Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Vorlesung 56

Differential- und Integralgleichungen

Mit dem Begriff des Integrals einer Kurve kann man Differentialgleichungen auch als Integralgleichungen schreiben.

Lemma 56.1. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein stetiges Vektorfeld auf U. Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ vorgegeben. Dann ist eine stetige Abbildung

$$v\colon J \longrightarrow V,\ t \longmapsto v(t),$$

auf einem Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems (insbesondere muss v differenzierbar sein)

$$v' = f(t,v) \text{ und } v(t_0) = w\,,$$

wenn v die Integralgleichung

$$v(t) = w + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds$$

erfüllt.

Beweis. Sei die Integralbedingung erfüllt. Dann ist $v(t_0) = w$ und aufgrund des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung gilt $v'(t) = f(t, v(t))$. Insbesondere sichert die Integralbedingung, dass v differenzierbar ist.Wenn umgekehrt v eine Lösung des Anfangswertproblems ist, so ist $v'(s) = f(s, v(s))$ und daher

$$w + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds \;=\; w + \int_{t_0}^{t} v'(s)\, ds \;=\; w + v(t) - v(t_0) \;=\; v(t).$$

$\square$

Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir kommen nun zum wichtigsten Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 56.2. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Es sei vorausgesetzt, dass dieses Vektorfeld stetig sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Dann gibt es zu jedem $(t_0, w) \in I \times U$ ein offenes Intervall J mit $t_0 \in J \subseteq I$ derart, dass auf diesem Intervall eine eindeutige Lösung für das Anfangswertproblem

$$v' = f(t,v) \text{ und } v(t_0) = w$$

existiert.

Beweis. Nach Lemma 56.1 ist eine stetige Abbildung

$$v\colon J \longrightarrow V$$

genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems, wenn v die Integralgleichung

$$v(t) \,=\, w + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds$$

erfüllt. Wir wollen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für diese Integralgleichung unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes dadurch erweisen, dass wir für die Abbildung (man spricht von einem *Funktional*)

$$\psi \longmapsto \left(t \mapsto w + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))\, ds\right)$$

einen Fixpunkt finden. Hierbei stehen links und rechts Abbildungen in t (aus einem gewissen Teilintervall von I mit Werten in V). mit Werten in V. Die Fixpunkteigenschaft $H(\psi) = \psi$ bedeutet gerade, dass $\psi(t) = w + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds$ ist. Um den Fixpunktsatz anwenden zu können müssen wir ein Definitionsintervall festlegen, und eine Metrik auf dem Abbildungsraum nach V definieren, diesen metrischen Raum dann als vollständig und das Funktional als stark kontrahierend nachweisen. Aufgrund der Voraussetzung über die lokale Lipschitz-Bedingung gibt es eine offene Umgebung

$$(t_0, w) \in J' \times U(w, \epsilon) \subseteq I \times U$$

und ein $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$|| f(t,v) - f(t,\tilde{v}) || \leq L \, || v - \tilde{v} ||$$

für alle $t \in J'$ und $v, \tilde{v} \in U(w, \epsilon)$. Durch Verkleinern der Radien können wir annehmen, dass der Abschluss von $J' \times U(w, \epsilon)$, also das Produkt des abgeschlossenen Intervalls mit der abgeschlossenen Kugel, ebenfalls in $I \times U$ liegt. Aufgrund von Satz 36.12 gibt es ein $M \in \mathbb{R}_+$ mit

$$|| f(t,v) || \leq M \text{ für alle } (t,v) \in J' \times U(w, \epsilon)$$

(da diese Beschränktheit auf dem Abschluss gilt). Wir ersetzen nun J' durch ein kleineres Intervall $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq J'$ mit $\delta > 0$, $\delta \leq \epsilon/M$ und $\delta \leq 1/(2L)$. Wir betrachten nun die Menge der stetigen Abbildungen

$$\begin{aligned} C &= \{\psi : J \to V |\, \psi \text{ stetig}, \,||\, \psi(t) - w \,|| \leq \epsilon \text{ für alle } t \in J\} \\ &= \{\psi : J \to V |\, \psi \text{ stetig}, \,||\, \psi - w \,|| \leq \epsilon\}\,. \end{aligned}$$

Dabei wird also C mit der Maximumsnorm auf J versehen. Dieser Raum ist nach Satz 55.9 und nach Aufgabe 36.14 wieder ein vollständiger metrischer Raum. Wir betrachten nun auf diesem konstruierten Intervall J bzw. der zugehörigen Menge C die Abbildung

$$H\colon\, C \longrightarrow C,\, \psi \longmapsto H(\psi) = (t \mapsto w + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s))\, ds).$$

