**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2015**

# Analysis II

## Vorlesung 57

### Zur Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen

SATZ 57.1. *Es sei $V$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f \colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

*ein stetiges Vektorfeld auf $U$, das lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Es sei $J \subseteq I$ ein offenes Teilintervall und es seien*

$$v_1, v_2 \colon J \longrightarrow V$$

*Lösungen des Anfangswertproblems*

$$v' = f(t,v) \text{ und } v(t_0) = w\,.$$

*Dann ist $v_1 = v_2$.*

*Beweis.* Wir betrachten die Menge

$$M = \{t \in J \mid v_1(t) = v_2(t)\}\ .$$

Wegen $t_0 \in M$ ist diese Menge nicht leer. Zu jedem Punkt $t \in I$ gibt es nach Satz 56.2 eine offene Intervallumgebung $t \in J'$, worauf es zu gegebener Anfangsbedingung $v(t) = v_0$ genau eine Lösung der Differentialgleichung gibt. Wenn $t \in M$ ist, so ist $v_1(t) = v_2(t)$ und daher stimmen $v_1$ und $v_2$ in einer offenen Umgebung $t \in J'$ mit der eindeutigen Lösung und damit untereinander überein. Also ist $J' \subseteq M$. Dies bedeutet, dass $M$ eine offene Teilmenge von $J$ ist. Andererseits sind $v_1$ und $v_2$ stetig und daher ist nach Aufgabe 34.13 die Menge $M$ auch abgeschlossen in $J$. Da ein Intervall nach Satz 35.9 zusammenhängend ist, folgt $M = J$. $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass ohne die Lipschitz-Bedingung die Lösung eines Anfangswertproblems nicht eindeutig bestimmt ist.

BEISPIEL 57.2. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$v' = 3v^{2/3} \text{ mit } v(0) = 0$$

zum zeitunabhängigen Vektorfeld

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Offensichtlich gibt es die stationäre Lösung

$$h(t) = 0\,,$$

aber auch

$$g(t) = t^3$$

ist eine Lösung, wie man durch Nachrechnen sofort bestätigt. Aus diesen beiden Lösungen kann man sich noch weitere Lösungen basteln. Seien dazu $a < b$ reelle Zahlen. Dann ist auch

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-a)^3 \text{ für } t < a, \\ 0 \text{ für } a \leq t \leq b, \\ (t-b)^3 \text{ für } t > b, \end{cases}$$

eine Lösung. D.h. es gibt Lösungen, bei denen das Teilchen beliebig lange (im Zeitintervall von $a$ nach $b$) ruht und danach (und davor) sich bewegt. Sobald sich das Teilchen in einem Punkt $\neq 0$ befindet, ist der Bewegungsablauf lokal eindeutig bestimmt.

Bemerkung 57.3. Zu einem stetigen Vektorfeld

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

kann man sich fragen, ob es ein maximales Definitionsintervall $J$ für die Lösung eines Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

gibt. Dies ist in der Tat der Fall, wenn das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt! Man kann nämlich alle Teilmengen

$$J \subseteq I \text{ offen },\ t_0 \in J,\ \text{ es gibt eine Lösung } v_J \text{ auf } J$$

betrachten. Wegen Satz 57.1 stimmen zwei Lösungen $v_J$ und $v_{J'}$ auf dem Durchschnitt $J \cap J'$ überein, und liefern daher eine eindeutige Lösung auf der Vereinigung $J \cup J'$. Daher enthält die Menge der Teilintervalle, auf denen eine Lösung definiert ist, ein maximales Teilintervall $J$.

Dieses Teilintervall kann kleiner als $I$ sein. Die Grenzen des maximalen Teilintervalls, auf dem eine Lösung definiert ist, heißen auch *Entweichzeiten*.

Ein Beispiel für ein solches Verhalten hatten wir schon in Analysis 1 kennengelernt, siehe Beispiel 30.7.

## Gradientenfelder

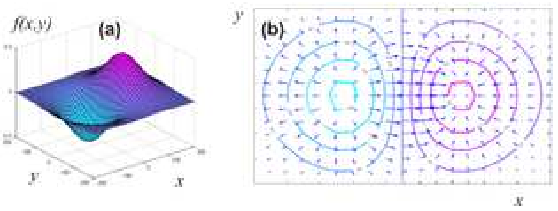
Definition 57.4. Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ offen und

$$h\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann nennt man die Abbildung

$$U \longrightarrow V,\ P \longmapsto \operatorname{Grad} h(P),$$

das zugehörige *Gradientenfeld*.




