 anwenden. □

Die entsprechende Aussage gilt für quasiaffine Schemata. Entscheidend ist die Eigenschaft, dass der Durchschnitt von affinen Teilmengen wieder affin ist. Das gilt oft, aber nicht für jedes Schema.

26. Arbeitsblatt

Aufgabe 26.1. Definiere eine Garbe auf $\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$ mit nichttrivaler erster Kohomologie.

Aufgabe 26.2. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X und sei $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X. Zeige

$$\check{H}^0(U_i, i \in I, \mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{G}).$$

Aufgabe 26.3. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X und sei $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X. Es sei $s \in \check{C}^k(U_i, \mathcal{G})$ ein ?ech-Kozykel, der für ein bestimmtes $J = \{i_0, i_1, \ldots, i_k\} \subseteq I$ den Wert $a \in \Gamma(U_J, \mathcal{G})$ und für alle anderen $(k+1)$-elementigen Teilmengen $J' \neq J$ den Wert 0 besitzt. Bestimme $\delta(s) \in \check{C}^{k+1}(U_i, \mathcal{G})$.

Aufgabe 26.4. Es sei K ein Körper und $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$ die projektive Gerade über K. Bestimme die erste Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(D_+(X), D_+(Y), \mathcal{O}^\times_{\mathbb{P}^1_K}).$$

Welche Beziehung besteht zu Beispiel 26.1?

Aufgabe 26.5. Zeige, dass die Zuordnung aus dem Beweis zu Lemma 26.8, die einem Schnitt $t \in \Gamma(X, \mathcal{H})$ eine Čech-Kohomologieklasse zu $\mathcal{F}$ zuordnet, unabhängig von den gewählten lokalen Repräsentanten in $\mathcal{I}$ und ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 26.6. Es sei X ein irreduzibler topologischer Raum und sei $\mathcal{G}$ die konstante Garbe zur kommutativen Gruppe G. Bestimme den Čech-Komplex und die Čech-Kohomologien zu $\mathcal{G}$ zu einer endlichen offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Aufgabe 26.7. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Zeige, dass der Čech-Komplex zu $\mathcal{F}$ zur gegebenen Überdeckung ein Komplex von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-Moduln ist und dass folglich die Čech-Kohomologien ebenfalls $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-Moduln sind.

Aufgabe 26.8. Es sei R ein kommutativer Ring, $X = \operatorname{Spek}(R) = D(f) \cup D(g)$ mit $f, g \in R$. Zeige

$$\check{H}^1(\{D(f), D(g)\}, \mathcal{O}_X) = 0.$$

27. Vorlesung - Kohomologie auf projektiven Schemata

27.1. Čech-Kohomologie auf dem Polynomring.

Es sei R ein kommutativer Ring und

$$A = R[X_1, \ldots, X_n]$$

der Polynomring über R in n Variablen. Man denke insbesondere an den Fall, wo R ein Körper ist. Wir betrachten die offene Menge

$$U = \mathbb{A}^n_R \setminus V(X_1, \ldots, X_n) = D(X_1, \ldots, X_n) = \bigcup_{i=1}^n D(X_i),$$

wobei wir mit der angegebenen affinen Überdeckung mit den $D(X_i) = \operatorname{Spek}(A_{X_i})$ arbeiten werden. Der Čech-Komplex zu einem A-Modul M auf U zu dieser Überdeckung hat somit die Gestalt

$$\prod_{1 \leq i \leq n} M_{X_i} \longrightarrow \prod_{1 \leq i < j \leq n} M_{X_i X_j} \longrightarrow \prod_{1 \leq i < j < k \leq n} M_{X_i X_j X_k} \longrightarrow \cdots$$
$$\longrightarrow M_{X_1 \cdots X_n} \longrightarrow 0.$$

Es ist also

$$\check{C}^p(D(X_i), \widetilde{M}) = \prod_{1 \leq i_0 < i_1 < \cdots i_p \leq n} M_{X_{i_0} \cdots X_{i_p}}$$

und die p-te Čech-Kohomologie ist die Homologie des oben ausgeschriebenen Komplexes. Komponentenweise sind die Abbildungen dabei einfach die kanonischen Abbildungen in die Nenneraufnahmen (es wird jeweils eine zusätzliche Variable als Nenner aufgenommen), allerdings werden diese noch mit einem Vorzeichen versehen, wie das in der Definition des Čech-Komplex festgelegt wurde. Wir beschreiben diese Komplexe für die Strukturgarbe (also) $M = A$ genauer, wobei es hilfreich ist, die Komplexe durch die feine Monomgraduierung, wo mit der Gruppe $\mathbb{Z}^n$ graduiert wird, in einfachere Komplexe aufzuspalten. Wir betrachten zuerst die kleinen Dimensionen.

Beispiel 27.1. Sei $A = R[X, Y]$. Der Čechkomplex zur Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_R}$ auf $U = D(X) \cup D(Y) \subset \mathbb{A}^2_R$ ist

$$0 \longrightarrow A_X \times A_Y \longrightarrow A_{XY} \longrightarrow 0\,.$$

Dieser Komplex ist mit der feinen Monomgraduierung verträglich. Die Komponente zu $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ hängt im Wesentlichen davon ab, ob die Exponenten positiv oder negativ sind. Wenn α und β beide nichtnegativ sind, so steht hier insgesamt

$$(A_X \times A_Y)_{(\alpha,\beta)} = R \cdot X^\alpha Y^\beta \oplus R \cdot X^\alpha Y^\beta \longrightarrow R \cdot X^\alpha Y^\beta \longrightarrow 0$$

und der Komplex ist hinten exakt und der Kern vorne ist isomorph zu $R \cdot X^\alpha Y^\beta$. Wenn α negativ und β nichtnegativ ist (entsprechend umgekehrt), so steht hier insgesamt

$$(A_X \times A_Y)_{(\alpha,\beta)} = R \cdot X^\alpha Y^\beta \oplus 0 \longrightarrow R \cdot X^\alpha Y^\beta \longrightarrow 0$$

und der Komplex ist exakt. Wenn α und β beide negativ sind, so steht hier insgesamt

$$(A_X \times A_Y)_{(\alpha,\beta)} = 0 \oplus 0 \longrightarrow R \cdot X^\alpha Y^\beta \longrightarrow 0$$

und die hintere Homologie ist $R \cdot X^\alpha Y^\beta$. Insgesamt ist daher

$$\check{H}^0(D(X), D(Y), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_R}) = \bigoplus_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2} R \cdot X^\alpha Y^\beta = A$$

und $\check{H}^1(D(X), D(Y), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_R}) = \bigoplus_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2_-} R \cdot X^\alpha Y^\beta$.

Beispiel 27.2. Sei $A = R[X,Y,Z]$. Der Čechkomplex zur Strukturgarbe ist

$$0 \longrightarrow A_X \times A_Y \times A_Z \longrightarrow A_{XY} \times A_{XZ} \times A_{YZ} \longrightarrow A_{XYZ} \longrightarrow 0\,.$$

Dieser Komplex ist mit der feinen Monomgraduierung verträglich. Es ist $\check{H}^0$ gleich A, $\check{H}^1$ ist 0 (siehe Satz 27.3) und $\check{H}^2$ ist der freie R-Modul mit der Basis $X^iY^jZ^k$, $(i,j,k) \in \mathbb{Z}^3_-$.

Satz 27.3. *Es sei R ein kommutativer Ring und $A = R[X_1,\ldots,X_n]$ der Polynomring über R in $n \geq 2$ Variablen. Dann ist die Čech-Kohomologie zur Strukturgarbe und zur Überdeckung $D(X_i)$, $i = 1,\ldots,n$, der offenen Menge $U = D(X_1,\ldots,X_n)$ gleich*

$$\check{H}^p(D(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_R}) = \begin{cases} A \text{ für } p = 0, \\ 0 \text{ für } 1 \leq p \leq n-2, \\ \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_-} R \cdot X^\alpha \text{ für } p = n-1\,. \end{cases}$$

Beweis. Wir betrachten den Čechkomplex mit der feinen durch die Monome gegebenen $\mathbb{Z}^n$-Graduierung. Zu einem fixierten Tupel

$$\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$$

sei $N = N_\alpha \subseteq \{1,\ldots,n\}$ die Menge der Indizes mit negativem Eintrag. Zu diesem α ist

$$\begin{aligned} \left(\check{C}^p(D(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})\right)_\alpha &= \left(\prod_{1 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_p \leq n} A_{X_{i_0}X_{i_1}\cdots X_{i_p}} \right)_\alpha \\ &= \prod_{N \subseteq L,\, \#(L) = p+1} R \cdot e_L \\ &\cong \prod_{J \subseteq \{1,\ldots,n\} \setminus N,\, \#(J) = p+1-\#(N)} R \cdot e_J. \end{aligned}$$

Die Identifikation in der Mitte beruht darauf, dass die Komponente zu $A_{\prod_{i \in L} X_i}$ bei $N \not\subseteq L$ gleich 0 ist und bei $N \subseteq L$ gleich $R \cdot X^\alpha$. Das Monom X^α in dieser Nenneraufnahme entspricht e_L. Bei der Identifikation rechts entspricht e_J dem Basiselement $e_L = e_{N \cup J}$. Der Komplex zum Index α entspricht also einem aufsteigenden Binomialkomplex zur Indexmenge $\{1,\ldots,n\} \setminus N$ zum Ring R (statt $\mathbb{Z}$), allerdings ohne einen freien Summanden links für die leere Menge.

Bei $p = 0$ und zumindest einem negativen Exponenten steht rechts höchstens ein isoliertes $R \cdot X^\alpha$. Dies wird aber ($n \geq 2$) nicht auf 0 abgebildet und somit hat dies keinen Beitrag zu H^0. Wenn hingegen alle Exponenten nichtnegativ sind, so sind die Elemente gleich

$$(c_1X^\alpha, \ldots, c_nX^\alpha)\,,$$

und dieses wird genau dann auf 0 abgebildet, wenn die Koeffizienten $c_i \in R$ übereinstimmen. Daher ist die nullte Čechkohomologie gleich dem Polynomring

$$A = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} R \cdot X^\alpha .$$

Sei $p \geq 1$. Bei $N \neq \{1, \ldots, n\}$ ist die Situation isomorph zu einem aufsteigenden Binomialkomplex zu einer nichtleeren Indexmenge und daher ist die Homologie trivial nach Lemma Anhang 8.11. Daher ist die Homologie überhaupt trivial für alle p zwischen 1 und $n-2$. Sei also $p = n-1$ und $N = \{1, \ldots, n\}$. Dies sind die α mit ausschließlich negativen Exponenten. Der Komplex (entspricht dem leeren aufsteigenden Binomialkomplex) ist

$$0 \longrightarrow R \cdot X^\alpha \longrightarrow 0$$

und daher ist

$$H^{n-1} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_-^n} R \cdot X^\alpha .$$

□

27.2. **Kohomologie auf projektiven Schemata.**

Satz 27.4. *Es sei R ein kommutativer Ring und $A = R[X_0, X_1, \ldots, X_d]$ der Polynomring über R in $d+1 \geq 2$ Variablen und*

$$\mathbb{P}_R^d = \operatorname{Proj}(A)$$

der zugehörige projektive Raum. Dann ist die Kohomologie der getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^d}(n)$ gleich

$$\check{H}^p(\mathbb{P}_R^d, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^d}(n)) = \begin{cases} A_n \text{ für } p = 0, \\ 0 \text{ für } 1 \leq p \leq d-1, \\ \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_-^{d+1}, \sum_{j=1}^{d+1} \alpha_j = n} R \cdot X^\alpha \text{ für } p = d\,. \end{cases}$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 27.3. □

Speziell ist für die kanonische Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^d}(-d-1)$ (vergleiche Korollar 19.10)

$$H^d\Big(\mathbb{P}_R^d, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^d}(-d-1)\Big) = RX_0^{-1}X_1^{-1} \cdots X_n^{-1} \cong R$$

und

$$H^d\Big(\mathbb{P}_R^d, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^d}(n)\Big) = 0$$

für $n > -d-1$.

