Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Vorlesung 36

Weitere Stetigkeitsbegriffe

Wir führen einige weitere Stetigkeitsbegriffe ein.

Definition 36.1. Es sei

$$f\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit folgender Eigenschaft: Für alle $x, x' \in L$ mit $d(x, x') \leq \delta$ ist $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$.

Definition 36.2. Es sei

$$f\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Die Abbildung heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine reelle Zahl $c \geq 0$ mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in L$ gibt.

Eine solche Zahl c heißt *Lipschitz-Konstante*. Lipschitz-stetige Funktionen mit einer Lipschitz-Konstanten < 1 bekommen einen eigenen Namen.

Definition 36.3. Es sei

$$f\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann heißt f *stark kontrahierend*, wenn es eine nichtnegative reelle Zahl $c < 1$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in L$.

Die Zahl c nennt man auch einen *Kontraktionsfaktor*.

Der Banachsche Fixpunktsatz

Wenn man eine Karte von Osnabrück in die Osnabrücker Reithalle legt und einen beliebigen Punkt von Osnabrück nimmt, so definiert dieser Punkt einen Punkt auf der Karte und damit auch den zugehörigen Punkt in der Reithalle. Diesem Punkt entspricht ein Kartenpunkt, der wiederum ein Punkt in der Reithalle ist, und so weiter. Man erhält also eine Folge von Punkten, die -

abhängig vom Maßstab - schnell konvergiert, und zwar gegen einen Punkt, der mit seinem Punkt auf der Karte übereinstimmt. Diese Beobachtung wird im *Banachschen Fixpunktsatz* präzisiert.

Definition 36.4. Es sei M eine Menge und

$$f\colon M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

Definition 36.5. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum M heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$d\left(x_n, x_m\right) \leq \epsilon$$

gilt.

Definition 36.6. Ein metrischer Raum M heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert.

Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ und jede abgeschlossene Teilmenge davon ist vollständig.

Satz 36.7. *Es sei M ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und*

$$f\colon M \longrightarrow M$$

eine stark kontrahierende Abbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

Beweis. Es sei $c \in \mathbb{R}$, $0 \leq c < 1$, ein Kontraktionsfaktor, d.h. es gelte

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leq c \cdot d\left(x, y\right)$$

für alle $x, y \in M$. Wenn $x, y \in M$ Fixpunkte sind, so folgt aus

$$d(x, y) \,=\, d(f(x), f(y)) \,<\, c \cdot d(x, y)$$

sofort $d(x, y) = 0$ und somit $x = y$, es kann also maximal einen Fixpunkt geben.

Sei nun $x \in M$ ein beliebiger Punkt. Wir betrachten die durch

$$x_0 = x \text{ und } x_n := f^n(x) := f(x_{n-1})$$

rekursiv definierte Folge in M. Wir setzen $a = d\left(f(x), x\right)$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$d\left(f^{n+1}(x), f^n(x)\right) \,\leq\, c \cdot d\left(f^n(x), f^{n-1}(x)\right) \,\leq\, c^n \cdot d\left(f(x), x\right) \,=\, c^n a.$$

Daher gilt aufgrund der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe für $n \geq m$ die Beziehung

$$\begin{aligned} & d\left(f^n(x), f^m(x)\right) \\ \leq\; & d\left(f^n(x), f^{n-1}(x)\right) + d\left(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)\right) + \cdots + d\left(f^{m+1}(x), f^m(x)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq a\left(c^{n-1}+c^{n-2}+\cdots+c^{m+1}+c^{m}\right)\\
&= ac^{m}\left(c^{n-m-1}+c^{n-m-2}+\cdots+c^{2}+c^{1}+1\right)\\
&\leq c^{m}a\frac{1}{1-c}.
\end{aligned}$$

