Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Vorlesung 51

Für eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi'(P) > 0$ in einem Punkt $P \in \mathbb{R}$ gibt es ein offenes Intervall $P \in I =]P-\delta, P+\delta[$, auf dem φ' überall positiv ist und daher φ nach Satz 19.5 streng wächst. In diesem Fall ist die eingeschränkte Abbildung $I \to \varphi(I) = J$ bijektiv und die nach Satz 13.6 stetige Umkehrabbildung ist nach Satz 18.10 ebenfalls differenzierbar. Diese Aussage verallgemeinern wir auf höhere Dimensionen.

Der Satz über die Umkehrabbildung

Beispiel 51.1. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x+y, xy).$$

Diese Abbildung ist nicht injektiv, da (x,y) und (y,x) auf das gleiche Tupel abgebildet wird, und auch nicht surjektiv, da beispielsweise $(0,1)$ nicht im Bild liegt. Trotzdem kann man das Gleichungssystem $u = x+y$ und $v = xy$ in gewisser Hinsicht auflösen, also x und y durch u und v ausdrücken. Zunächst ist

$$x = u - y$$

und damit

$$v = xy = (u-y)y = uy - y^2$$

oder

$$y^2 - uy + v = 0.$$

Damit ist

$$y = \pm\sqrt{\frac{u^2}{4} - v} + \frac{u}{2}$$

und somit

$$x = \mp\sqrt{\frac{u^2}{4} - v} + \frac{u}{2}.$$

Bis auf die Wahl der Vorzeichen kann man also die Urbilder zu (u,v) rekonstruieren. Dies zeigt erneut, dass es manchmal mehrere Urbilder und manchmal keine Urbilder gibt (wenn die Wurzel keine reelle Lösung hat). Ein eindeutiges Urbild existiert genau dann, wenn der Radikand gleich 0 ist, also bei

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{u^2}{4} - v \\ &= \frac{(x+y)^2}{4} - xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{4} \\ &= \frac{x^2-2xy+y^2}{4} = \frac{(y-x)^2}{4}, \end{aligned}$$

d.h. bei $x = y$. In einem Punkt (x, x) verhält sich die Abbildung φ insofern gut, dass das Bild davon (also $(2x, x^2)$) nur ein Urbild (nämlich (x, x)) besitzt. Diese Eigenschaft überträgt sich aber auf keine offene Umgebung des Punktes, da ja $(x+h, x-h)$ und $(x-h, x+h)$ beide auf $(2x, x^2-h^2)$ abgebildet werden. In dieser Hinsicht verhalten sich die anderen Punkte besser. Sei (x_0, y_0) gegeben mit (sagen wir)

$$y_0 > x_0.$$

Dann besitzt

$$(u_0, v_0) = (x_0+y_0, x_0 y_0)$$

wie oben ausgerechnet zwei Urbildpunkte, und zwar ist (der Startpunkt legt die Vorzeichen fest)

$$(x_0, y_0) = \left(-\sqrt{\frac{u_0^2}{4} - v_0} + \frac{u_0}{2}, \sqrt{\frac{u_0^2}{4} - v_0} + \frac{u_0}{2} \right).$$

Diese Formeln kann man unter der Bedingung, dass

$$\frac{u^2}{4} - v > 0,$$

als „lokale Umkehrabbildung“ interpretieren, und dies ist in einer offenen Umgebung U_2 von (u_0, v_0) erfüllt. Das Bild von U_2 unter dieser lokalen Umkehrabbildung ist eine offene Umgebung U_1 von (x_0, y_0), und die Einschränkung führt zu einer bijektiven Abbildung

$$\varphi|_{U_1} \colon U_1 \longrightarrow U_2$$

mit der angegebenen Umkehrabbildung.

Der *Satz über die (lokale) Umkehrabbildung* gehört zu den wichtigsten Sätzen der mehrdimensionalen Analysis. Er besagt, dass eine stetig differenzierbare Abbildung φ zwischen endlichdimensionalen reellen Vektorräumen, für die das totale Differential in einem Punkt P bijektiv ist (was voraussetzt, dass die Dimension des Definitionsraum mit der Dimension des Zielraums übereinstimmt), die Abbildung selbst auf geeigneten kleinen offenen Umgebungen von P und von $\varphi(P)$ eine Bijektion ist. D.h. die Abbildung verhält sich *lokal* so wie das totale Differential.

Wir brauchen einige Vorbereitungen. Der Beweis des folgenden Lemmas ist schon eine gute Einstimmung für den Beweis des folgenden Hauptsatzes.