Satz 27.5. *Es sei $\mathbb{P}_R^n$ der projektive Raum über einem noetherschen Ring R und sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}_R^n$. Dann sind die $H^i(\mathbb{P}_R^n, \mathcal{F})$ endlich erzeugte R-Moduln.*

Beweis. Für die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\ell)$ ergibt sich die Aussage aus Satz 27.4. Damit gilt sie auch für endliche direkte Summen von solchen Garben. Den allgemeinen Fall beweisen wir durch absteigende Induktion über den kohomologischen Index i. Wenn dieser oberhalb von n liegt, so gibt es nach Satz 26.10 nur triviale Kohomologie (wenn R endliche Dimension besitzt, so kann man auch mit Satz 25.12 argumentieren), was den Induktionsanfang sichert. Es sei also die Aussage für ein i und jede kohärente Garbe bewiesen. Es sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe. Dann gibt es nach Satz 15.13 eine endliche direkte Summe $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\ell_j)$ und einen surjektiven $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}$-Modulhomomorphismus

$$\bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\ell_j) \longrightarrow \mathcal{F}.$$

Es sei $\mathcal{G}$ der Kern dieser Abbildung, der nach Aufgabe 14.20 ebenfalls kohärent ist. Die zugehörige lange exakte Kohomologiesequenz zur Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\ell_j) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

ist

$$\ldots \longrightarrow H^{i-1}(\mathbb{P}^n_R, \bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\ell_j)) \xrightarrow{\epsilon} H^{i-1}(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} H^i(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{G}) \longrightarrow \ldots .$$

Dazu gehört die kurze exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow \operatorname{bild} \epsilon = \operatorname{kern} \delta \longrightarrow H^{i-1}(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{F}) \longrightarrow \operatorname{bild} \delta \longrightarrow 0 .$$

Nach der Vorüberlegung bzw. der Induktionsvoraussetzung sind $H^{i-1}(\mathbb{P}^n_R, \bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\ell_j))$ und $H^i(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{G})$ endlich erzeugte R-Moduln und daher sind auch $\operatorname{bild} \epsilon$ und nach Satz 10.4 (Algebraische Kurven (Osnabrück 2017-2018)) auch $\operatorname{kern} \delta$ endlich erzeugt. Nach Lemma 20.8 (Kommutative Algebra) ist auch $H^{i-1}(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{F})$ endlich erzeugt. □

Satz 27.6. *Es sei X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring R mit einer abgeschlossenen Einbettung $X \subseteq \mathbb{P}^n_R$ in einen projektiven Raum. Es sei $\mathcal{G}$ eine quasikohärente Garbe auf X und $j_*\mathcal{G}$ die vorgeschobene Garbe. Dann ist*

$$H^i(X, \mathcal{G}) = H^i(\mathbb{P}^n_R, j_*\mathcal{G})$$

für alle i.

Beweis. Die vorgeschobene Garbe ist wieder quasikohärent. Nach Satz 26.10 kann man beide Seiten mit Čech-Kohomologie bezüglich der affinen Standardüberdeckung $D_+(X_s)$ des projektiven Raumes bzw. der Überdeckung $X \cap D_+(X_s)$ von X berechnen. Dabei stimmt der gesamte Čech-Komplex überein und insbesondere die Čech-Kohomologie. □

Satz 27.7. *Es sei X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring R und sei $\mathcal{G}$ eine kohärente Garbe auf X. Dann sind die $H^i(X, \mathcal{G})$ endlich erzeugte R-Moduln.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 27.6 und Satz 27.5. □

Man beachte, dass es um R-Moduln geht, nicht um Moduln über dem Koordinatening von X. Im wichtigsten Fall, wenn $R = K$ ein Körper ist, handelt es sich also bei den Kohomologiegruppen um endlichdimensionale Vektorräume über K. Deren Dimensionen sind natürliche Zahlen, die den kohärente Garben auf X zugeordnet werden und für diese in gewisser Weise charakteristisch sind. Wenn man die Strukturgarbe oder die Tangentialgarbe auf X nimmt, so erhält man Zahlen (Invarianten), die für X selbst charakteristisch sind. In diesem Zusammenhang setzt man abkürzend

$$h^i(\mathcal{F}) \,=\, \dim_K \left(H^i(X, \mathcal{F})\right).$$

Beispielsweise ist für eine glatte projektive Kurve X über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K die Vektorraumdimension von $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ das sogenannte *Geschlecht* der Kurve. Dies ist die wichtigste Invariante, wobei im komplexen Fall ein unmittelbarer Zusammenhang mit der topologischen Gestalt der Kurve (als komplex eindimensionale, reell zweidimensionale Mannigfaltigkeit) besteht.

27.3. **Die Euler-Charakteristik.**

Definition 27.8. Es sei X ein projektives Schema über einem Körper K. Zu einer kohärenten Garbe $\mathcal{G}$ nennt man

$$\chi(\mathcal{G}) \,:=\, \sum_{i=0}^{\dim(X)} (-1)^i h^i(X, \mathcal{G})$$

die *Euler-Charakteristik* von $\mathcal{G}$.

Wegen Satz 27.7 ist dieser Ausdruck eine wohldefinierte ganze Zahl. Da oberhalb der Dimension die Kohomologie gleich 0 ist, könnte man die alternierende Summe auch gegen unendlich laufen lassen.

Lemma 27.9. *Es sei X ein projektives Schema über einem Körper K. Dann ist die Euler-Charakteristik von kohärenten Garben auf X additiv für kurze exakte Sequenzen. D.h. für eine kurze exakte Sequenz von kohärenten Garben*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

ist

$$\chi(\mathcal{G}) \,=\, \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{H}).$$

Beweis. Dies ergibt sich aus der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz und Satz 25.12

mit der Dimensionsformel. □

27. Arbeitsblatt

Aufgabe 27.1. Es sei $A = R[X]$ über einem kommutativen Ring R. Bestimme den Čech-Komplex zur Strukturgarbe und zur einelementigen Überdeckung bestehend aus $D(X)$ der punktierten Geraden. Welche Homologie ergibt sich dabei?

Aufgabe 27.2. Es sei $A = R[X,Y]$ über einem kommutativen Ring R. Bestimme den Čech-Komplex zur Strukturgarbe und zur Standardüberdeckung der punktierten Ebene zu den Monomen

(1) X^2Y^3,
(2) X^5Y^{-4}.
(3) $X^{-3}Y^{-6}$.

Welche Homologien ergeben sich jeweils dabei?

Aufgabe 27.3. Es sei $A = R[X,Y,Z]$ über einem kommutativen Ring R. Bestimme den Čech-Komplex zur Strukturgarbe und zur Standardüberdeckung des punktierten Raumes zum Monom $X^3Y^{-2}Z^7$. Welche Homologien ergeben sich dabei?

Aufgabe 27.4. Es sei $A = R[X,Y,Z]$ über einem kommutativen Ring R. Bestimme den Čech-Komplex zur Strukturgarbe und zur Standardüberdeckung des punktierten Raumes zum Monom $X^{-5}YZ^{-4}$. Welche Homologien ergeben sich dabei?

Aufgabe 27.5. Es sei $A = R[X,Y,Z,W]$ über einem kommutativen Ring R. Bestimme den Čech-Komplex zur Strukturgarbe und zur Standardüberdeckung des punktierten Raumes zum Monom $X^{-3}YZ^3W^{-2}$. Welche Homologien ergeben sich dabei?

Aufgabe 27.6. Es sei $K[X_1,\ldots,X_d]$ der Polynomring über einem Körper K und H der von allen Monomen X^ν in den Variablen $X_1,\ldots,X_d$ mit $\nu_j \leq -1$ für alle j erzeugte K-Vektorraum, also

$$H = K\langle X_1^{\nu_1}\cdots X_d^{\nu_d},\, \nu_j \leq -1\rangle.$$

Definiere eine natürliche $K[X_1,\ldots,X_d]$-Modulstruktur auf H.

Aufgabe 27.7. Es sei $K[Y_1, \ldots, Y_d]$ der Polynomring über einem Körper K und H der von allen Monomen X^ν in den Variablen $X_1, \ldots, X_d$ mit $\nu_j \leq -1$ für alle j erzeugte K-Vektorraum, also

$$H = K\langle X_1^{\nu_1} \cdots X_d^{\nu_d},\, \nu_j \leq -1 \rangle.$$

Zeige, dass durch

$$K[Y_1, \ldots, Y_d] \longrightarrow H,\, Y^\mu \longmapsto X^{-\mu-(1,1,\ldots,1)},$$

ein K-Isomorphismus von K-Vektorräumen gegeben ist.

Aufgabe 27.8. Es sei $K[Y_1, \ldots, Y_d]$ der Polynomring über einem Körper K der Charakteristik 0 und H der von allen Monomen X^ν in den Variablen $X_1, \ldots, X_d$ mit $\nu_j \leq -1$ für alle j erzeugte K-Vektorraum, also

$$H = K\langle X_1^{\nu_1} \cdots X_d^{\nu_d},\, \nu_j \leq -1 \rangle.$$

Zeige, dass durch

$$\theta\colon\; K[Y_1, \ldots, Y_d] \longrightarrow H,\, Y^\mu \longmapsto \mu! X^{-\mu-(1,1,\ldots,1)},$$

ein K-Isomorphismus von K-Vektorräumen gegeben ist.