Ein Gradientenfeld ist also ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Man spricht auch von einem *Potentialfeld*, die Funktion $h$ (manchmal $-h$) heißt dann ein Potential des Vektorfeldes. Wenn $h$ zweimal stetig differenzierbar ist, so genügt nach Lemma 55.4 das zugehörige Gradientenfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Die folgende Aussage zeigt, dass die Lösungskurven der zugehörigen Differentialgleichung $v' = \text{Grad } h(v)$ senkrecht auf den Fasern von $h$ liegen. Die Fasern beschreiben, wo das Potential (oder die Höhenfunktion) konstant ist, die Lösungen beschreiben den Weg des steilsten Anstiegs. Wenn $h$ beispielsweise die Höhenfunktion eines Gebirges ist, so gibt das Gradientenfeld in jedem Punkt den steilsten Anstieg an und die Trajektorie einer Lösungskurve beschreibt den Verlauf eines Baches (wir behaupten nicht, dass die Bewegung eines Wassermoleküls im Bach durch diese Differentialgleichung bestimmt ist, sondern lediglich, dass der zurückgelegte Weg, also das Bild der Kurve, mit dem Bild der Lösungskurve übereinstimmt). Der Bach verläuft immer senkrecht zu den Höhenlinien.

Lemma 57.5. *Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ offen,*

$$h\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine differenzierbare Funktion und*

$$U \longrightarrow V,\ P \longmapsto G(P) = \text{Grad } h(P),$$

*das zugehörige Gradientenfeld. Es sei*

$$\varphi\colon J \longrightarrow U$$

*eine Lösung der Differentialgleichung*

$$v' = G(v)\,.$$

*Dann steht $\varphi'(t)$ senkrecht auf dem Tangentialraum $T_{\varphi(t)}F$ der Faser $F$ von $h$ durch $\varphi(t)$ für alle $t \in J$, für die $\varphi(t)$ reguläre Punkte von $h$ sind.*

*Beweis.* Sei $P = \varphi(t)$ ein regulärer Punkt von $h$ und sei $v \in T_PF = \text{kern}\,(Dh)_P$ ein Vektor aus dem Tangentialraum. Dann gilt direkt

$$\langle v, \varphi'(t)\rangle \;=\; \langle v, G(\varphi(t))\rangle \;=\; \langle v, \text{Grad } h(P)\rangle \;=\; (Dh)_P\,(v) \;=\; 0.$$

$\square$

Beispiel 57.6. Wir betrachten die *Produktabbildung*

$$h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto xy.$$

Das zugehörige Gradientenfeld ist

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y) \longmapsto G(x,y) = (y,x).$$

Die Fasern von $h$ sind das Achsenkreuz (die Faser über 0) und die durch $xy = c$, $c \neq 0$, gegebenen Hyperbeln. Die Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

sind von der Form

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (a \cosh t + b \sinh t\,, a \sinh t + b \cosh t\,)$$

mit beliebigen $a, b \in \mathbb{R}$, wie man direkt nachrechnet. Dabei ist $\varphi(0) = (a,b)$. Für $a = b = 0$ ist dies die stationäre Lösung im Nullpunkt, in dem die Produktabbildung nicht regulär ist. Bei $a = b = 1$ ist $\varphi(t) = (e^t, e^t)$, das Bild dieser Lösung ist die obere Halbdiagonale (ohne den Nullpunkt), bei $a = b = -1$ ist $\varphi(t) = (-e^t, -e^t)$, das Bild dieser Lösung ist die untere Halbdiagonale, bei $a = 1$ und $b = -1$ ist $\varphi(t) = (e^{-t}, -e^{-t})$, das Bild dieser Lösung ist die untere Hälfte der Nebendiagonalen, bei $a = -1$ und $b = 1$ ist $\varphi(t) = (-e^{-t}, e^{-t})$, das Bild dieser Lösung ist die obere Hälfte der Nebendiagonalen.

Ansonsten treffen die Lösungskurven das Achsenkreuz in einem Punkt $\neq (0,0)$. Wenn man diesen Punkt als Anfangswert zum Zeitpunkt $t = 0$ nimmt, so kann man die Lösungskurven als

$$(a \cosh t\,, a \sinh t\,)$$

(zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Lösung auf der $x-$Achse im Punkt $(a, 0)$), und als

$$(b \sinh t\,, b \cosh t\,)$$

(zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Lösung auf der $y-$Achse im Punkt $(0, b)$) realisieren. Die Bahnen dieser Lösungen erfüllen die Gleichung $x^2(t) - y^2(t) = a^2$ bzw. $x^2(t) - y^2(t) = b^2$, d.h. sie sind selbst Hyperbeln.

