Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Vorlesung 55

Der Satz über die injektive Abbildung

Als ein weiteres Korollar aus dem Satz über die Umkehrabbildung besprechen wir die Situation, wo das totale Differential injektiv ist.

SATZ 55.1. *Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen und sei*

$$\varphi\colon G \longrightarrow W$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt, in dem das totale Differential $(D\varphi)_P$ injektiv sei. Dann gibt es eine offene Umgebung U, $P \in U \subseteq G$, derart, dass $\varphi|_U$ injektiv ist.

Beweis. Es sei $\dim(V) = k$ und $\dim(W) = n$. Es sei $B = (D\varphi)_P(V)$ das Bild des totalen Differentials $(D\varphi)_P$. Nach Satz Anhang.1 (1) ist $B \subseteq W$ ein Untervektorraum der Dimension $\dim(B) = k$. Wir ergänzen eine Basis von B durch $w_1, \ldots, w_{n-k}$ zu einer Basis von W und setzen $C = \langle w_1, \ldots, w_{n-k} \rangle$. Wir betrachten die Abbildung

$$\psi\colon G \times C \longrightarrow W,\, (v,w) \longmapsto \varphi(v) + w,$$

wobei links und rechts zwei n-dimensionale Vektorräume stehen. Diese Abbildung kann man als die Hintereinanderschaltung

$$G \times C \stackrel{\varphi \times \mathrm{Id}_C}{\longrightarrow} W \times C \stackrel{+}{\longrightarrow} W$$

auffassen. Daher ist die Gesamtabbildung stetig differenzierbar und das totale Differential ist $(D\varphi)_P + i_C$, wobei $i_C : C \to W$ die lineare Einbettung des Unterraums ist. Dieses totale Differential ist surjektiv im Punkt $(P, 0)$, da sowohl B als auch C zum Bild gehören, und somit bijektiv. Wir können also den Satz über die Umkehrabbildung anwenden und erhalten offene Mengen $U_1 \subseteq G \times C$ und $U_2 \subseteq W$ derart, dass $(\varphi \times \mathrm{Id}_C)|_{U_1}$ ein Diffeomorphismus zwischen U_1 und U_2 ist. Dies können wir einschränken auf eine offene Menge der Form $U_3 \times U_4 \subseteq U_1$ mit $P \in U_3 \subseteq G$ und $0 \in U_4 \subseteq C$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi|_{U_3}\colon U_3 \longrightarrow W$$

injektiv, da dies die Hintereinanderschaltung

$$U_3 \longrightarrow U_3 \times U_4 \longrightarrow U_2 \subseteq W$$

mit $Q \mapsto (Q, 0)$ ist. $\square$

Lipschitz-Bedingungen

Rudolf Lipschitz (1832-1903)

Wir kehren zu Differentialgleichungen zurück und wollen den Satz von Picard-Lindelöf beweisen, einen wichtigen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen. Dafür wird die Voraussetzung wesentlich sein, dass das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Definition 55.2. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Man sagt, dass das Vektorfeld f einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es eine reelle Zahl $L \geq 0$ gibt mit

$$|| f(t,u) - f(t,v) || \leq L \cdot || u - v ||$$

für alle $t \in I$ und $u, v \in U$.

Die reelle Zahl L nennt man auch eine *Lipschitz-Konstante* für das Vektorfeld f.

Definition 55.3. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Man sagt, dass das Vektorfeld f *lokal* einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es zu jedem Punkt $(t,v) \in I \times U$ eine offene Umgebung

$$(t,v) \in I' \times U' \subseteq I \times U$$

derart gibt, dass das auf $I' \times U'$ eingeschränkte Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Die folgende Aussage liefert ein wichtiges und leicht überprüfbares hinreichendes Kriterium, wann ein Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Lemma 55.4. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles offenes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und*

$$f\colon I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (t, v_1, \ldots, v_n) \longmapsto f(t, v_1, \ldots, v_n),$$

ein Vektorfeld auf U derart, dass die partiellen Ableitungen nach v_j existieren und stetig sind. Dann genügt f lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Beweis. Sei $P = (t, v) = (t, v_1, \ldots, v_n)$ ein Punkt in $I \times U$ und sei

$$U(t, \epsilon) \times U(v, \epsilon)$$

eine offene Umgebung von P innerhalb von $I \times U$ derart, dass auch

$$B = B(t, \epsilon) \times B(v, \epsilon) \subseteq I \times U$$

ist. Dieses B ist eine abgeschlossene Umgebung von P und daher kompakt. Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial v_j}$ nach Voraussetzung stetig sind, gibt es nach Satz 36.12 eine gemeinsame Schranke $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|| \frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q) || \leq c$$

für alle $Q \in B$. Daher gibt es für die Matrizen $\left(\frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ eine Schranke L mit

$$|| \left(\frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q)\right)_{1 \leq i,j \leq n} || \leq L.$$

Man kann daher zu jedem festen Zeitpunkt $s \in U(t, \epsilon)$ Lemma 51.2 anwenden und erhält für $u, u' \in U(v, \epsilon)$ die Abschätzung

$$|| f(s, u) - f(s, u') || \leq L \cdot ||u - u'|| .$$

□

Abbildungsräume und Supremumsnorm

Wir stellen noch einige funktionalanalytische Hilfsmittel für den Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf bereit. Wir verallgemeinern den Begriff der punktweisen (gleichmäßigen) Konvergenz von Funktionenfolgen auf metrische Räume.