Aufgabe 27.9. Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und es seien $K[X_1, \ldots, X_d], K[Y_1, \ldots, Y_d]$ und $K[D_1, \ldots, D_d]$ Polynomringe in d Variablen. Es sei H der in Aufgabe 27.6 beschriebene K-Vektorraum mit der natürlichen $K[X_1, \ldots, X_d]$-Modulstruktur. Der Polynomring $K[D_1, \ldots, D_d]$ wirke auf dem Polynomring $K[Y_1, \ldots, Y_d]$ dadurch, dass die D_i die Wirkungsweise der i-ten partiellen Ableitung übernehmen, also $D_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial Y_i}$. Zeige, dass mit der Zuordnung $D_i \mapsto X_i$ und der Zuordnung $\theta\colon\; K[Y_1, \ldots, Y_d] \to H$ aus Aufgabe 27.8 ein Modulisomorphismus vorliegt.

Für die folgende Aufgabe beachte man, dass in ihr im glatten Fall wegen Korollar 19.12 die Dimension des Raumes der globalen Differentialformen ausgerechnet wird.

Aufgabe 27.10. Es sei $C = V_+(f) \subset \mathbb{P}^2_K$ eine ebene projektive Kurve über einem Körper K vom Grad d. Zeige unter Verwendung der langen exakten Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Garbensequenz (vergleiche Aufgabe 13.23)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(-3) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(d-3) \longrightarrow \mathcal{O}_C(d-3) \longrightarrow 0$$

auf der projektiven Ebene und Satz 27.4, dass die Dimension von

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(d-3))$$

gleich $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ ist.

Für die beiden folgenden Aufgaben vergleiche Satz 22.12.

Aufgabe 27.11. Berechne den Čech-Komplex zur Einheitengarbe $\mathcal{O}^{\times}_{\mathbb{P}^1_K}$ zur affinen Standardüberdeckung auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K$ über einem Körper K sowie die erste Čech-Kohomologie $\check{H}^1(D_+(X), D_+(Y), \mathcal{O}^{\times}_{\mathbb{P}^1_K})$.

Aufgabe 27.12. Berechne den Čech-Komplex zur Einheitengarbe $\mathcal{O}^{\times}_{\mathbb{P}^2_K}$ zur affinen Standardüberdeckung auf der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2_K$ über einem Körper K sowie die erste Čech-Kohomologie $\check{H}^1(D_+(X), D_+(Y), D_+(Z), \mathcal{O}^{\times}_{\mathbb{P}^2_K})$.

Aufgabe 27.13. Es sei R ein kommutativer Ring und M_i, $i \in \mathbb{N}$, seien R-Moduln mit fixierten R-Modulhomomorphismen

$$\varphi_i \colon\, M_i \longrightarrow M_{i+1}.$$

Die Sequenz

$$\ldots \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_{i+2} \longrightarrow M_{i+3} \longrightarrow \ldots$$

heißt *exakt*, wenn für alle i gilt, dass $\operatorname{Kern}(\varphi_i) = \operatorname{Bild}(\varphi_{i-1})$ ist.

(1) Zeige, dass diese Definition im Falle einer kurzen exakten Sequenz mit der Definition . übereinstimmt.
(2) Sei nun $R = K$ ein Körper, die M_i seien endlich erzeugt, $M_0 = 0$ und alle $M_i = 0$ für $i \geq n$ für ein gewisses n. Zeige, dass

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_K M_i \;=\; 0.$$

Aufgabe 27.14. Berechne die Euler-Charakteristik für die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(n)$ auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^d_K$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K.

28. Vorlesung - Morphismen in den projektiven Raum

Eine projektive Varietät X über einem Körper K ist nach Definition (realisierbar als) eine abgeschlossene Untervarietät $X \subseteq \mathbb{P}^n_K$. Hierbei konkurrieren zwei Sichtweisen:

Einerseits (und dies nennt man den *extrinsischen Standpunkt*) erlaubt die Realisierung von X als Teilmenge eines projektiven Raumes, Konzepte, Strukturen, Eigenschaften des umgebenden Raumes durch Einschränkung auf X zu verwenden, man kann das Schnittverhalten von X mit anderen Untervarietäten Y untersuchen, man kann nach Beziehungen zum offenen Komplement $\mathbb{P}^n_K \setminus X$ Ausschau halten. Ferner nimmt jede Visualisierung von X Bezug auf einen umgebenden Raum.

Andererseits (und dies nennt man den *intrinsischen Standpunkt*) kann man sich fragen, welche Eigenschaften von X der Varietät selbst inhärent und unabhängig von einer gewissen Realisierung zukommen. Die Varietät X ist typischerweise isomorph zu einer „anderen“ Varietät X', die als eine abgeschlossene Teilmenge $X' \subseteq \mathbb{P}_K^{n'}$ gegeben ist. Welche Eigenschaften von X bzw. X' sind unabhängig von den jeweiligen Einbettungen?

Die beiden Standpunkte überschneiden sich, wenn man folgende Fragen betrachtet: Wie viele Einbettungen für ein gegebenes X gibt es? Kann man sich eine Übersicht über alle möglichen Einbettungen von X in einen projektiven Raum verschaffen? Gibt es eine beste Einbettung, wo etwa die Dimension des umgebenden Raumes klein ist oder wo die Beziehung zu ihm besonders übersichtlich ist. Gibt es eine besonders natürliche Einbettung, die mit charakteristischen Objekten auf X zusammenhängt?

Betrachten wir beispielsweise die abgeschlossene projektive Kurve

$$C = V\big(Y^2 - XZ\big) \subset \mathbb{P}_K^2 .$$

Dies ist eine Kurve vom Grad 2, ihr Durchschnitt mit einer jeden Geraden besteht aus zwei Punkten (gezählt mit Vielfachheiten). Die Abbildung

$$\mathbb{P}_K^1 \longrightarrow \mathbb{P}_K^2,\ (s,t) \longmapsto \big(s^2,\ st,\ t^2\big)\,,$$

induziert einen Isomorphismus $\mathbb{P}_K^1 \to C \subset \mathbb{P}_K^2$, d.h. die Kurve ist isomorph zur projektiven Geraden und somit eine „unnötig gekrümmte“ Version der projektiven Geraden. Allerdings sind Kurven vom Grad zwei (Quadriken, Kegelschnitte) natürliche Objekte in der Ebene, und, von der projektiven Geraden aus gesehen, bilden die Elemente s^2, st, t^2 eine Basis der zweiten homogenen Stufe $K[s,t]_2$ des homogenen Koordinatenringes $K[s,t]$ der projektiven Geraden. Diese treten wiederum als globale Schnitte der invertierbaren Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1}(2)$ auf. In der Tat werden wir sehen, dass die verschiedenen Einbettungen von X in einen projektiven Raum mit globalen Schnitten auf invertierbaren Garben auf X zusammenhängen.

28.1. **Invertierbare Garben und Morphismen in den projektiven Raum.**

Lemma 28.1. *Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R, es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und es seien*

$$s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L}).$$

Es sei $U \subseteq X$ die Vereinigung der offenen Mengen X_{s_i}. Dann ist durch

$$U \longrightarrow \mathbb{P}_R^n,\ x \longmapsto (s_0(x),\ s_1(x),\ \ldots,\ s_n(x))\,,$$

ein Morphismus gegeben.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Situation auf $X_i = X_{s_i}$. Es ist

$$\mathcal{O}_X|_U \longrightarrow \mathcal{L}|_U,\ 1 \longmapsto s_i,$$

nach Lemma 13.22 ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Dabei entsprechen unter diesem Isomorphismus die s_k den Funktionen

$$f_{ki} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X).$$

Dabei gilt

$$f_{ki} = \frac{s_k}{s_i},$$

und dieser Quotient ist wohldefiniert. Diese Funktionen f_{ki}, $k \neq i$, definieren wiederum nach Korollar 10.13 einen Morphismus

$$\varphi_i \colon X_i \longrightarrow D_+(x_i) \cong \mathbb{A}_R^n \subseteq \mathbb{P}_R^n.$$

Insgesamt liegt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
X_i & & \stackrel{\varphi_i}{\longrightarrow} & & & D_+(x_i) \cong \mathbb{A}_R^n & \\
& \nwarrow & & & \nearrow & & \searrow \\
& X_i \cap X_j & \longrightarrow & D_+(x_i) \cap D_+(x_j) & & & \mathbb{P}_K^n \\
& \swarrow & & & \searrow & & \nearrow \\
X_j & & \stackrel{\varphi_j}{\longrightarrow} & & & D_+(x_j) \cong \mathbb{A}_R^n &
\end{array}$$

vor, da links so verklebt wird wie im projektiven Raum rechts. Somit setzen sich diese Morphismen zu einem Morphismus auf der Vereinigung der X_i zusammen. $\square$

Definition 28.2. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R, es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und es seien $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ globale Schnitte auf X. Dann nennt man den nach Lemma 28.1 auf $U = \bigcup_{i=0}^n X_{s_i}$ definierten Morphismus

$$U \longrightarrow \mathbb{P}_R^n,\ x \longmapsto (s_0(x),\ s_1(x),\ \ldots,\ s_n(x)),$$

den durch die *Schnitte* $s_0, \ldots, s_n$ *gegebenen* oder den durch das *lineare System* $s_0, \ldots, s_n$ *gegebenen Morphismus*. Er wird mit $\varphi_{s_0,\ldots,s_n}$ oder mit $\varphi_{\mathcal{L};s_0,\ldots,s_n}$ bezeichnet.

Definition 28.3. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R und es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Man nennt einen R-Untermodul $T \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ ein *lineares System* auf X.

Wegen Aufgabe 28.9 hängt der durch eine Familie von Schnitten gegebene Morphismus in erster Linie von dem davon erzeugten Untermodul ab (insbesondere, wenn die Schnitte linear unabhängig sind, was man oft ohnehin fordert). Bei $T = \Gamma(X, \mathcal{L})$ spricht man von einem *vollen linearen System*. Ein lineares System hat eine geometrische Bedeutung. Jeder Schnitt $s \in T$ definiert den Invertierbarkeitsort X_s und das Nullstellengebilde $Z(s) := X \setminus X_s$. Bei $s \neq 0$ ist $Z(s)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X der Kodimension 1, eine Hyperfläche von X (man denke an integres X). Die Familie $Z(s)$, $s \in T$, $s \neq 0$, ist somit eine Familie von Hyperflächen, die dem linearen System zugeordnet ist (oft nennt man dieses System das lineare System). Wenn

X normal ist, so kann man die $Z(s)$ als eine Familie von zueinander linear äquialenten Divisoren auffassen.

Beispiel 28.4. Auf der projektiven Geraden

$$\mathbb{P}^1_R = \operatorname{Proj}(R[X,Y])$$

über einem kommutativen Ring R und das (volle) lineare System $(X,Y) \subseteq \Gamma\left(\mathbb{P}^1_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(1)\right)$ ist der zugehörige Morphismus die Identität.