LEMMA 51.2. *Es seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume, $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ offene Teilmengen und sei*

$$\varphi \colon U_1 \longrightarrow U_2 \subseteq V_2$$

eine bijektive differenzierbare Abbildung. Sei $P \in U_1$. Das totale Differential

$$(D\varphi)_P$$

sei bijektiv und die Umkehrabbildung

$$\psi\colon\, U_2 \longrightarrow U_1$$

sei stetig in $Q = \varphi(P)$. Dann ist die Umkehrabbildung differenzierbar in Q und für ihre Ableitung gilt

$$(D\psi)_Q = ((D\varphi)_P)^{-1}\,.$$

Beweis. Zuerst kann man durch Verschiebungen im Definitionsraum und im Zielraum annehmen, dass $P = 0$ und $\varphi(P) = 0$ ist. Es sei $D = (D\varphi)_P$ die durch das totale Differential gegebene bijektive lineare Abbildung mit der linearen Umkehrabbildung D^{-1}. Wir betrachten die Gesamtabbildung

$$U_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{D^{-1}} V_1\,.$$

Diese ist wieder differenzierbar, und das totale Differential davon ist $D^{-1} \circ D = \mathrm{Id}$ nach der Kettenregel. Wenn wir für diese zusammengesetzte Abbildung die Aussage zeigen können, so folgt die Aussage auch für φ, da eine lineare Abbildung differenzierbar ist. Wir können also annehmen, dass φ eine differenzierbare Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ ist, deren totales Differential in 0 die Identität ist. Nach diesen Reduktionen bedeutet die Differenzierbarkeit von φ in 0, dass der Limes

$$\lim_{v \to 0} \frac{\varphi(v) - v}{|| v ||} \,=\, 0$$

ist. Wir müssen entsprechend für die Umkehrabbildung ψ die Beziehung

$$\lim_{w \to 0} \frac{\psi(w) - w}{|| w ||} \,=\, 0$$

zeigen. Es genügt, dies für jede Folge $w_n \to 0$ nachzuweisen. Eine solche Folge kann man eindeutig schreiben als $w_n = \varphi(v_n)$ (mit $v_n = \psi(w_n)$) und aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von ψ konvergiert auch die Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0. Also ist

$$\begin{aligned}
\frac{|| \psi(w_n) - w_n ||}{|| w_n ||} &= \frac{|| \psi(\varphi(v_n)) - \varphi(v_n) ||}{|| \varphi(v_n) ||} \\
&= \frac{|| v_n - \varphi(v_n) ||}{|| \varphi(v_n) ||} \\
&= \frac{|| \varphi(v_n) - v_n ||}{|| \varphi(v_n) ||}.
\end{aligned}$$

Wegen $\varphi(v) = v + \, || \, v \, || \, \cdot r(v)$ mit $\lim_{v \to 0} r(v) = 0$ gibt es eine hinreichend kleine Umgebung von 0 derart, dass

$$|| \varphi(v) || = || v + || v || \cdot r(v) || \geq \frac{1}{2} \, || v || \,.$$

Daher lässt sich die obere Gleichungskette (für n hinreichend groß) fortsetzen durch

$$\leq 2 \cdot \frac{||\,\varphi(v_n) - v_n\,||}{||\,v_n\,||}\,,$$

und dies konvergiert gegen 0. $\square$

Im Allgemeinen ist eine differenzierbare Abbildung nicht bijektiv. Man kann das Lemma aber häufig anwenden, indem man zu einer kleineren offenen Umgebung des Punktes P übergeht und für diese die Bijektivität auf das Bild zeigt.

Im Beweis des folgenden Satzes geht die folgende Version des Mittelwertsatzes ein. Wir versehen Homomorphismenräume $\operatorname{Hom}(V, W)$ mit der Norm

$$||\,\psi\,|| := \sup\left(||\,\psi(v)\,||, ||\,v\,|| = 1\right).$$

Lemma 51.3. *Seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ sei offen und enthalte mit je zwei Punkten die Verbindungsgerade. Es sei*

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow W$$

eine differenzierbare Abbildung und es gelte

$$||\,(D\varphi)_P\,|| \leq\, b$$

für alle $P \in G$. Dann gilt für $P, Q \in G$ die Abschätzung

$$||\,\varphi(Q) - \varphi(P)\,|| \leq ||\,Q - P\,|| \cdot b.$$

Beweis. Bei $P = Q$ ist nichts zu zeigen, sei also $P \neq Q$. Wir betrachten die Abbildung

$$h\colon\, [0, ||\,Q - P\,||] \longrightarrow W,\, t \longmapsto \varphi\left(P + t\frac{Q - P}{||\,Q - P\,||}\right).$$