Definition 55.5. Es sei T eine Menge, M ein metrischer Raum und

$$f_n\colon T \longrightarrow M,$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von Abbildungen. Man sagt, dass die Abbildungsfolge *punktweise konvergiert*, wenn für jedes $x \in T$ die Folge

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert.

Definition 55.6. Es sei T eine Menge, M ein metrischer Raum und

$$f_n\colon T \longrightarrow M,$$

$(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Abbildungen, die punktweise konvergiert. Dann nennt man die Abbildung

$$T \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

die *Grenzabbildung* der Abbildungsfolge.

Definition 55.7. Es sei T eine Menge, M ein metrischer Raum und

$$f_n\colon T \longrightarrow M,$$

$(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Abbildungen. Man sagt, dass die Abbildungsfolge *gleichmäßig konvergiert*, wenn es eine Abbildung

$$f\colon T \longrightarrow M$$

derart gibt, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 gibt mit

$$d\,(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in T\,.$$

Bei gleichmäßiger Konvergenz liegt insbesondere punktweise Konvergenz vor und f ist die Grenzabbildung.

Lemma 55.8. *Es seien L und M metrische Räume und es sei*

$$f_n\colon L \longrightarrow M$$

eine Folge von stetigen Abbildungen, die gleichmäßig gegen die Abbildung f konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis. Sei $x \in L$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein n_0 mit $d\,(f_n(y), f(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $n \geq n_0$ und alle $y \in L$. Wegen der Stetigkeit von f_{n_0} in x gibt es ein $\delta > 0$ mit $d\,(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $y \in L$ mit $d\,(x, y) \leq \delta$. Für diese y gilt somit

$$\begin{aligned} d\,(f(x), f(y)) &\leq d\,(f(x), f_{n_0}(x)) + d\,(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d\,(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Wir erinnern an die Definition der Supremumsnorm.

Es sei T eine Menge und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$\|\,f\,\| := \|\,f\,\|_T = \sup\,(|f(x)|\,|x \in T)$$

das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f. Es ist eine nichtnegative reelle Zahl oder ∞.

Diese Definition kann man direkt verallgemeinern, wenn die Werte der Abbildungen in einem euklidischen Vektorraum liegen. Es sei also T eine Menge und E sei ein euklidischer Vektorraum. In dieser Situation definiert man zu einer Abbildung

$$f\colon\, T \longrightarrow E$$

$$\|\, f\,\| := \|\, f\,\|_T = \sup\,(\|\, f(x)\,\|, x \in T)$$

und nennt dies das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f (falls das Supremum nicht existiert, ist dies als ∞ zu interpretieren).

Wir setzen $M = \operatorname{Abb}(T, E)$; dies ist ein (i.A. unendlichdimensionaler) reeller Vektorraum. Die Supremumsnorm erfüllt die folgenden Eigenschaften (die geeignet zu interpretieren sind, falls ∞ auftritt).

(1) $\|\, f\,\| \geq 0$ für alle $f \in M$.
(2) $\|\, f\,\| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in M$ gilt

$$\|\,\lambda f\,\| = |\lambda| \cdot \|\, f\,\| \ .$$

(4) Für $g, f \in M$ gilt

$$\|\, g + f\,\| \leq \|\, g\,\| + \|\, f\,\| \ .$$

Wenn T ein metrischer Raum ist, so betrachtet man

$$C = \{f : T \to E |\, f \text{ stetig}\} \ .$$

Dieser ist ein reeller Untervektorraum von M. Wenn $T \subseteq \mathbb{R}^k$ nichtleer, abgeschlossen und beschränkt ist, so ist nach Satz 36.12 das Supremum von $\|\, f(x)\,\|$, $x \in T$, gleich dem Maximum, d.h. es gibt ein $x \in T$ derart, dass $\|\, f(x')\,\| \leq \|\, f(x)\,\|$ für alle $x' \in T$ gilt. Daher ist in diesem Fall das Supremum stets eine reelle Zahl, und stimmt mit dem Maximum überein. Man spricht daher auch von der *Maximumsnorm.*

Satz 55.9. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ eine kompakte Teilmenge, es sei E ein euklidischer Vektorraum und es sei*

$$C = C(T, E)$$

der Vektorraum der stetigen Abbildungen von T nach E. Dann ist C, versehen mit der Maximumsnorm, ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. Es sei

$$f_n\colon\, T \longrightarrow E$$

eine Cauchy-Folge von stetigen Abbildungen. Wir müssen zeigen, dass diese Folge gegen eine Grenzabbildung konvergiert, die ebenfalls stetig ist. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$\|\, f_n(x) - f_m(x)\,\| \leq \epsilon$$

für alle $x \in T$ gilt. Daher ist für jedes $x \in T$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in E und somit, wegen der Vollständigkeit von euklidischen

Räumen, konvergent in E. Wir nennen den Grenzwert dieser Folge $f(x)$, so dass sich insgesamt eine Grenzabbildung

$$f\colon\, T \longrightarrow E,\, x \longmapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

ergibt, gegen die die Funktionenfolge punktweise konvergiert. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es zu jedem vorgegebenen $\epsilon > 0$ stets ein n_0 derart, dass die Cauchy-Bedingung für alle $x \in T$ gilt, konvergiert die Funktionenfolge sogar gleichmäßig gegen f (und das bedeutet die Konvergenz in der Supremumsnorm). Aufgrund von Lemma 55.8 ist daher f stetig und daher ist $f \in C$. $\square$

Abbildungsverzeichnis