Beispiel 28.5. Auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_R = \operatorname{Proj}(R[X,Y])$ über einem kommutativen Ring R und das (volle) lineare System $(X^2, XY, Y^2) \subseteq \Gamma\left(\mathbb{P}^1_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(2)\right)$ ist der zugehörige Morphismus ausgeschrieben gleich

$$\mathbb{P}^1_R \longrightarrow \mathbb{P}^2_R,\ (x,y) \longmapsto (x^2, xy, y^2).$$

Dem Punkt auf der projektiven Geraden mit den homogenen Koordinaten (x,y) wird also der Punkt in der projektiven Ebene mit den homogenen Koordinaten $(x^2, xy, y^2) = (u,v,w)$ zugeordnet. Das Bild erfüllt die Gleichung $uw = v^2$, d.h. das Bild liegt in der ebenen Kurve

$$V_+(uw - v^2) \subseteq \mathbb{P}^2_R.$$

In der Tat liegt eine Isomorphie $\mathbb{P}^1_R \cong V_+(uw - v^2)$ vor.

Definition 28.6. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R und es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Ein lineares System $T \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ heißt *basispunktfrei*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ ein $s \in T$ mit $x \in X_s$ gibt.

Dies wird hauptsächlich für Schemata über einem Körper verwendet. Man sagt dann auch, dass die Schnitte $s_0, s_1, \ldots, s_n$ basispunktfrei sind, wenn das von ihnen erzeugte lineare System basispunktfrei ist.

Lemma 28.7. *Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R, es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und es seien $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ globale Schnitte auf X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Es ist $X = \bigcup_{i=0}^n X_{s_i}$.*
(2) *Der durch das lineare System $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ definierte Morphismus nach $\mathbb{P}^n_R$ ist auf ganz X definiert.*
(3) *Das lineare System $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ ist basispunktfrei.*

Beweis. Siehe Aufgabe 28.14. □

Satz 28.8. *Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R. Dann entsprechen sich die folgenden Konzepte.*

(1) *Eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf X zusammen mit basispunktfreien Schnitten*

$$s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L}).$$

(2) *Ein Morphismus*
$$\varphi\colon\ X \longrightarrow \mathbb{P}^n_R$$
über Spek (R).

Dabei wird den Schnitten der zugehörige Morphismus $\varphi_{s_0,s_1,\ldots,s_n}$ *und dem Morphismus* φ *die invertierbare Garbe* $\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1))$ *zusammen mit den Schnitten* $\varphi^*(x_i)$, $i=0,1,\ldots,n$, *zugeordnet.*

Beweis. Es sei zuerst die invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ mit den Schnitten $s_0, s_1, \ldots, s_n$ gegeben. Es ist zu zeigen, dass
$$\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1) \,\cong\, \mathcal{L}$$
ist. Auf dem projektiven Raum gibt es $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}$-Modulhomomorphismen
$$\Psi_i\colon\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1),\ 1 \longmapsto x_i,$$
die eingeschränkt auf $D_+(x_i)$ Isomorphismen sind. Dies induziert $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismen
$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1),\ 1 \longmapsto \varphi^*(x_i),$$
und Isomorphismen
$$\mathcal{O}_X|_{X_{s_i}} \longrightarrow \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)|_{X_{s_i}},$$
die in Verbindung mit den $\mathcal{O}_X$-Isomorphismen
$$\mathcal{O}_X|_{X_{s_i}} \longrightarrow \mathcal{L}|_{X_{s_i}},\ 1 \longmapsto s_i,$$
zu $\mathcal{O}_X$-Isomorphismen
$$\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)|_{X_{s_i}} \longrightarrow \mathcal{L}|_{X_{s_i}}$$
führen, bei denen sich $\varphi^*(x_i)$ und s_i entsprechen. Die Einschränkungen dieser Isomorphismen auf $X_{s_is_j}$ stimmen überein, daher gibt es nach Korollar 4.10 einen globalen Isomorphismus
$$\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1) \longrightarrow \mathcal{L}.$$

Wenn umgekehrt ein Morphismus $\varphi\colon\ X \to \mathbb{P}^n_K$ gegeben ist, so definiert dies Schnitte $s_i = \varphi^*(x_i)$, $i=0,1,\ldots,n$, und dies wiederum den dadurch festgelegten Morphismus φ'. Es ist zu zeigen, dass diese beiden Morphismen übereinstimmen. Ein Morphismus ist lokal festgelegt. Unter der Einschränkung
$$\varphi^{-1}(D_+(x_i)) \longrightarrow D_+(x_i) \cong \mathbb{A}^n_K$$
werden aber die zugehörigen Variablen $\frac{x_k}{x_i}$ auf $\frac{s_k}{s_i}$ zurückgezogen, und mit diesen Brüchen wird φ' definiert. □

Lemma 28.9. *Es sei* X *ein Schema über einem kommutativen Ring* R, *es sei* $\mathcal{L}$ *eine invertierbare Garbe auf* X *und es seien* $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ *globale Schnitte auf* X *und* $\varphi\colon\ X \to \mathbb{P}^n_R$ *der zugehörige Morphismus. Dann ist das Urbild der Hyperebene*
$$V_+(a_0X_0 + a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) \,\subset\, \mathbb{P}^n_R$$

(mit $a_i \in R$, nicht alle gleich 0) unter φ gleich der Nullstellenmenge

$$Z(a_0s_0 + a_1s_1 + \cdots + a_ns_n) \,=\, X \setminus X_{a_0s_0+a_1s_1+\cdots+a_ns_n}$$

des zurückgezogenen Schnittes $a_0s_0 + a_1s_1 + \cdots + a_ns_n$.

Beweis. Dies folgt aus Lemma Anhang 4.3. □

Zur getwisteten Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)$ gehört über die Familie aller globalen Schnitte $\neq 0$ die Familie aller Hyperebenen im projektiven Raum. Ebenso gehört zu einer invertierbaren Garbe auf einem Schema über die Familie ihrer globalen Schnite $\neq 0$ die Familie ihrer Nullstellengebilde. Unter der in Satz 28.8 beschriebenen Korrespondenz sind die Urbilder der Hyperebenen gleich den Nullstellengebilden. Wenn φ durch eine abgeschlossene Untervarietät faktorisiert, also $X \to Y \subseteq \mathbb{P}^n_R$ vorliegt, so sind auch die Nullstellengebilde Urbilder von Durchschnitten $Y \cap H$ mit einer Hyperebene H. In Beispiel 28.5 etwa stimmt die Familie der Nullstellengebilde zum vollen linearen System aus $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(2)$ mit der Familie der Durchschnitte $V_+(uw - v^2) \cap H$, H Gerade, überein.

28.2. **Sehr ample Garben.**

Definition 28.10. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R und sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Man nennt $\mathcal{L}$ *sehr ampel*, wenn es eine Einbettung $\varphi\colon\, X \to \mathbb{P}^n_R$ (für ein gewisses n) derart gibt, dass

$$\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)) \,\cong\, \mathcal{L}$$

ist.

Lemma 28.11. *Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R und sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Dann ist $\mathcal{L}$ genau dann sehr ampel, wenn es basispunktfreie globale Schnitte*

$$s_0, s_1, \ldots, s_n \,\in\, \Gamma(X, \mathcal{L})$$

derart gibt, dass der zugehörige Morphismus $\varphi_{s_0,s_1,\ldots,s_n}$ eine Einbettung ist.

Beweis. Dies folgt aus Satz 28.8. □

Beispiel 28.12. Auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n_R$ über einem kommutativen Ring R sind die invertierbaren Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(k)$ für $k \geq 1$ sehr ampel. Es ist

$$\Gamma\big(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(k)\big) \,=\, R[X_0, X_1, \ldots, X_n]_k$$

und wir betrachten das durch sämtliche Monome aus $R[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ vom Grad k erzeugte lineare System und den zugehörigen Morphismus

$$\varphi\colon\, \mathbb{P}^n_R \longrightarrow \mathbb{P}^m_R,$$

wobei m die Anzahl dieser Monome weniger 1 bezeichne. Auf $D_+(X_0) = (\mathbb{P}^n_R)_{X_0^k}$ ist die Abbildung durch

$$\mathbb{A}^n_R \longrightarrow D_+(Y_\nu) \subseteq \mathbb{P}^m_R, \left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0} \right) \longmapsto \left(\frac{X^\mu}{X_0^k}, \mu \text{ Monom vom Grad } k \text{ in } n+1 \text{ Variablen} \right)$$

gegeben (und entsprechend auf den anderen $D_+(X_i)$). Auf der Ebene der Polynomringe ist dies der Einsetzungshomomorphismus

$$R[S_\mu,\, \mu \in I_k] \longrightarrow R[T_1, \ldots, T_n],\; S_\mu \longmapsto T^\mu,$$

wobei I_k die Indexmenge aller Monome in n Variablen vom Grad $\leq k$ (!) bezeichnet. Diese Abbildung ist surjektiv und somit liegt eine abgeschlossene Einbettung vor.

Bei $k \leq 0$ und $n \geq 1$ sind die $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(k)$ nicht sehr ampel.

Definition 28.13. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R und sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Man nennt $\mathcal{L}$ *ampel*, wenn $\mathcal{L}^n$ für ein $n \geq 1$ sehr ampel ist.

28. Arbeitsblatt

28.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 28.1. Beschreibe die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}^{d+1}_K \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^d_K$$

mit Hilfe eines linearen Systems in einer invertierbaren Garbe.

Aufgabe 28.2. Beschreibe die Projektion weg von einem Punkt mit Hilfe eines linearen Systems in einer invertierbaren Garbe.

Aufgabe 28.3. Es sei K ein Körper und $\mathbb{P}^n_K$ der zugehörige projektive Raum. Es sei $\varphi\colon K^{n+1} \to K^{n+1}$ eine bijektive lineare Abbildung.

(1) Zeige, dass φ einen Automorphismus
$$\varphi\colon \mathbb{P}^n_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K,\; (x_0, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$
induziert.
(2) Bestimme das Urbild von $D_+(X_i)$ in der in (1) beschriebenen Situation. Wie sieht der Morphismus für diese affinen Mengen aus?

(3) Zeige, dass φ_1 und φ_2 genau dann den gleichen Automorphismus auf dem projektiven Raum induzieren, wenn sie durch Multiplikation mit einem Skalar $\neq 0$ ineinander überführbar sind.
(4) Induziert jede lineare Abbildung $\varphi\colon K^{n+1} \to K^{n+1}$ einen Morphismus $\varphi\colon \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$?

In der vorstehenden Situation spricht man von einem *projektiv-linearen Automorphismus*.

Aufgabe 28.4. Beschreibe einen projektiv linearen Automorphismus
$$\mathbb{P}^d_K \longrightarrow \mathbb{P}^d_K$$
mit Hilfe eines linearen Systems in einer invertierbaren Garbe.