Da nach Voraussetzung $P + t\frac{Q-P}{||Q-P||} \in G$ ist, ist dies eine differenzierbare Kurve in W. Daher gibt es nach der Mittelwertabschätzung für Kurven ein $c \in [0, ||\,Q - P\,||]$ mit

$$\begin{aligned}
||\,\varphi(P) - \varphi(Q)\,|| &\leq ||\,Q - P\,|| \cdot ||\,h'(c)\,|| \\
&= ||\,Q - P\,|| \cdot ||\,(D\varphi)_{P + c\frac{Q-P}{||Q-P||}}\left(\frac{Q - P}{||\,Q - P\,||}\right)|| \\
&= ||\,Q - P\,|| \cdot ||\,(D\varphi)_{P + c\frac{Q-P}{||Q-P||}}\,|| \cdot ||\,\frac{Q - P}{||\,Q - P\,||}\,|| \\
&\leq ||\,Q - P\,|| \cdot ||\,(D\varphi)_{P + c\frac{Q-P}{||Q-P||}}\,|| \\
&\leq ||\,Q - P\,|| \cdot b.
\end{aligned}$$

$\square$

Der folgende Satz, der *Satz über die lokale Umkehrabbildung*, besagt, dass eine stetig differenzierbare Abbildung in einer geeigneten offenen Umgebung eines Punktes bijektiv ist, wenn die Ableitung in diesem Punkt bijektiv ist.

D.h., dass sich die Abbildung lokal so verhält wie die lineare Approximation. Die Bedingung, dass das totale Differential in einem Punkt bijektiv ist, lässt sich einfach mit der Determinante überprüfen.

Satz 51.4. *Es seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V_1$ offen und es sei*

$$\varphi\colon G \longrightarrow V_2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt derart, dass das totale Differential

$$(D\varphi)_P$$

bijektiv ist. Dann gibt es eine offene Menge $U_1 \subseteq G$ und eine offene Menge $U_2 \subseteq V_2$ mit $P \in U_1$ und mit $\varphi(P) \in U_2$ derart, dass φ eine Bijektion

$$\varphi|_{U_1}\colon U_1 \longrightarrow U_2$$

induziert, und dass die Umkehrabbildung

$$(\varphi|_{U_1})^{-1}\colon U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Beweis. Wir beginnen mit einigen Reduktionen. Zuerst kann man durch Verschiebungen im Definitionsraum und im Zielraum annehmen, dass $P = 0$ und $\varphi(P) = 0$ ist. Es sei $D = (D\varphi)_P$ die durch das totale Differential gegebene bijektive lineare Abbildung mit der linearen Umkehrabbildung D^{-1}. Wir betrachten die Gesamtabbildung

$$G \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{D^{-1}} V_1 .$$

Diese ist wieder stetig differenzierbar, und das totale Differential davon ist $D^{-1} \circ D = \mathrm{Id}$. Wenn wir für diese zusammengesetzte Abbildung die Aussage zeigen können, so folgt die Aussage auch für φ, da eine lineare Abbildung stetig differenzierbar ist. Wir können also annehmen, dass $\varphi\colon V_1 \to V_1 = V_2$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ ist, deren totales Differential in 0 die Identität ist. Wir werden dennoch von V_1 und V_2 sprechen, um klar zu machen, ob sich etwas im Definitionsraum oder im Zielraum abspielt. Sei $y \in V_2$ fixiert. Wir betrachten die Hilfsabbildung

$$H_y\colon G \longrightarrow V_2,\ x \longmapsto H_y(x) = x - \varphi(x) + y.$$

Diese Hilfabbildung erfüllt folgende Eigenschaft: Ein Punkt $x \in G$ ist genau dann ein Fixpunkt von H_y, also ein Punkt mit $H_y(x) = x - \varphi(x) + y = x$, wenn $\varphi(x) = y$ ist, d.h. wenn x ein Urbild von y unter φ ist. Die Abbildungen H_y sind selbst stetig differenzierbar und es gilt $(DH_y)_x = \mathrm{Id} - (D\varphi)_x$. Wir möchten den Banachschen Fixpunktsatz auf H_y anwenden, um dafür einen Fixpunkt zu gewinnen und diesen als Urbildpunkt von y unter φ nachweisen zu können. Wir fixieren eine euklidische Norm. Wegen der Stetigkeit von $x \mapsto (D\varphi)_x$ und wegen