Zu einem gegebenen $\epsilon > 0$ wählt man n_0 mit $c^{n_0}a\frac{1}{1-c} \leq \epsilon$. Dies zeigt, dass eine Cauchy-Folge vorliegt, die aufgrund der Vollständigkeit gegen ein $y \in M$ konvergiert. Wir zeigen, dass dieses y ein Fixpunkt ist. Die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(y)$, da eine kontrahierende Abbildung stetig ist. Andererseits stimmt diese Bildfolge mit der Ausgangsfolge bis auf die Indizierung überein, so dass der Grenzwert y sein muss. □

Kompaktheit

Definition 36.8. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz 36.9. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge. Dann ist T genau dann kompakt, wenn jede Folge in T eine in T konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis. Wenn T nicht beschränkt ist, so gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in T$ mit $d(x_n, 0) \geq n$. Diese Folge kann keine konvergente Teilfolge besitzen. Wenn T nicht abgeschlossen ist, so gibt es nach Satz 33.16 eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T$, die gegen ein $x \in \mathbb{R}^m$, $x \notin T$, konvergiert. Jede Teilfolge davon konvergiert ebenfalls gegen x, so dass es keine in T konvergente Teilfolge geben kann.

Sei nun T abgeschlossen und beschränkt, und sei eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T$ vorgegeben. Für diese Folge ist insbesondere jede Komponentenfolge $(x_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Wir betrachten die erste Komponente $i = 1$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gibt es eine Teilfolge $\left(x_{n_j}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass die erste Komponente dieser Folge konvergiert. Aus dieser Teilfolge wählen wir nun eine weitere Teilfolge derart, dass auch die zweite Komponentenfolge konvergiert. Insgesamt erhält man durch dieses Verfahren eine Teilfolge, wo jede Komponentenfolge konvergiert. Nach Lemma 33.13 konvergiert dann die gesamte Teilfolge in $\mathbb{R}^m$. Da T abgeschlossen ist, liegt nach Satz 33.16 der Grenzwert in T. □

Satz 36.10. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und sei*

$$f\colon T \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung in einen metrischen Raum M. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir nehmen an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass für kein $\delta > 0$ die Beziehung $f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \epsilon)$ für alle $x \in T$ erfüllt ist. Insbesondere gibt es also für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ein

Paar $x_n, y_n \in T$ mit $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$, aber mit $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Wegen der Kompaktheit gibt es aufgrund von Satz 36.9 eine Teilfolge $(x_n)_{n \in N}$ (dabei ist $N \subseteq \mathbb{N}$ unendlich) von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in T$ konvergiert. Die entsprechende Teilfolge $(y_n)_{n \in N}$ konvergiert ebenfalls gegen x. Wegen der Stetigkeit konvergieren die beiden Bildfolgen $(f(x_n))_{n \in N}$ und $(f(y_n))_{n \in N}$ gegen $f(x)$. Dies ergibt aber einen Widerspruch, da $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$ ist. $\square$

Satz 36.11. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und*

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetige Abbildung. Dann ist auch das Bild $f(T)$ kompakt.

Beweis. Es sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in f(T)$ eine Folge, wobei wir $y_n = f(x_n)$ mit $x_n \in T$ schreiben können. Da T kompakt ist, gibt es nach Satz 36.9 eine konvergente Teilfolge x_{n_i}, $i \in \mathbb{N}$, die gegen ein $x \in T$ konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit konvergiert auch die Bildfolge $y_{n_i} = f(x_{n_i})$ gegen $f(x)$. Damit ist eine konvergente Teilfolge gefunden und $f(T)$ ist kompakt nach Satz 36.9. $\square$

Satz 36.12. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere kompakte Teilmenge und sei*

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es $x \in T$ mit

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in T\,.$$

D.h., dass die Funktion ihr Maximum (und ihr Minimum) annimmt.