Aufgabe 28.5. Es seien $P, Q \in \mathbb{P}^n_K$ Punkte im projektiven Raum über einem Körper K. Zeige, dass es einen Automorphismus $\varphi\colon \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$ mit $\varphi(P) = Q$ gibt.

Aufgabe 28.6.*

Es sei V ein zweidimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Es seien v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2, w_3 Vektoren in V, die jeweils paarweise linear unabhängig seien. Zeige, dass es eine bijektive lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ derart gibt, dass
$$\varphi(v_i) \in Kw_i$$
für $i = 1, 2, 3$ gilt.

Aufgabe 28.7. Es seien $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1_K$ und $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1_K$ jeweils drei (untereinander verschiedene) Punkte auf der projektiven Geraden über einem Körper K. Zeige, dass es einen K-Automorphismus $\varphi\colon \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ mit $\varphi(P_i) = Q_i$ für $i = 1, 2, 3$ gibt.

Aufgabe 28.8. Es sei K ein Körper. Zeige, dass jeder K-Automorphismus des projektiven Raumes $\mathbb{P}^n_K$ in sich projektiv-linear ist.

Verwende, dass die zurückgezogene Garbe zu $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(1)$ ebenfalls $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(1)$ sein muss.

Aufgabe 28.9. Es sei X ein Schema über einem Körper K, es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und es seien $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ globale Schnitte auf X, die das lineare System $\langle s_0, s_1, \ldots, s_n \rangle \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ festlegen. Es sei $t_0, t_1, \ldots, t_n$ ein weiteres Erzeugendensystem dieses linearen Systems. Zeige folgende Aussagen.

(1) Es ist $\bigcup_{i=0}^{n} X_{s_i} = \bigcup_{i=0}^{n} X_{t_i}$.
(2) Für die durch diese Erzeugendensysteme gegebenen Morphismen gibt es einen projektiv-linearen Automorphismus

$$\theta \colon \mathbb{P}_K^n \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$$

mit

$$\theta \circ \varphi_{s_0,s_1,\ldots,s_n} = \varphi_{t_0,t_1,\ldots,t_n}.$$

Aufgabe 28.10. Wir betrachten die projektive Gerade $\mathbb{P}_K^1$ und das volle lineare System

$$L := \langle s,t \rangle = \Gamma\Big(\mathbb{P}_K^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1}(1)\Big).$$

Zeige, dass die Fixierung eines Erzeugendensystems von L aus drei Elementen (bis auf Streckung) einer Einbettung der projektiven Geraden in die projektive Ebene als Gerade entspricht. Wie kann man dabei die Bildgerade beschreiben?

Aufgabe 28.11. Wir betrachten die projektive Gerade $\mathbb{P}_K^1$ und das volle lineare System

$$L := \langle s^2, st, t^2 \rangle = \Gamma\Big(\mathbb{P}_K^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1}(2)\Big).$$

Zeige, dass die Fixierung einer Basis von L (bis auf Streckung) einer Einbettung der projektiven Geraden in die projektive Ebene entspricht. Wie kann man dabei die Bildkurve beschreiben?

Aufgabe 28.12. Wir betrachten die projektive Gerade $\mathbb{P}_K^1$ und das volle lineare System

$$L := \langle s^3, s^2t, st^2, t^3 \rangle = \Gamma\Big(\mathbb{P}_K^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1}(3)\Big).$$

Zeige, dass die zugehörige Abbildung

$$\mathbb{P}_K^1 \longrightarrow \mathbb{P}_K^3$$

einer Einbettung der projektiven Geraden in den projektiven Raum ergibt. Man gebe möglichst viele Gleichungen an, die die Bildkurve erfüllt.

Aufgabe 28.13. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R, es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und es seien $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ globale Schnitte auf X. Es sei $L \to X$ das Geradenbündel im Sinne von Satz 17.10 zur dualen invertierbaren Garbe $\mathcal{L}^*$ derart, dass man die s_i als Morphismen

$$L \longrightarrow X \times \mathbb{A}_R^1 \longrightarrow \mathbb{A}_R^1$$

auffassen kann. Zeige, dass dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L & \stackrel{(s_0,s_1,\ldots,s_n)}{\longrightarrow} & \mathbb{A}_R^{n+1} \supseteq \bigcup_{i=1}^n D(x_i) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ X \supseteq \bigcup_{i=1}^n X_{s_i} & \stackrel{\varphi_{s_0,s_1,\ldots,s_n,\mathcal{L}}}{\longrightarrow} & \mathbb{P}_R^n \end{array}$$

vorliegt, wobei rechts die Kegelabbildung steht.

Aufgabe 28.14. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R, es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und es seien $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ globale Schnitte auf X. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es ist $X = \bigcup_{i=0}^n X_{s_i}$.
(2) Der durch das lineare System $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ definierte Morphismus nach $\mathbb{P}_R^n$ ist auf ganz X definiert.
(3) Das lineare System $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ ist basispunktfrei.

29. Vorlesung - Das Geschlecht von Kurven

29.1. **Glatte projektive Kurve und ihr Geschlecht.**

Definition 29.1. Zu einer glatten projektiven Kurve C über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K nennt man

$$g := \dim_K \left(H^1(C, \mathcal{O}_C) \right)$$

das *Geschlecht* der Kurve.

Die Dimension von $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ ist nach Satz 27.7 endlich, das Geschlecht einer Kurve ist also eine natürliche Zahl.

Beispiel 29.2. Das Geschlecht der projektiven Geraden

$$\mathbb{P}_K^1 = \operatorname{Proj}\left(K[X, Y]\right)$$

ist nach Satz 27.4 gleich 0.

Definition 29.3. Eine glatte projektive Kurve C über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K vom Geschlecht 1 nennt man *elliptische Kurve*.

Bemerkung 29.4. Wählt man die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Grundkörper, so besitzt das Geschlecht einer glatten projektiven Kurve eine einfache topologische Interpretation. Eine solche Kurve kann man als eine kompakte eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit (Riemannsche Fläche) und als eine reell zweidimensionale kompakte orientierte Mannigfaltigkeit auffassen. Letztere lassen sich topologisch einfach klassifizieren, und zwar ist eine solche Mannigfaltigkeit homöomorph zu einer Kugeloberfläche, an die g Henkel angeklebt werden. Diese Zahl nennt man das (topologische) *Geschlecht* der reellen Fläche und damit auch der Kurve. Man kann zeigen, dass das algebraisch über die erste Kohomologie der Strukturgarbe definierte Geschlecht mit diesem topologischen Geschlecht übereinstimmt. Die komplex-projektive Gerade ist eine zweidimensionale Sphäre und hat keinen Henkel, ihr topologisches Geschlecht ist also 0. Eine Fläche vom Geschlecht 1 ist ein Torus (ein Autoreifen) der homöomorph zu $S^1 \times S^1$ ist. Projektive Kurven vom Geschlecht 1, also elliptische Kurven, haben diese topologische Gestalt.

Satz 29.5. *Es sei $C = V_+(f) \subset \mathbb{P}^2_K$ eine ebene projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K vom Grad d. Dann ist*

$$\dim_K \left(H^1(C, \mathcal{O}_C)\right) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz (vergleiche Aufgabe 13.23)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(-d) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

von kohärenten Garben auf der projektiven Ebene. Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_C$ der Kurve wird dabei als Garbe auf der projektiven Ebene aufgefasst, ihr Träger ist C. Wir betrachten den folgenden Ausschnitt der langen exakten Kohomologiesequenz

$$H^1\left(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}\right) = 0 \longrightarrow H^1\left(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_C\right) \longrightarrow$$
$$H^2\left(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(-d)\right) \longrightarrow H^2\left(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}\right) = 0,$$

wobei die Gleichung links und rechts auf Satz 27.4 beruht. Der Raum

$$H^2\left(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(-d)\right)$$

besitzt, ebenfalls wegen Satz 27.4, eine Basis, die aus sämtlichen Monomen $x^i y^j z^k$ besteht, deren Exponenten alle negativ sind und die Bedingung $i + j + k = -d$ erfüllen. Somit geht es um die Anzahl der Tupel (α, β, γ) vom Grad $d - 3$. Nach Aufgabe 11.4 ist diese Anzahl gleich $\binom{d-3+2}{2} = \binom{d-1}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Nach Satz 27.6 ist

$$H^1\left(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_C\right) = H^1(C, \mathcal{O}_C),$$

was die Behauptung ergibt. □

Im glatten Fall liefert der vorstehende Satz eine Formel zur Berechnung des Geschlechts von ebenen Kurven. Es ist

	d	1	2	3	4	5
	g	0	0	1	3	6

Für $d = 1$ liegt eine projektive Gerade mit Geschlecht 0 vor, für $d = 2$ eine ebene projektive Quadrik (ein Kegelschnitt), die ebenfalls Geschlecht 0 besitzt und in der Tat isomorph zur projektiven Gerade ist. Für $d = 3$ ist das Geschlecht 1, es handelt sich also um eine elliptische Kurve. Man kann zeigen, dass sich jede elliptische Kurve als eine ebene kubische Kurve realisieren lässt. Es ist keineswegs selbstverständlich, dass es glatte projektive Kurven zu jedem Geschlecht gibt. Aufgrund von Satz 29.5 lassen sich nicht alle als ebene Kurve realisieren.

Bemerkung 29.6. Das kohomologisch definierte Geschlecht einer glatten projektiven Kurve über K stimmt mit der Vektorraumdimension der kanonischen Garbe überein. Die kanonische Garbe ist im eindimensionalen Fall einfach die Garbe der Kähler-Differentiale $\Omega_{C|K}$, also die Kotangentialgarbe, also die duale Garbe zur Tangentialgarbe. Es gilt also

$$\dim_K \left(H^1(C, \mathcal{O}_C)\right) = \dim_K \left(\Gamma(C, \omega_C)\right).$$

Im ebenen Fall ergibt sich dies direkt: Wegen Satz 29.5 ist das Geschlecht gleich $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Aufgrund von Korollar 19.12 ist $\omega_C \cong \mathcal{O}_C(d-3)$ und nach Aufgabe 27.10 ist die Dimension von $\Gamma(C, \mathcal{O}_C(d-3))$ ebenfalls gleich $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Im allgemeinen Fall gilt die *Serre-Dualität*, die unter Anderem besagt, dass für eine lokal freie Garbe $\mathcal{F}$ auf einer glatten projektiven Kurve C die Kohomologiegruppe $H^1(C, \omega_C)$ ein eindimensionaler Vektorraum über K ist und dass die natürliche Abbildung

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \omega_C) \times H^1(C, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(C, \omega_C) \cong K$$

eine vollständige Dualität liefert. D.h. die Vektorräume $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \omega_C)$ und $H^1(C, \mathcal{F})$ sind dual zueinander und haben insbesondere die gleiche Dimension. Für die Strukturgarbe $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C$ ergibt sich wegen $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_C, \omega_C) = \Gamma(C, \omega_C)$ (nach Satz 13.10) die Dualität zwischen $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ und $\Gamma(C, \omega_C)$.