Dazu müssen wir zunächst zeigen, dass $H(\psi)$ wieder zu C gehört. Für $t \in J$ ist aber nach Satz 39.1

$$\begin{aligned} ||\, H(\psi)(t) - w \,|| &= ||\int_{t_0}^t f(s, \psi(s))\, ds \,|| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t ||\, f(s, \psi(s)) \,||\ ds \right| \\ &\leq |t - t_0|\, M \\ &\leq \frac{\epsilon}{M} M \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

und $H(\psi)$ ist stetig, da es durch ein Integral definiert wird. Zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft seien $\psi_1, \psi_2 \in C$ gegeben. Für ein $t \in J$ ist

$$\begin{aligned} ||\, H(\psi_1)(t) - H(\psi_2)(t) \,|| &= ||\int_{t_0}^t f(s, \psi_1(s))\, ds - \int_{t_0}^t f(s, \psi_2(s))\, ds \,|| \\ &= ||\int_{t_0}^t (f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s)))\, ds \,|| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t ||\, f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s)) \,||\ ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \,||\, \psi_1(s) - \psi_2(s) \,||\ ds \right| \\ &= L \cdot \left| \int_{t_0}^t ||\, \psi_1(s) - \psi_2(s) \,||\ ds \right| \\ &\leq L \cdot \left| \int_{t_0}^t ||\, \psi_1 - \psi_2 \,||\ ds \right| \\ &\leq L\, |t - t_0| \cdot ||\, \psi_1 - \psi_2 \,|| \\ &\leq \frac{1}{2}\, ||\, \psi_1 - \psi_2 \,||\,. \end{aligned}$$

Da dies für jedes $t \in J$ gilt, folgt aus dieser Abschätzung direkt

$$||\, H(\psi_1) - H(\psi_2) \,|| \leq \frac{1}{2}\, ||\, \psi_1 - \psi_2 \,||,$$

d.h. es liegt eine starke Kontraktion vor. Daher besitzt H ein eindeutiges Fixelement $\psi \in C$, und diese Abbildung löst die Differentialgleichung. Dies gilt dann erst recht auf jedem offenen Teilintervall von J. Damit haben wir insbesondere bewiesen, dass es in C nur eine Lösung geben kann, wir wollen aber generell auf dem Intervall J Eindeutigkeit erhalten. Für eine Lösung $v\colon J \to V$ gilt aber wegen der Integralbeziehung wieder

$$v(t) \,=\, w + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))ds$$

und die gleichen Abschätzungen wie weiter oben zeigen, dass die Lösung zu C gehören muss. $\square$

Die Picard-Lindelöf-Iteration

Der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf ist prinzipiell konstruktiv. Darauf beruht die *Picard-Lindelöf-Iteration*, mit der man Lösungen approximieren kann. Die Güte der Approximationen wird dabei durch geeignete Normen auf Funktionenräumen gemessen, was wir nicht ausführen.

Bemerkung 56.3. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$F\colon\, I \times U \longrightarrow V,\, (t, v) \longmapsto F(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ eine Anfangsbedingung. Es sei vorausgesetzt, dass dieses Vektorfeld stetig sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. In der *Picard-Lindelöf-Iteration* definiert man iterativ eine Folge von Funktionen

$$\varphi_n\colon\, I \longrightarrow V$$

durch $\varphi_0 = w$ (dies ist also die konstante Funktion mit dem Wert w) und durch

$$\varphi_{n+1}(t) \,=\, w + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_n(s))ds.$$

Dann gibt es ein Teilintervall $]a, b[\subseteq I$ mit $t_0 \in]a, b[$ derart, dass für $t \in]a, b[$ die Folge $\varphi_n(t)$ gegen einen Punkt $\varphi(t)$ konvergiert, wobei gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Die Grenzfunktion φ ist dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w\,.$$

Bei einer linearen Differentialgleichung mit stetigen Koeffizientenfunktionen konvergiert dieses Verfahren auf ganz I.

Bemerkung 56.4. Zu einem ortsunabhängigen Vektorfeld

$$F\colon\, I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, (t, v) \longmapsto F(t, v) = F(t),$$

und der Anfangsbedingung $v(0) = w$ führt die erste Picard-Lindelöf-Iteration auf

$$\varphi_1(t) = w + \int_0^t F(s,w)ds = w + \int_0^t F(s)ds = w + G(t),$$

wobei $G(t)$ eine Stammkurve zu $F(t)$ sei. Die erste Iteration liefert hier also direkt die Lösung. Die kontrahierende Abbildung im Beweis zu Satz 56.2 ist in dieser Situation konstant.

Wir wenden dieses approximative Verfahren auf eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen an, für die wir die Lösung schon kennen (siehe Aufgabe 30.6).