Beweis. Aufgrund von Satz 36.11 ist $f(T)$ kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Insbesondere ist $f(T) \leq M$ für eine reelle Zahl M. Wegen $T \neq \emptyset$ besitzt $f(T)$ wegen Satz 7.5 ein Supremum s in $\mathbb{R}$, das wegen der Abgeschlossenheit nach Korollar 33.17 zu $f(T)$ gehört, also das Maximum von $f(T)$ ist. Daher gibt es auch ein $x \in T$ mit $f(x) = s$. $\square$

Lemma 36.13. *Sei $P \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{K}$ mit*

$$|P(z)| \geq |P(w)|$$

für alle $z \in \mathbb{K}$. D.h. das Minimum des Betrags eines Polynoms wird angenommen.

Beweis. Es sei

$$P(z) \;=\; a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

(mit $a_n \neq 0$). Wir setzen $a \;:=\; \max\left(|a_i|\,, i = 0, \ldots, n-1\right)$ und

$$r \;:=\; \max\left(\frac{na + |a_0| + 1}{|a_n|}, 1\right).$$

Bei $n = 0$ ist die Aussage klar, sei also $n \geq 1$. Für z mit $|z| \geq r$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n z^n| - \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| \\ &\geq |a_n|\,|z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\,|z|^i \\ &\geq |a_n|\,|z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} a\,|z|^{n-1} \\ &\geq |z|^{n-1}\,(|a_n|\,|z| - na) \\ &\geq |a_0| + 1 \\ &> |a_0|\,. \end{aligned}$$

Auf der kompakten Menge $B(0,r)$ nimmt die stetige Funktion $z \mapsto |P(z)|$ nach Satz 36.12 ihr Minimum an, d.h. es gibt ein $w \in B(0,r)$ mit $|P(z)| \geq |P(w)|$ für alle $z \in B(0,r)$. Wegen $|a_0| = |P(0)| \geq |P(w)|$ und der Überlegung für z mit $|z| \geq r$ ergibt sich, dass im Punkt w überhaupt das Minimum der Funktion angenommen wird. □

Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz 36.14. *Jedes nichtkonstante Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ über den komplexen Zahlen besitzt eine Nullstelle.*

Beweis. Es sei $P \in \mathbb{C}[Z]$ ein nichtkonstantes Polynom. Aufgrund von Lemma 36.13 gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir müssen zeigen, dass dieses Betragsminimum 0 ist. Wir nehmen also an, dass $|P(z_0)| > 0$ ist, und müssen dann ein z_1 finden, an dem der Betrag des Polynoms kleiner wird. Durch Verschieben (d.h. indem wir die Situation in der neuen Variablen $z - z_0$ betrachten) können wir annehmen, dass das Minimum an der Stelle 0 angenommen wird, und durch Division durch $P(z_0)$ können wir annehmen, dass das Polynom im Nullpunkt den Wert 1 besitzt. D.h. wir können annehmen, dass ein Polynom

$$P = 1 + c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \cdots + c_d z^d$$

mit $k \geq 1$ und $c_k \neq 0$ vorliegt, das im Nullpunkt das Betragsminimum annimmt. Wegen Korollar 21.9 gibt es ein $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $\gamma^k = -c_k^{-1}$. Wir setzen $z = \gamma w$ (das ist eine Variablenstreckung). In der neuen Variablen w erhalten wir ein Polynom der Form

$$1 - w^k + w^{k+1} Q(w)\,,$$

das nach wie vor im Nullpunkt das Betragsminimum annimmt (hierbei ist $Q(w) \in \mathbb{C}[w]$ ein Polynom). Aufgrund von Satz 36.12 gibt es ein $b \in \mathbb{R}_+$ mit

$|Q(w)| \leq b$ für alle $w \in B\,(0,1)$. Für reelles w mit $0 < w < \min\,(1, b^{-1})$ gilt

$$\begin{aligned}\left|1 - w^k + w^{k+1}Q(w)\right| &\leq \left|1 - w^k\right| + \left|w^{k+1}Q(w)\right| \\ &= 1 - w^k + w^{k+1}\,|Q(w)| \\ &= 1 - w^k(1 - w\,|Q(w)|) \\ &< 1.\end{aligned}$$

Wir haben also Stellen gefunden, wo der Betrag des Polynoms einen kleineren Wert annimmt, ein Widerspruch. $\square$