29.2. **Divisoren auf Kurven.**

Auf einer glatten projektiven Kurve C ist wie auf jedem eindimensionalen normalen Schema ein Weildivisor einfach eine formale Summe $\sum_{P \in C} n_P \cdot P$ über die abgeschlossenen Punkte P, die ja in diesem Fall die Primdivisoren, also die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen der Kodimension 1 sind. Dabei ist $n_P \in \mathbb{Z}$ und diese Zahlen sind bis auf endlich viele Ausnahmen gleich 0. Nach Korollar 22.11 stimmt die Divisorenklassengruppe mit der Picardgruppe überein. Wir besprechen, wie sich Divisoren auf Kurven unter Morphismen verhalten. Ein Morphismus zwischen irreduziblen Kurven ist entweder konstant oder aber er hat schon ein dichtes Bild. Zu einem nichtkonstanten Morphismus $\varphi\colon C_1 \to C_2$ zwischen irreduziblen Kurven liegt eine Erweiterung der Funktionenkörper $Q(C_2) \subseteq Q(C_1)$ vor.

Zunächst überlegen wir uns, dass ein Element im Funktionenkörper einer glatten Kurve als ein Morphismus in die projektive Gerade aufgefasst werden kann. Generell kann man zu einem nichtkonstanten Element q des Funktionenkörpers eines normalen Schemas X den Hauptdivisor $\operatorname{div}(q)$ in den Nullstellendivisor und den (mit positiven Koeffizienten genommenen) Polstellendivisor zu q zerlegen, die zueinander linear äquivalent sind. Beide sind dann effektive Divisoren und entsprechen (im lokal faktoriellen Fall nach Aufgabe 22.13) Schnitten in der zugehörigen invertierbaren Garbe $\mathcal{O}_X(\text{Nullstellendivisor}(q))$. Die Resultate der letzten Vorlesung besagen, dass diese beiden Schnitte einen auf einer offenen Menge $U \subseteq X$ definierten Morphismus in die projektive Gerade festlegen. Die folgende Aussage geht für glatte Kurven über diese Aussagen hinaus, da zusätzlich gezeigt wird, dass der Definitionsbereich die gesamte Kurve ist.

Lemma 29.7. *Es sei C eine glatte irreduzible Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und sei Q der Funktionenkörper von C. Dann definiert jede rationale Funktion $q \in Q$ in natürlicher Weise einen Morphismus*

$$q\colon C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

in die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_K$.

Beweis. Es sei

$$U := \{P \in C \mid q \in \mathcal{O}_{C,P}\}$$

der Definitionsbereich (als Funktion in die affine Gerade) von q und (bei $q \neq 0$)

$$V := \left\{P \in C \mid q^{-1} \in \mathcal{O}_{C,P}\right\}$$

der Definitionsbereich von q^{-1}. Es gilt $C = U \cup V$, da die $\mathcal{O}_{C,P}$ diskrete Bewertungsringe sind und dort $q = \pi^n u$ mit einer Einheit $u \in \mathcal{O}_{C,P}$, einem lokalen Parameter $\pi \in \mathcal{O}_{C,P}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Nach Korollar 10.12 gibt es einen Morphismus

$$q\colon U \longrightarrow \mathbb{A}^1_K \cong \operatorname{Spec}\left(K[\frac{Y}{X}]\right) \cong D_+(X) \subseteq \mathbb{P}^1_K$$

und einen Morphismus

$$q^{-1}\colon V \longrightarrow \mathbb{A}^1_K \cong \operatorname{Spec}\left(K[\frac{X}{Y}]\right) \cong D_+(Y) \subseteq \mathbb{P}^1_K,$$

die den Einsetzungshomomorphismen $\frac{Y}{X} \mapsto q$ bzw. $\frac{X}{Y} \mapsto q^{-1}$ entsprechen. Auf dem Durchschnitt $U \cap V$ stimmen beide Morphismen überein, daher definieren sie insgesamt einem Morphismus in die projektive Gerade. □

Definition 29.8. Zu einem injektiven Ringhomomorphismus $R \subseteq S$ zwischen diskreten Bewertungsringen nennt man die Ordnung einer Ortsuniformisierenden von R in S die *Verzweigungsordnung* der Erweiterung.

Wir bezeichnen die Verzweigungsordnung mit $\operatorname{Verz}(S|R)$. Bei einem nichtkonstanten Morphismus $\varphi\colon C_1 \to C_2$ zwischen glatten Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper liegt zu jedem abgeschlossenen Punkt $Q \in C_1$ mit Bildpunkt $\varphi(Q) \in C_2$ eine Erweiterung der diskreten Bewertungsringe $\mathcal{O}_{C_2,\varphi(Q)} \subseteq \mathcal{O}_{C_1,Q}$ vor. Die zugehörige Verzweigungsordnung nennt man auch die Verzweigungsordnung von φ in Q und bezeichnet sie mit $\operatorname{Verz}(Q|\varphi(Q))$.

Definition 29.9. Zu einem nichtkonstanten Morphismus

$$\varphi\colon C_1 \longrightarrow C_2$$

zwischen glatten Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und einem Weildivisor $D = \sum_P a_P \cdot P$ auf C_2 nennt man

$$\varphi^* D := \sum_{Q \in C_1} \operatorname{Verz}(Q|\varphi(Q)) a_{\varphi(Q)} \cdot Q$$

den *zurückgezogenen Weildivisor*

Zu einem einzelnen Punkt $P \in C_2$ ist der zurückgezogene Divisor gleich $\sum_{Q \in \varphi^{-1}(P)} \operatorname{Verz}(Q|P) \cdot Q$. Dies ist also im Wesentlichen die Faser über P, wobei allerdings die *Verzweigungspunkte*, also Punkte, wo die Verzweigungsordnung ≥ 2 ist, mehrfach gezählt werden.

Lemma 29.10. *Zu einem nichtkonstanten Morphismus*

$$\varphi\colon C_1 \longrightarrow C_2$$

zwischen irreduziblen glatten Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und einem Hauptdivisor $D = \sum_P a_P \cdot P = \operatorname{div}(q)$ auf C_2 mit $q \in Q(C_2)$, $q \neq 0$, stimmt der zurückgezogene Divisor $\varphi^*(D)$ mit dem Hauptdivisor zu $q \in Q(C_1)$ auf C_1 überein.

Beweis. Wegen der Nichtkonstanz gehört zu φ eine Körpererweiterung

$$Q(C_2) \subseteq Q(C_1)$$

und zu jedem Punkt $Q \in C_1$ liegt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{C_2,\varphi(Q)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{C_1,Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q(C_2) & \longrightarrow & Q(C_1) \end{array}$$

von injektiven Ringhomomorphismen vor, wobei in der ersten Zeile diskrete Berwertungsringe stehen. Wenn

$$q = u\pi_2^n$$

mit einer Einheit $u \in \mathcal{O}_{C_2,\varphi(Q)}$ und einer Ortsuniformisierenden $\pi_2 \in \mathcal{O}_{C_2,\varphi(Q)}$ gilt, so ist

$$q = u\pi_2^n = u\Big(u'\pi_1^{\operatorname{Verz}(\varphi(Q)|Q)}\Big)^n = uu'\pi_1^{n\operatorname{Verz}(\varphi(Q)|Q)}$$

mit einer Orstuniformisierenden π_1 von $\mathcal{O}_{C_1,Q}$, woraus die Aussage folgt. □

Korollar 29.11. *Es sei C eine glatte irreduzible Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und sei Q der Funktionenkörper von C. Es sei $q \in Q$, $q \notin K$, und*

$$q\colon C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

der nach Lemma 29.7 zugehörige Morphismus zu einem Element $q \in Q$. Dann gilt für den zurückgezogenen Divisor

$$q^*((0) - (\infty)) = \operatorname{div}(q).$$

Beweis. Der Funktionenkörper der projektiven Geraden

$$\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$$

ist $K(t)$ mit $t = \frac{Y}{X}$. Die Erweiterung der Funktionenkörper ist durch

$$K(t) \longrightarrow Q(C),\ t \longmapsto q,$$

gegeben. Der Hauptdivisor zu t ist $(0) - (\infty) = (Y) - (X)$. Daher folgt die Aussage aus Lemma 29.10. □

29.3. **Der Grad eines Divisors.**

Definition 29.12. Es sei C eine glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zu einem Weildivisor $D = \sum_{P \in C} n_P P$ auf C ist der *Grad* als

$$\deg(D) := \sum_{P \in C} n_P$$

definiert.

Ohne Beweis teilen wir den folgenden Satz mit.

Satz 29.13. *Es sei C eine glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann ist der Grad eines Hauptdivisors gleich 0.*

Daher faktorisiert der Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{Div}(C) \longrightarrow \mathbb{Z},\ D \longmapsto \deg(D),$$

durch die Divisorenklassengruppe von C. Daher ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 29.14. Es sei C eine glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zu einer invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ auf C definiert man den *Grad* durch den Grad eines zugehörigen Weildivisors.

Dabei ist zugehörig so zu verstehen, dass dem Divisor D die invertierbare Garbe $\mathcal{O}_C(D)$ entspricht, dass also effektive Divisoren den Schnitten in der Garbe entsprechen.

29. Arbeitsblatt

Aufgabe 29.1. Zeige, dass die folgenden Daten bzw. Konstruktionen den gleichen Morphismus

$$\mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

von der projektiven Geraden in sich festlegen (dabei seien $(a,b),(c,d) \in K^2$ linear unabhängig).

(1) Der induzierte Morphismus im Sinne von Satz 12.11 zum homogenen Ringhomomorphismus $K[X,Y] \to K[S,T]$ mit $X \mapsto aS+bT$, $Y \mapsto cS+dT$.
(2) Der Morphismus zu den beiden Schnitten

$$as+bt, cs+dt \in \Gamma\Big(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(1)\Big)$$

im Sinne von Lemma 28.1.
(3) Der Morphismus im Sinne von Lemma 29.7 zur rationalen Funktion $\frac{as+bt}{cs+dt} \in K\left(\frac{s}{t}\right)$.

Aufgabe 29.2. Zeige, dass es einen Morphismus

$$V(X^2-Y^3) \supseteq U = V(X^2-Y^3) \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{A}^1$$

gibt, den man nicht auf $V(X^2-Y^3)$ ausdehnen kann.

Aufgabe 29.3. Es sei K ein Körper und sei $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine ebene projektive Kurve. Es sei $P \in C$ ein Punkt der Kurve und sei

$$\varphi\colon\, C \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

der durch die Projektion weg vom Punkt definierte Morphismus. Bei dieser Abbildung wird also ein Punkt $Q \in C$, $Q \neq P$, auf die durch Q und P gegebene *Sekante* abgebildet.

