Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Vorlesung 58

Um eine weitere wichtige Charakterisierung für Gradientenfelder beweisen zu können, müssen wir wissen, wie sich Integrale verhalten, die von Parametern abhängen.

Differenzierbarkeit des Integrals

Wir beginnen mit einem Beispiel.

Beispiel 58.1. Wir betrachten das Integral

$$\int_1^2 t^x dt\,,$$

wobei $x > -1$ sei. Eine Stammfunktion zu $t \mapsto t^x$ ist durch $\frac{1}{x+1} t^{x+1}$ gegeben. Daher ist

$$\int_1^2 t^x dt \,=\, \left(\frac{1}{x+1} t^{x+1} \right) |_1^2 \,=\, \frac{1}{x+1} \left(2^{x+1} - 1 \right) \,=\, g(x).$$

Diese Funktion $g(x)$ drückt den Wert des bestimmten Integrals zuum Parameter x aus. Ein Blick auf die Bauart zeigt, dass g stetig und auch differenzierbar ist, und zwar ist nach der Produktregel

$$g'(x) \,=\, \frac{-1}{(x+1)^2} \left(2^{x+1} - 1 \right) + \frac{1}{x+1} \left((\ln 2)\, 2^{x+1} \right).$$

Andererseits kann man auch die Funktion t^x nach x ableiten und erhält

$$\frac{\partial}{\partial x} t^x \,=\, (\ln t)\, t^x.$$

Eine Stammfunktion nach t zu dieser Funktion findet man mittels partieller Integration, nämlich

$$\int (\ln t)\, t^x \,=\, (\ln t) \frac{t^{x+1}}{x+1} - \int \frac{1}{t} \cdot \frac{t^{x+1}}{x+1},$$

und somit ist

$$\frac{\ln t}{x+1} \cdot t^{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} t^{x+1}$$

eine Stammfunktion. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\partial}{\partial x} t^x dt \,&=\, \int_1^2 (\ln t) \frac{t^{x+1}}{x+1} - \int \frac{1}{t} \cdot \frac{t^{x+1}}{x+1} dt \\ &=\, \left(\frac{\ln t}{x+1} \cdot t^{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} t^{x+1} \right)_1^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{\ln 2}{x+1} \cdot 2^{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} 2^{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Dies stimmt mit der Ableitung von g überein, d.h. es ist

$$\left(x \mapsto \int_1^2 t^x dt \right)' = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial x} t^x dt.$$

Dahinter verbirgt sich ein allgemeiner Zusammenhang, der in Satz 58.3 beschrieben wird.

Satz 58.2. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $[a, b]$ *ein kompaktes Intervall. Es sei*

$$f \colon X \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

eine stetige Funktion. Dann ist auch die Funktion

$$X \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \int_a^b f(x, t)\, dt,$$

stetig.

Beweis. Aufgrund von Satz 34.3 müssen wir für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit dem Grenzwert x zeigen, dass die Folge der Integrale

$$\int_a^b f(x_n, t)\, dt$$

gegen

$$\int_a^b f(x, t)\, dt$$

konvergiert. Aufgrund von Lemma 23.15 genügt es zu zeigen, dass die Funktionenfolge $f(x_n, -)$ gleichmäßig gegen $f(x, -)$ konvergiert. Nehmen wir also an, dass diese Folge nicht gleichmäßig konvergiert. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n$ und ein $t_m \in [a, b]$ gibt mit $|f(x_m, t_m) - f(x, t_m)| \geq \epsilon$. So können wir eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit zugehörigen Punkten t_{n_k} konstruieren, die diese Abstandbedingung erfüllen. Wegen Bolzano Weierstraß gibt es zu dieser Folge in $[a, b]$ eine konvergente Teilfolge, und durch Umbennen können wir annehmen, dass die Folge $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert, sagen wir gegen $t \in [a, b]$. Wegen der Stetigkeit von f und den Konvergenzeigenschaften gibt es ein k_0 derart, dass für alle $k \geq k_0$ die Abschätzungen $|f(x_{n_k}, t_{n_k}) - f(x, t)| \leq \frac{1}{3}\epsilon$ und $|f(x, t_{n_k}) - f(x, t)| \leq \frac{1}{3}\epsilon$ gelten. Damit ist

$$\begin{aligned} |f(x_{n_k}, t_{n_k}) - f(x, t_{n_k})| &\leq |f(x_{n_k}, t_{n_k}) - f(x, t)| + |f(x, t) - f(x, t_{n_k})| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Unter stärkeren Voraussetzungen hängen Integrale sogar differenzierbar von Parametern ab.