$$(D\varphi)_0 = \mathrm{Id}$$

gibt es ein $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, derart, dass für alle $x \in B(0,r)$ die Abschätzung

$$|| (DH_y)_x || = || \mathrm{Id} - (D\varphi)_x || \leq \frac{1}{2}$$

gilt. Für jedes $x \in B(0,r)$ gilt daher nach der Mittelwertabschätzung die Abschätzung

$$\begin{aligned} || x - \varphi(x) || &= || H_0(x) || \\ &= || H_0(x) - H_0(0) || \\ &\leq \frac{1}{2} || x || \,. \end{aligned}$$

Für $y \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$ und $x \in B(0,r)$ gilt

$$\begin{aligned} || H_y(x) || &= || x - \varphi(x) + y || \\ &\leq || x - \varphi(x) || + || y || \\ &\leq \frac{|| x ||}{2} + \frac{r}{2} \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &= r. \end{aligned}$$

Für jedes $y \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$ liegt also eine Abbildung

$$H_y \colon \; B(0,r) \longrightarrow B(0,r)$$

vor. Wegen der oben formulierten Ableitungseigenschaft und aufgrund der Mittelwertabschätzung gilt für zwei Punkte $x_1, x_2 \in B(0,r)$ die Abschätzung

$$|| H_y(x_1) - H_y(x_2) || \leq \frac{1}{2} || x_1 - x_2 ||,$$

so dass H_y eine stark kontrahierende Abbildung ist. Da ein euklidischer Vektorraum und damit auch die abgeschlossene Kugel $B(0,r)$ vollständig sind (siehe Aufgabe 36.6 und Aufgabe 36.14), besitzt jede Abbildung H_y aufgrund des Banachschen Fixpunktsatzes genau einen Fixpunkt aus $B\left(0, \frac{r}{2}\right)$, den wir mit $\psi(y)$ bezeichnen. Aufgrund der eingangs gemachten Überlegung ist $\varphi(\psi(y)) = y$. Zu $y \in U\left(0, \frac{r}{2}\right)$ gehört das eindeutige Urbild $x \in B(0,r)$ zur offenen Kugel $U(0,r)$, wie die obige Abschätzung zeigt. Wir setzen $U_2 = U\left(0, \frac{r}{2}\right)$ und $U_1 = \varphi^{-1}(U_2) \cap U(0,r)$, wobei U_1 aufgrund der Stetigkeit von φ offen ist. Die eingeschränkte Abbildung

$$\varphi|_{U_1} \colon \; U_1 \longrightarrow U_2, \; x \longmapsto \varphi(x)$$

ist wieder stetig und bijektiv. Insbesondere gibt es eine Umkehrabbildung

$$\psi \colon \; U_2 \longrightarrow U_1,$$

die wir als stetig differenzierbar nachweisen müssen. Wir zeigen zuerst, dass ψ Lipschitz-stetig ist mit der Lipschitz-Konstanten 2. Seien $y_1, y_2 \in U_2$ gegeben mit den eindeutigen Elementen $x_1, x_2 \in U_1$ mit $\varphi(x_1) = y_1$ und $\varphi(x_2) = y_2$. Es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} || x_2 - x_1 || &= || H_0(x_2) + \varphi(x_2) - H_0(x_1) - \varphi(x_1) || \\ &\leq || H_0(x_2) - H_0(x_1) || + || \varphi(x_2) - \varphi(x_1) || \end{aligned}$$

$$\leq \; \frac{1}{2}\,||\,x_2 - x_1\,|| + ||\,\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\,||,$$

wobei die letzte Abschätzung auf obiger Überlegung beruht. Durch Umstellung ergibt sich

$$||\,\psi(y_2) - \psi(y_1)\,|| = ||\,x_2 - x_1\,|| \leq \; 2\;||\,y_2 - y_1\,||\;.$$

Aufgrund von Lemma 51.2 ist ψ auch differenzierbar und es gilt die Formel

$$(D\psi)_y \;=\; ((D\varphi)_{\psi(y)})^{-1}.$$

Aus dieser Darstellung lässt sich auch die stetige Abhängigkeit der Ableitung von y ablesen, da ψ stetig ist, da das totale Differential von φ nach Voraussetzung stetig von $x = \psi(y)$ abhängt und da das Bilden der Umkehrmatrix ebenfalls stetig ist. $\square$