(1) Sei $K = \mathbb{C}$ und sei Q_n eine Folge auf C, die in der komplexen Topologie gegen P konvergiert. Konvergiert $\varphi(Q_n)$?
(2) Besitzt $\varphi(Q_n)$ einen Häufungspunkt?
(3) Sei P ein glatter Punkt. Zeige, dass es eine Fortsetzung des Morphismus auf ganz C gibt.

Aufgabe 29.4. Diskutiere die Situation aus Aufgabe 29.3 für das Achsenkreuz

$$V_+(YZ) \subset \mathbb{P}^2$$

und den Kreuzungspunkt $(1, 0, 0)$.

Aufgabe 29.5.*

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und sei $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine irreduzible ebene projektive Kurve vom Grad d und sei

$$\varphi \colon C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

der durch eine Projektion weg von einem Punkt $P \notin C$ definierte Morphismus. Zeige, dass bis auf endlich viele Ausnahmen die Faser zu jedem Punkt $t \in \mathbb{P}^1_K$ aus genau d Punkten besteht.

Aufgabe 29.6. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine glatte Kurve vom Grad $d \geq 2$. Zeige, dass es einen Morphismus $C \to \mathbb{P}^1_K$ derart gibt, dass jede Faser aus maximal $d-1$ Punkten besteht.

Aufgabe 29.7. Es sei $C = V_+(X^3 + Y^3 + Z^3) \subset \mathbb{P}^2_K$ die *Fermat-Kubik* über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $\neq 3$. Beschreibe explizit einen Morphismus $C \to \mathbb{P}^1_K$, bei dem über jedem Punkt maximal zwei Punkte liegen.

Aufgabe 29.8. Es sei C eine irreduzible glatte projektive Kurve mit Funktionenkörper $Q(C) =$ und $q \in Q(C)$ mit zugehörigem Morphismus

$$q \colon C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K .$$

Sei $a \in K$. Zeige, dass es einen Automorphismus

$$\theta \colon \mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

derart gibt, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}^1_K \\ & q-a \searrow & \downarrow \theta \\ & & \mathbb{P}^1_K \end{array}$$

kommutiert.

Aufgabe 29.9. Es sei C eine irreduzible glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und sei $q \in Q(C)$ ein nichtkonstantes Element im Funktionenkörper $Q(C)$ mit dem zugehörigen Morphismus

$$q\colon\ C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K .$$

Zeige, dass zu jedem Punkt $P \in \mathbb{P}^1_K$ die zurückgezogenen Divisoren $q^*(P)$ untereinander linear äquivalent sind.

Verwende Aufgabe 29.8.

Aufgabe 29.10. Es sei $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$ die projektive Gerade mit Funktionenkörper $K(t)$, $t = \frac{Y}{X}$. Beschreibe den zugehörigen Schemamorphismus

$$\mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K,\ t \longmapsto t^n$$

für $n \in \mathbb{N}_+$. Was ist das Urbild des Nullpunktes, was ist das Urbild des unendlich fernen Punktes, wie sehen die Verzweigungsordnungen aus?

Aufgabe 29.11. Es sei $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$ die projektive Gerade mit Funktionenkörper $K(t)$, $t = \frac{Y}{X}$, und sei $P \in K[t]$ ein Polynom vom Grad $e \geq 1$. Beschreibe die Verzweigungsordnung in ∞ für den zugehörigen Schemamorphismus

$$\mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K,\ t \longmapsto P.$$

Aufgabe 29.12.*

Es seien $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$ und $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[W,Z])$ projektive Geraden mit den Funktionenkörpern $K(t)$, $t = \frac{Y}{X}$ bzw. $K(u)$, $u = \frac{Z}{W}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik $\neq 2$. Wir betrachten auf der zweiten projektiven Geraden das durch $WZ, W^2+Z^2 \in \Gamma\left(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(2)\right)$ gegebene lineare System mit der zugehörigen Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K,\ (w,z) \longmapsto (wz, w^2+z^2).$$

(1) Handelt es sich um ein volles lineares System?
(2) Bestimme die Urbilder zu $D_+(X)$ und $D_+(Y)$ und beschreibe die induzierten Abbildungen zwischen den affinen offenen Teilmengen.
(3) Handelt es sich um ein basispunktfreies lineares System?
(4) Beschreibe die zugehörige Körpererweiterung

$$K(t) \subseteq K(u)$$

der Funktionenkörper. Welchen Grad besitzt sie?
(5) Bestimme für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{P}^1_K$ das Urbild unter φ sowie die jeweilige Verzweigungsordnung.
(6) Beschreibe den zurückgezogenen Divisor $\varphi^*(0-\infty) = \varphi^*((Y)-(X))$.

Aufgabe 29.13. Es sei X ein normales noethersches integres Schema über einem Körper K und sei $q \in Q(X)$ ein Element des Funktionenkörpers von X. Zeige, dass q auf einer offenen Menge $U \subseteq X$ einen Morphismus

$$q\colon U \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

definiert, wobei die Kodimension von $X \setminus U$ zumindest 2 ist.

Aufgabe 29.14. Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe von negativem Grad auf einer irreduziblen glatten projektiven Kurve C über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Zeige

$$\Gamma(C, \mathcal{L}) = 0.$$

Aufgabe 29.15. Zeige, dass für eine glatte projektive Kurve C über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Grad von invertierbaren Garben ein surjektiver Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{Pic}(C) \longrightarrow \mathbb{Z},\ \mathcal{L} \longmapsto \deg(\mathcal{L}),$$

ist.

30. Vorlesung - Der Satz von Riemann-Roch

30.1. **Der Grad von getwisteten Strukturgarben auf ebenen Kurven.**

Lemma 30.1. *Es sei*

$$C = V_+(F) \subseteq \mathbb{P}^2_K$$

eine glatte projektive ebene Kurve vom Grad $d = \operatorname{grad}(F)$ *über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Dann besitzt die Einschränkung von* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(e)$ *auf* C *den Grad* de.

Beweis. Wir können $e = 1$ annehmen, da das Zurückziehen von Garben mit der Tensorierung verträglich ist und da der Grad nach Aufgabe 29.15 additiv bezüglich der Tensorierung von invertierbaren Garben ist. Es sei

$$G \in \Gamma\Big(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(1)\Big) = K[X,Y,Z]_1$$

ein Schnitt, der als Polynom in $K[X,Y,Z]$ kein Vielfaches von F sei. Dann kann man G auch als einen von 0 verschiedenen Schnitt in

$$\Gamma\Big(C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(1)|_C\Big) = \Gamma(C, \mathcal{O}_C(1))$$

betrachten. Es geht um den Grad des Nullstellendivisors zu G auf $C = V_+(F)$. Sei $P = (a,b,c) \in V_+(F)$ ein Punkt der Kurve. Die Nullstellenordnung eines Schnittes einer invertierbaren Garbe kann man in einer affinen Umgebung des Punktes ausrechnen. Ohne Einschränkung sei $c = 1$

und $P \in D_+(Z)$. Die affine Gleichung der Kurve ist dann die Dehomogenisierung von F bezüglich der Variablen Z und der Schnitt wird unter der Identifizierung

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}|D_+(Z) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(1)|D_+(Z),\, 1 \longmapsto Z$$

gleich der Dehomogenisierung G' von G. Der lokale Ring der Kurve ist

$$\mathcal{O}_{C,P} = \left(K[\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}]/(F')\right)_{(\frac{X}{Z}-a,\frac{Y}{Z}-b)}$$

und die Ordnung von G' in diesem Ring ist nach Lemma 21.9 gleich der K-Dimension von

$$\mathcal{O}_{C,P}/(G') = \left(K[\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}]/(F')\right)_{(\frac{X}{Z}-a,\frac{Y}{Z}-b)}/(G') = K[\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}]_{(\frac{X}{Z}-a,\frac{Y}{Z}-b)}/(F',G').$$

Diese Beschreibung ist symmetrisch in F und G. Deshalb ist der Grad des Nullstellendivisors zu G auf $V_+(F)$ gleich dem Grad des Nullstellendivisors zu F auf $V_+(G) = \mathbb{P}^1_K$. Für ein homogenes Polynom vom Grad d auf einer projektiven Geraden ist aber die Summe über alle Nullstellenordnungen gleich d. $\square$

30.2. **Der Satz von Riemann-Roch für invertierbare Garben.**

Es sei $C = V_+(F) \subset \mathbb{P}^2_K$ eine ebene projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K vom Grad d. Es sei

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}_C(e) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(e)|_C$$

Wir wollen die Anzahl der globalen Schnitte von $\mathcal{O}_C(e)$ berechnen. Dazu betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(e-d) \xrightarrow{F} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(e) \longrightarrow \mathcal{O}_C(e) \longrightarrow 0$$

auf der projektiven Ebene und den Anfang der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0\Big(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(e-d)\Big) \longrightarrow H^0\Big(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(e)\Big) \longrightarrow & \\ H^0\big(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_C(e)\big) \longrightarrow H^1\Big(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(e-d)\Big) &= 0, \end{aligned}$$

wobei die Gleichheit rechts auf Satz 27.4 beruht. Für $e \geq d$ kann man mit Aufgabe 11.4 die Dimensionen der beteiligten Vektorräume einfach ausrechnen, es ist

$$\begin{aligned} & \dim_K\big(H^0\big(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_C(e)\big)\big) \\ = \; & \dim_K\Big(H^0\Big(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(e)\Big)\Big) - \dim_K\Big(H^0\Big(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(e-d)\Big)\Big) \\ = \; & \binom{e+2}{2} - \binom{e-d+2}{2} \\ = \; & \frac{(e+2)(e+1)-(e+2-d)(e+1-d)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2de + 3d - d^2}{2} \\ &= de - \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Wegen

$$H^0\big(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_C(e)\big) \,=\, H^0(C, \mathcal{O}_C(e))$$

(nach Satz 27.6) ist dies die Vektorraumdimension der globalen Schnitte von $\mathcal{O}_C(e)$ über C. Dabei ist de nach Lemma 30.1 der Grad von $\mathcal{O}_C(e)$ und nach Satz 29.5 ist $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ das (kohomologische) Geschlecht g der Kurve. Für $e \geq d$ gilt also

$$\dim_K \big(H^0(C, \mathcal{O}_C(e))\big) \,=\, \operatorname{grad}(\mathcal{O}_C(e)) - g + 1.$$

Für $e < 0$ kann diese Formel nicht richtig sein, da dann die linke Seite 0 ist und die rechte Seite beliebig negativ wird. Der Satz von Riemann-Roch zeigt, dass für eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf einer glatten projektiven Kurve C eine entsprechende Formel gilt, bei der aber die linke Seite zu $\dim_K(H^0(C, \mathcal{L})) - \dim_K(H^1(C, \mathcal{L}))$ abgewandelt werden muss. Die erste Kohomologie tritt hier also als Korrekturterm auf.