Satz 58.3. *Es seien $I = [a, b]$ und J reelle Intervalle,*

$$f\colon I \times J \longrightarrow \mathbb{R},\, (t, x) \longmapsto f(t, x),$$

eine stetige Abbildung, die in Richtung der Variablen x stetig partiell differenzierbar sei. Dann ist die Abbildung

$$J \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \int_a^b f(t, x)dt,$$

(nach x) differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x \mapsto \int_a^b f(t, x)dt\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t, x)dt.$$

Beweis. Aufgrund der Differenzierbarkeit von $f(t, x)$ nach x gibt es zu jedem $(s, p) \in I \times J$ nach Satz 18.5 eine in x stetige Funktion $r_s(x)$ mit $r_s(p) = 0$ und mit

$$f(s, x) = f(s, p) + \left(\frac{\partial}{\partial x} f(s, p)\right)(x - p) + r_s(x)(x - p).$$

Wir setzen

$$r(s, x) = r_s(x).$$

Wir zeigen zuerst, dass diese Funktion in den zwei Variablen s und x in jedem Punkt stetig ist. Bei $x \neq p$ kann man

$$r(s, x) = \frac{f(s, x) - f(s, p)}{x - p} - \frac{\partial}{\partial x} f(s, p)$$

auflösen und erhält so die Stetigkeit, da ja die partielle Ableitung nach Voraussetzung stetig ist. Bei $x = p$ verwenden wir das Folgenkriterium für die Stetigkeit. Sei also $(s_n,\, x_n)$ eine Folge, die gegen

$$(s, x) = (s, p)$$

konvergiert. Wir können dabei annehmen, dass $x_n \neq p$ für alle n ist, da ja $r(s_n, p) = 0$ ist. Es ist

$$\begin{aligned} |r(s_n, x_n) - r(s, p)| &= |r(s_n, x_n)| \\ &= \left|\frac{f(s_n, x_n) - f(s_n, p)}{x_n - p} - \frac{\partial}{\partial x} f(s_n, p)\right|. \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu jedem n ein $c_n \in [x_n, p]$ mit

$$\frac{f(s_n, x_n) - f(s_n, p)}{x_n - p} = \frac{\partial}{\partial x} f(s_n, c_n)$$

und somit ist der obige Ausdruck gleich

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(s_n, c_n) - \frac{\partial}{\partial x} f(s_n, p)\right|.$$

Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitung und wegen $c_n \to p$ wird dies beliebig klein.

In der eingangs formulierten Identität sind also alle Bestandteile stetig. Daher kann man beidseitig über $[a, b]$ integrieren und erhält ($x - p$ ist in der Integration konstant)

$$\int_a^b f(t,x)dt = \int_a^b f(t,p)dt + (x-p)\left(\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t,p)dt\right) + (x-p)\int_a^b r(t,x)dt.$$

Der Fehlerausdruck

$$R(x) = \int_a^b r(t,x)dt$$

ist stetig in x, da $r(t, x)$ stetig ist und wegen der Stetigkeit des Integrals. Ferner ist $R(p) = \int_a^b r(t,p) = 0$, so dass die Funktion $x \mapsto \int_a^b f(t,x)dt$ linear approximierbar und damit differenzierbar ist. □

Satz 58.4. *Es sei $I = [a, b]$ ein reelles Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und*

$$f\colon\, I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Abbildung, die in Richtung einer jeden Variablen x_i, $i = 1, \ldots, n$, stetig partiell differenzierbar sei. Dann ist die Abbildung

$$U \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_a^b f(t,x)dt,$$

partiell differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x \mapsto \int_a^b f(t,x)dt\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t,x)dt.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 58.3. □

Die Integrabilitätsbedingung

Wie kann man erkennen, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist? Eine notwendige Bedingung schlägt sich in der folgenden Definition nieder.