Beispiel 56.5. Wir wenden die Picard-Lindelöf-Iteration auf die Differentialgleichung

$$y' = F(t,y) = ty$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(0) = 1$$

an (die Lösung ist $e^{\frac{1}{2}t^2}$). Daher ist $\varphi_0 = 1$. Die erste Iteration liefert

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t sds = 1 + \frac{1}{2}t^2.$$

Die zweite Iteration liefert

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= 1 + \int_0^t F(s, \varphi_1(s))\, ds \\ &= 1 + \int_0^t F\left(s, 1 + \frac{1}{2}s^2\right) ds \\ &= 1 + \int_0^t s + \frac{1}{2}s^3 ds \\ &= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4. \end{aligned}$$

Die dritte Iteration liefert

$$\begin{aligned} \varphi_3(t) &= 1 + \int_0^t F(s, \varphi_2(s))\, ds \\ &= 1 + \int_0^t F\left(s, 1 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{8}s^4\right) ds \\ &= 1 + \int_0^t s + \frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{8}s^5 ds \\ &= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{48}t^6. \end{aligned}$$

Dabei stimmt die i-te Iteration mit der Taylor-Entwicklung der Ordnung $2i$ der Lösung überein.

Bemerkung 56.6. Es sei

$$v' = Mv$$

eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten auf dem $\mathbb{R}^n$ und es sei eine Anfangsbedingung $v(0) = w$ gegeben. Wir behaupten, dass die n-te Picard-Lindelöf-Iteration gleich

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^{\circ k}(w) t^k$$

ist, wobei $M^{\circ k}$ die k-fache Potenz der Matrix bezeichnet. Diese Aussage zeigen wir durch Induktion nach n. Für $n = 0$ steht rechts einfach die konstante Kurve w. Sei die Aussage nun für n schon bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(t) &= w + \int_0^t M(\varphi_n(s))ds \\
&= w + \int_0^t M\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^{\circ k}(w) s^k\right) ds \\
&= w + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \int_0^t s^k M\left(M^{\circ k}(w)\right) ds \\
&= w + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \int_0^t s^k M^{\circ k+1}(w) ds \\
&= w + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(k+1)} t^{k+1} M^{\circ k+1}(w) \\
&= w + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} t^{k+1} M^{\circ k+1}(w) \\
&= w + \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{\ell!} t^{\ell} M^{\circ \ell}(w) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n+1} \frac{1}{\ell!} t^{\ell} M^{\circ \ell}(w)
\end{aligned}$$

und die Aussage ist auch für $n + 1$ richtig. Diese Approximationen sind die Anfangsglieder in der „Exponentialreihe in dem Ausdruck“ tM. Man kann zeigen, dass diese Exponentialreihe auf $\mathbb{R}$ konvergiert und in der Tat die Lösung des Anfangswertproblems ist (der Satz von Picard-Lindelöf sichert nur die Konvergenz auf einer Intervallumgebung).

Beispiel 56.7. Wir wenden die Picard-Lindelöf-Iteration auf das Anfangswertproblem

$$v(0) = (0, 0)$$

zum Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t, x, y) \longmapsto (t^2 y - xy^2, x^3 - y + t)$$

an. Es ist

$$\varphi_0(t) = (0,0).$$

Daher ist

$$\varphi_1(t) = \int_0^t (0,s)ds = \left(0,\, \frac{1}{2}t^2\right).$$

Es ist

$$F(s,\varphi_1(s)) = \left(s^2\frac{1}{2}s^2,\, -\frac{1}{2}s^2+s\right) = \left(\frac{1}{2}s^4,\, -\frac{1}{2}s^2+s\right)$$

und daher

$$\varphi_2(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{2}s^4,\, -\frac{1}{2}s^2+s\right)ds = \left(\frac{1}{10}t^5,\, -\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2\right).$$

Wegen

$$\begin{aligned} F(s,\varphi_2(s)) &= \left(s^2\left(-\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{2}s^2\right)-\frac{1}{10}s^5\left(-\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{2}s^2\right)^2,\, \left(\frac{1}{10}t^5\right)^3-\left(-\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{2}s^2\right)+s\right) \\ &= \left(-\frac{1}{6}s^5+\frac{1}{2}s^4-\frac{1}{10}s^5\left(\frac{1}{36}s^6-\frac{1}{6}s^5+\frac{1}{4}s^4\right),\, \frac{1}{1000}s^{15}+\frac{1}{6}s^3-\frac{1}{2}s^2+s\right) \\ &= \left(-\frac{1}{360}s^{11}+\frac{1}{60}s^{10}-\frac{1}{40}s^9-\frac{1}{6}s^5+\frac{1}{2}s^4,\, \frac{1}{1000}s^{15}+\frac{1}{6}s^3-\frac{1}{2}s^2+s\right) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \varphi_3(t) &= \int_0^t \left(-\frac{1}{360}s^{11}+\frac{1}{60}s^{10}-\frac{1}{40}s^9-\frac{1}{6}s^5+\frac{1}{2}s^4,\, \frac{1}{1000}s^{15}+\frac{1}{6}s^3-\frac{1}{2}s^2+s\right)ds \\ &= \left(-\frac{1}{4320}t^{12}+\frac{1}{660}t^{11}-\frac{1}{400}t^{10}-\frac{1}{36}t^6+\frac{1}{10}t^5,\, \frac{1}{16000}t^{16}+\frac{1}{24}t^4-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2\right). \end{aligned}$$