Satz 30.2. *Es sei C eine irreduzible glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K vom Geschlecht g und sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf C. Dann ist*

$$h^0(C, \mathcal{L}) - h^1(C, \mathcal{L}) \,=\, \operatorname{grad}(\mathcal{L}) + 1 - g.$$

Beweis. Die Aussage ist für die Strukturgarbe richtig.

Zu einem abgeschlossenen Punkt $P \in C$ betrachtet man die kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_P \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \kappa(P) \longrightarrow 0\,,$$

wobei $\mathcal{I}_P = \mathcal{O}_C(-P)$ die (reduzierte) invertierbare Idealgarbe zu dem Punkt P ist und $\kappa(P)$ die Strukturgarbe auf dem Punkt, die man als Wolkenkratzergarbe auf C auffasst. Die Tensorierung dieser Sequenz mit einer invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ ergibt

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_P \otimes \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \kappa(P) \otimes \mathcal{L} = \kappa(P) \longrightarrow 0\,.$$

Diese exakten Sequenzen stiften eine Beziehung zwischen zwei invertierbaren Garben, die sich um den Punkt P unterscheiden. In einer solchen kurzen exakten Sequenz gilt wegen der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz die Beziehung

$$h^0(C, \mathcal{L}) - h^1(C, \mathcal{L}) \,=\, h^0(C, \mathcal{I}_P \otimes \mathcal{L}) - h^1(C, \mathcal{I}_P \otimes \mathcal{L}) + 1.$$

da $h^0(C, \kappa(P)) \,=\, 1$ und $h^1(C, \kappa(P)) \,=\, 0$ gilt, da der Träger nulldimensional ist. Wegen

$$\operatorname{grad}(\mathcal{I}_P) \,=\, -1$$

ist

$$\operatorname{grad}(\mathcal{L}) \;=\; \operatorname{grad}(\mathcal{I}_P \otimes \mathcal{L}) + 1$$

und der Grad verhält sich wie die Differenz der Dimensionen der nullten und der ersten Kohomologie. Die Formel von Riemann-Roch gilt also genau dann für $\mathcal{L}$, wenn sie für $\mathcal{I}_P \otimes \mathcal{L}$ gilt. Da jede invertierbare Garbe auf der Kurve nach Korollar 22.11 die Form $\mathcal{O}_C(-D)$ zu einem Weildivisor D besitzt, kann man jede invertierbare Garbe ausgehend von der Strukturgarbe durch eine endliche Hinzu- oder Wegnahme von Punkten erhalten. Daher gilt die Formel für alle invertierbaren Garben. □

Korollar 30.3. *Es sei C eine irreduzible glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K vom Geschlecht g und sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf C. Dann ist*

$$h^0(C, \mathcal{L}) \;\geq\; \operatorname{grad}(\mathcal{L}) + 1 - g.$$

Wenn der Grad von $\mathcal{L}$ zumindest so groß wie das Geschlecht der Kurve ist, so besitzt $\mathcal{L}$ nichttriviale globale Schnitte.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 30.2. □

Korollar 30.4. *Es sei C eine irreduzible glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann gibt es zu jedem abgeschlossenen Punkt $P \in C$ nichtkonstante rationale Funktionen $f \in Q(C)$, die außerhalb von P definiert sind.*

Beweis. Nach Korollar 30.3 besitzt die invertierbare Garbe $\mathcal{O}_C(nP)$ für n hinreichend groß nichttriviale globale Schnitte, und zwar unendlich viele mit wachsendem n. Diese entsprechen den rationalen Funktionen auf C, deren Hauptdivisor oberhalb von $-nP$ liegt. Eine solche Funktion hat also allenfalls in P einen Pol und ist somit auf $C \setminus \{P\}$ definiert. Darunter gibt es auch nicht konstante Funktionen. □

30.3. **Der Satz von Riemann-Roch für lokal freie Garben.**

Wir wollen den Satz von Riemann-Roch auf lokal freie Garben verallgemeinern. Dazu müssen wir zunächst den Grad einer lokal freien Garbe definieren.

Definition 30.5. Es sei C eine glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zu einer lokal freien Garbe $\mathcal{G}$ auf C vom Rang r definiert man den *Grad* durch den Grad der Determinantengarbe $\bigwedge^r \mathcal{G}$.

Satz 30.6. *Es sei C eine glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann ist der Grad von lokal freien Garben auf C additiv für kurze exakte Sequenzen.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 16.11. □

Somit haben wir drei additive Invarianten für lokal freie Garben auf einer glatten projektiven Kurve: den Rang, den Grad und die Euler-Charakteristik.

Lemma 30.7. *Es sei C eine irreduzible glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann ist jede von 0 verschiedene kohärente Idealgarbe $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_C$ invertierbar.*

Beweis. Da man die Invertierbarkeit lokal in den Halmen $\mathcal{O}_{C,x}$ testen kann, folgt die Aussage daraus, dass die lokalen Ringe diskrete Bewertungsringe und diese Hauptidealbereiche sind. □

Satz 30.8. *Es sei C eine irreduzible glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und sei $\mathcal{F}$ eine lokal freie Garbe auf C vom Rang auf C. Dann gibt es eine Filtration*

$$0 = \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_{r-1} \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F}$$

mit lokal freien Garben $\mathcal{F}_i$ derart, dass die Quotientengarben $\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ invertierbar sind.

Beweis. Zur dualen Garbe $\mathcal{F}^*$ gibt es für n hinreichend groß nach Satz 15.12 einen nichttrivialen globalen Schnitt $s \in \Gamma(C, \mathcal{F}^*(n))$, der einem nichttrivialen Modulhomomorphismus

$$\mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{F}^*(n)$$

entspricht. Dualisiert ergibt sich ein nichttrivialer Modulhomomorphismus

$$\mathcal{F}(-n) \longrightarrow \mathcal{O}_C.$$

Das Bild davon ist eine Idealgarbe $\mathcal{I} \neq 0$, die nach Lemma 30.6 invertierbar ist. Es gibt also einen surjektiven Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{F}(-n) \longrightarrow \mathcal{I}$$

und damit auch einen surjektiven Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_C(n) := \mathcal{L}.$$

Da $\mathcal{L}$ invertierbar ist, ist der Kern $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ nach Satz 16.7 lokal frei, und zwar von einem kleineren Rang. Induktive Anwendung dieses Verfahrens auf $\mathcal{F}_{r-1} := \mathcal{G}$ liefert die Filtration. □

Satz 30.9. *Es sei C eine irreduzible glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K vom Geschlecht g und sei $\mathcal{F}$ eine lokal freie Garbe auf C vom Rang r. Dann ist*

$$h^0(C, \mathcal{F}) - h^1(C, \mathcal{F}) = \operatorname{grad}(\mathcal{F}) + r(1-g).$$

Beweis. Wir führen Induktion über den Rang r, wobei der Induktionsanfang $r = 1$ durch Satz 30.2 gesichert ist. Sei eine lokal freie Garbe vom Rang r gegeben. Wir ziehen eine Filtation

$$0 = \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_{r-1} \subset \mathcal{F}_r$$

mit invertierbaren Quotienten $\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ heran, die es nach Satz 30.8 gibt. Insbesondere gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{r-1} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_r/\mathcal{F}_{r-1} \longrightarrow 0\,.$$

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung gilt die Formel von Riemann-Roch für $\mathcal{F}_{r-1}$ und wegen Satz 30.2 gilt sie für die invertierbare Garbe $\mathcal{F}_r/\mathcal{F}_{r-1}$. Da die Euler-Charakteristik, also

$$\chi(\mathcal{G}) \,=\, h^0(C,\mathcal{G}) - h^1(C,\mathcal{G})$$

nach Lemma 27.9 additiv für kurze exakte Sequenzen und da der Grad von lokal freien Garben nach Satz 30.7 ebenfalls additiv für kurze exakte Sequenzen ist, gilt die Formel auch für $\mathcal{F}$. $\square$

30. Arbeitsblatt

Aufgabe 30.1. Beweise für die projektive Gerade den Satz von Riemann-Roch direkt.

Aufgabe 30.2. Es sei $f \in K[X,Y,Z]$ ein homogenes Polynom vom Grad e über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K derart, dass

$$C \,=\, \operatorname{Proj}\left(K[X,Y,Z]/(f)\right) \,\subseteq\, \mathbb{P}^2_K$$

eine glatte projektive Kurve ist. Es seien

$$g_1,\ldots,g_n \,\in\, K[X,Y,Z]$$

homogene Elemente vom Grad $d_1,\ldots,d_n$ derart, dass die $D_+(g_i)$ die Kurve überdecken. Wir fassen die g_i als Garbenhomomorphismen $\mathcal{O}_C(-d_i) \to \mathcal{O}_C$, $h \mapsto hg_i$, (bzw. $\mathcal{O}_C(m-d_i) \to \mathcal{O}_C(m)$, $h \mapsto hg_i$, für $m \in \mathbb{Z}$) auf.

(1) Zeige, dass der Garbenhomomorphismus
$$\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_C(m-d_i) \longrightarrow \mathcal{O}_C(m)$$
surjektiv ist.
(2) Es sei $\operatorname{Syz}(g_1,\ldots,g_n)(m)$ die Kerngarbe zum Homomorphismus aus (1). Zeige, dass diese Garbe lokal frei ist.
(3) Bestimme den Rang von $\operatorname{Syz}(g_1,\ldots,g_n)(m)$.
(4) Bestimme den Grad von $\operatorname{Syz}(g_1,\ldots,g_n)(m)$.

Aufgabe 30.3. Man gebe auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K$ Beispiele für lokal freie Garben vom Rang 2 und vom Grad derart an, dass die Dimension der globalen Schnitte beliebig groß wird.

Aufgabe 30.4. Es sei (vergleiche Satz 19.8)

$$\mathrm{Syz}\,(x,y,z) \cong \Omega_{\mathbb{P}^2_K|K}$$

die Kotangentialgarbe auf der projektiven Ebene und sei $L \subseteq \mathbb{P}^2_K$ eine projektive Gerade. Zeige

$$\mathrm{Syz}\,(x,y,z)|_L \cong \mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L(-2).$$

Aufgabe 30.5. Es sei (vergleiche Satz 19.8)

$$\mathrm{Syz}\,(x,y,z) \cong \Omega_{\mathbb{P}^2_K|K}$$

die Kotangentialgarbe auf der projektiven Ebene und sei $C = V_+(F) \subseteq \mathbb{P}^2_K$ eine glatte Quadrik. Zeige $\mathrm{Syz}\,(x,y,z)|_C$ eine direkte Zerlegung als Summe von zwei invertierbaren Garben besitzt.

Betrachte einen Isomorphismus $\mathbb{P}^1_K \cong C$.

Abbildungsverzeichnis