Definition 58.5. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und

$$G\colon\, U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein differenzierbares Vektorfeld. Man sagt, dass G die *Integrabilitätsbedingung* erfüllt (oder *lokal integrabel* ist), wenn

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(P) = \frac{\partial G_j}{\partial x_i}(P)$$

für alle $P \in U$ und alle i, j gilt.

Lemma 58.6. *Das Gradientenfeld einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion erfüllt die Integrabilitätsbedingung.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 44.10. □

Beispiel 58.7. Das lineare Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

erfüllt wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial G_2}{\partial x}$$

nicht die Integrabilitätsbedingung. Es kann also nach Lemma 58.6 kein Gradientenfeld sein.

Beispiel 58.8. Wir betrachten das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x).$$

Wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

erfüllt dieses Vektorfeld die Integrabilitätsbedingung. Es handelt sich aber nicht um ein Gradientenfeld: Das Wegintegral zur (geschlossenen) trigonometrischen Parametrisierung des Einheitskreises

$$\gamma\colon [0,2\pi] \longrightarrow,\ t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma G &= \int_0^{2\pi} \left\langle G(\gamma(t)), \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1 dt \\
&= 2\pi \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

im Gegensatz zu Korollar 57.9.

Definition 58.9. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bezüglich eines Punktes $P \in T$, wenn für jeden Punkt $Q \in T$ die Verbindungsstrecke $sQ + (1-s)P$, $s \in [0,1]$, ganz in T liegt.

Satz 58.10. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine sternförmige offene Teilmenge und*

$$G\colon\, U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

(1) *G ist ein Gradientenfeld.*
(2) *G erfüllt die Integrabilitätsbedingung.*
(3) *Für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma\colon\, [a,b] \to U$ hängt das Wegintegral $\int_\gamma G$ nur vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ ab.*

Beweis. Die Äquivalenz (1) $\Longleftrightarrow$ (3) folgt aus Satz 57.10 und die Implikation (1) $\Longrightarrow$ (2) aus Lemma 58.6. Es bleibt also (2) $\Longrightarrow$ (1) zu zeigen, wobei wir explizit eine Stammfunktion h zum Vektorfeld G angeben. Es sei $P \in U$ ein Punkt derart, dass U bezüglich P sternförmig ist. Wir definieren $h(Q)$ über das Wegintegral zu G zum linearen Verbindungsweg

$$\gamma\colon\, [0,1] \longrightarrow U,\, t \longmapsto P + t(Q-P),$$

also

$$h(Q) := \int_\gamma G = \int_0^1 \langle G(\gamma(t)), Q-P \rangle \, dt.$$

Wir müssen zeigen, dass der Gradient zu h gleich G ist, d.h. es ist $\frac{\partial h}{\partial x_i} = G_i$ zu zeigen. Dafür können wir $P = 0$ annehmen und wir schreiben v statt Q.

Mit diesen Bezeichnungen und Voraussetzungen ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} h(v) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^1 \langle G(tv), v \rangle \, dt \right) \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \langle G(tv), v \rangle \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n G_j(tv) \cdot v_j \right) \right) dt \\
&= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n v_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} G_j \right) (tv) + G_i(tv) dt \\
&= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n v_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} G_i \right) (tv) + G_i(tv) dt \\
&= \int_0^1 (t \mapsto t \cdot G_i(tv))' \, dt \\
&= (t \cdot G_i(tv)) \,|_0^1 \\
&= G_i(v).
\end{aligned}$$

Dabei beruht die zweite Gleichung auf der Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation (angewendet auf die stetig differenzierbare Funktion $[0,1] \times U \to \mathbb{R}$, $(t, v) \mapsto \langle G(tv), v \rangle$) die vierte Gleichung auf Aufgabe 43.11, die fünfte Gleichung auf der Integrabilitätsbedingung, die sechste Gleichung auf der Kettenregel und der Produktregel und die siebte Gleichung auf der Newton-Leibniz-Formel. $\square$

Abbildungsverzeichnis