Bemerkung 57.7. Jedes stetige zeitunabhängige eindimensionale Vektorfeld ist ein Gradientenfeld. Ein solches Vektorfeld ist ja durch eine Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gegeben. Mit einer Stammfunktion

$$h\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zu $f$ kann man

$$f(P) = \operatorname{Grad} h(P)$$

schreiben. Für einen regulären Punkt zu $h$ ist das totale Differential injektiv und daher ist der Tangentialraum an der Faser der Nullraum. In diesem Fall ist also Lemma 57.5 ohne Relevanz.

### Wegintegrale und Gradientenfelder

Lemma 57.8. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und*

$$h\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine differenzierbare Funktion mit dem zugehörigen Gradientenfeld $G = \operatorname{Grad} h$. Es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg in $U$. Dann gilt für das Wegintegral*

$$\int_\gamma G = h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)).$$

*D.h. das Wegintegral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab.*[1]

*Beweis.* Aufgrund der Kettenregel ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma G &= \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt \\
&= \int_a^b \sum_{i=1}^n G_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) dt \\
&= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) dt \\
&= \int_a^b (h \circ \gamma)'(t) dt \\
&= h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

□

Korollar 57.9. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und*

$$h\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine differenzierbare Funktion mit dem zugehörigen Gradientenfeld $G = \operatorname{Grad} h$. Es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Dann ist*

$$\int_\gamma G = 0.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Lemma 57.8. □

[1] In einem Potentialfeld ist also die geleistete Arbeit gleich der Potentialdifferenz von Start- und Endpunkt.

Satz 57.10. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene zusammenhängende TeilmengeFuß-note und*

$$G \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(1) *$G$ ist ein Gradientenfeld.*
(2) *Für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma \colon [a, b] \to U$ hängt das Wegintegral $\int_\gamma G$ nur vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ ab.*

*Beweis.* Die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) folgt aus Lemma 57.8. Sei umgekehrt die Eigenschaft (2) erfüllt. Wir geben eine auf $U$ definierte Funktion $h$ an, die differenzierbar ist und deren Gradientenfeld gleich dem vorgegebenen Vektorfeld ist. Dazu sei ein Punkt $P \in U$ fixiert. Für jeden Punkt $Q \in U$ gibt es einen stetig differenzierbaren Weg[2]

$$\gamma \colon [a, b] \longrightarrow U$$

mit $\gamma(a) = P$ und $\gamma(b) = Q$. Wir setzen

$$h(Q) := \int_\gamma G.$$

Aufgrund der vorausgesetzten Wegunabhängigkeit des Integrals ist $h(Q)$ wohldefiniert. Wir müssen zeigen, dass diese so definierte Funktion in jedem Punkt $Q \in U$ und in jede Richtung $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und die Richtungsableitung mit $\langle G(Q), v\rangle$ übereinstimmt. Dazu betrachten wir

$$h(Q+tv)-h(Q) = \int_\delta G = \int_0^t \langle G(Q+sv), v\rangle \, ds = \int_0^t \sum_{i=1}^n G_i(Q+sv) \cdot v_i ds,$$

wobei $\delta$ der verbindende lineare Weg von $Q$ nach $Q+tv$ sei (und $t$ hinreichend klein sei, so dass $Q + tv \in U$ ist). Für den Differentialquotienten ist

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{h(Q+tv) - h(Q)}{t} &= \sum_{i=1}^n \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t G_i(Q+sv) \cdot v_i ds \\ &= \sum_{i=1}^n G_i(Q) \cdot v_i \\ &= \langle G(Q), v\rangle . \end{aligned}$$

Somit existiert die Richtungsableitung von $h$ in Richtung $v$ und hängt stetig von $Q$ ab. Diese Gleichung zeigt ferner

$$(Dh)_Q(v) = (D_v h)(Q) = \langle G(Q), v\rangle ,$$

so dass $G$ das Gradientenfeld zu $h$ ist. ☐

[2] Aus der Existenz eines verbindenden stetigen Weges folgt die Existenz eines verbindenden stetig differenzierbaren Weges. Man könnte also auch diese Eigenschaft als Definition für zusammenhängend nehmen.

# Abbildungsverzeichnis