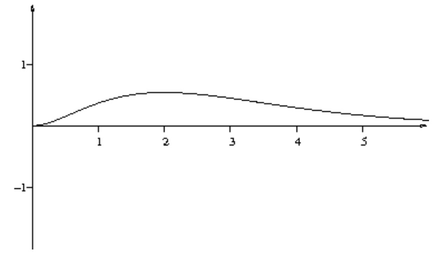
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

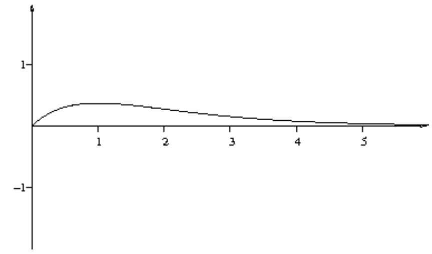
Analysis II

Vorlesung 32

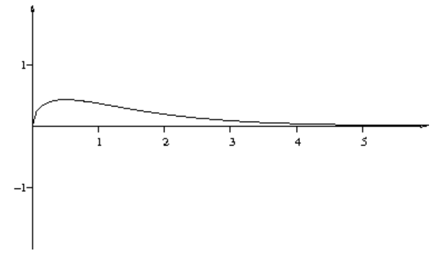
Die Fakultätsfunktion



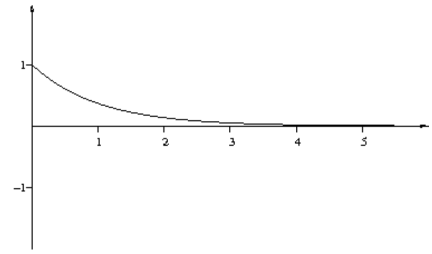
t^2e^{-t}



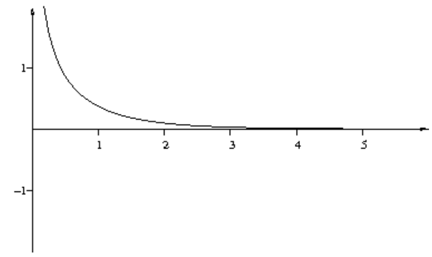
te^{-t}



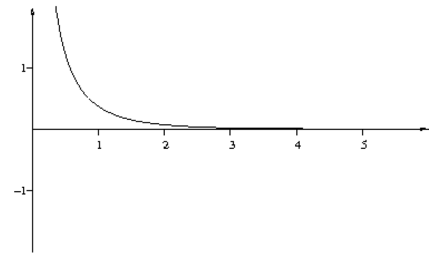
$t^{\frac{1}{2}}e^{-t}$



e^{-t}



$t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}$



$t^{-1}e^{-t}$

Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Dabei gilt die rekursive Beziehung $n! = n \cdot ((n-1)!)$. Gibt es eine Möglichkeit, diese für die natürlichen Zahlen definierte Funktion auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ durch eine differenzierbare Funktion f fortzusetzen? Ist es sogar möglich, dass dabei die Beziehung $f(x) = xf(x-1)$ für jedes x gilt? Wir werden mit Hilfe von uneigentlichen Integralen zeigen, dass dies in der Tat möglich ist.

Beispiel 32.1. Sei $x > -1$. Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto t^x e^{-t}.$$

Wir behaupten, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

existiert. Für den rechten Rand (also ∞) betrachten wir eine natürliche Zahl $n \geq x$. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Polynomfunktion (siehe Aufgabe 15.15), gibt es ein $a \in \mathbb{R}_+$ derart, dass $t^n e^{-\frac{t}{2}} \leq 1$ gilt für alle $t \geq a$. Daher ist

$$\begin{aligned}\int_a^b t^x e^{-t}\, dt &\leq \int_a^b t^n e^{-t}\, dt \\ &= \int_a^b t^n e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\, dt \\ &\leq \int_a^b e^{-\frac{t}{2}}\, dt \\ &= 2\left(e^{-\frac{a}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}\right) \\ &\leq 2e^{-\frac{a}{2}}.\end{aligned}$$

Für $b \rightarrow \infty$ wächst das linke Integral und ist durch $2e^{-\frac{a}{2}}$ beschränkt, so dass der Grenzwert existiert. Für das Verhalten am linken Rand (das nur bei $-1 < x \leq 0$ problematisch ist) müssen wir wegen $e^{-t} \leq 1$ nach Lemma 31.4 nur $\int_0^1 t^x\, dt$ betrachten. Eine Stammfunktion davon ist $\frac{1}{x+1} t^{x+1}$, deren Exponent positiv ist, so dass der Limes für $t \rightarrow 0$ existiert.

Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

existiert also für $x \in \mathbb{R},\ x > -1$. Dies ist der Ausgangspunkt für die Definition der Fakultätsfunktion.

Definition 32.2. Für $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, heißt die Funktion

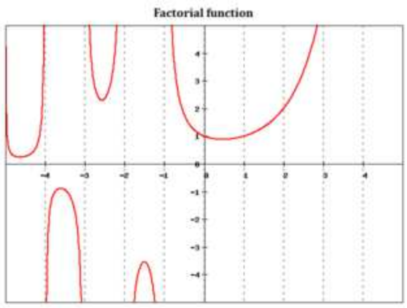
$$x \longmapsto \operatorname{Fak}(x) := \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

die *Fakultätsfunktion*.

Die für $x > 0$ durch

$$\Gamma(x) := \operatorname{Fak}(x-1) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

definierte Funktion heißt *Gammafunktion*, mit der häufiger gearbeitet wird. Mit der Fakultätsfunktion werden aber die Formeln etwas schöner und insbesondere wird der Zusammenhang zur Fakultät, der in der folgenden Aussage aufgezeigt wird, deutlicher.



Satz 32.3. *Die Fakultätsfunktion besitzt die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Es ist* $\operatorname{Fak}(x) = x \cdot \operatorname{Fak}(x-1)$ *für* $x > 0$.
(2) *Es ist* $\operatorname{Fak}(0) = 1$.
(3) *Es ist* $\operatorname{Fak}(n) = n!$ *für natürliche Zahlen* $n \in \mathbb{N}$.
(4) *Es ist* $\operatorname{Fak}\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Beweis. (1) Mittels partieller Integration ergibt sich (für reelle Zahlen $b \geq a > 0$ bei fixiertem $x > 0$)

$$\begin{aligned} \int_a^b t^x e^{-t}\, dt &= -t^x e^{-t}|_a^b + \int_a^b x t^{x-1} e^{-t}\, dt \\ &= -b^x e^{-b} + a^x e^{-a} + x \cdot \int_a^b t^{x-1} e^{-t}\, dt. \end{aligned}$$

Für $b \to \infty$ geht $b^x e^{-b} \to 0$ und für $a \to 0$ geht $a^x e^{-a} \to 0$ (da x positiv ist). Wendet man auf beide Seiten diese Grenzwertprozesse an, so erhält man $\operatorname{Fak}(x) = x \cdot \operatorname{Fak}(x-1)$. (2). Es ist

$$\operatorname{Fak}(0) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}|_0^\infty = 1.$$

(3) folgt aus (1) und (2) durch Induktion. (4). Es ist

$$\operatorname{Fak}\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = 2\int_0^\infty e^{-s^2}\, ds = \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}\, ds = \sqrt{\pi}.$$

Dies ergibt sich mit der Substitution $t = s^2$ und dem sogenannten Fehlerintegral. $\square$

Die Fakultätsfunktion ist auch stetig und differenzierbar, was wir aber nicht beweisen werden.

Euklidische Vektorräume

Wir beginnen nun mit der höherdimensionalen Analysis. Dazu müssen wir zunächst die topologischen Grundbegriffe (Abstand, Folgen, Stetigkeit, Grenzwerte) auf den $\mathbb{R}^n$ erweitern. Wir beginnen mit Vektorräumen mit einem Skalarprodukt.

Im Anschauungsraum kann man nicht nur Vektoren addieren und skalieren, sondern ein Vektor hat auch eine Länge, und die Lagebeziehung von zwei Vektoren zueinander wird durch den Winkel zwischen ihnen ausgedrückt. Länge und Winkel werden beide durch den Begriff des *Skalarprodukts* präzisiert. Dafür muss ein reeller Vektorraum oder ein komplexer Vektorräume vorliegen.

Definition 32.4. Sei V ein reeller Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R},\ (v,w) \longmapsto \langle v,w \rangle\ ,$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2, y \in V$ und ebenso in der zweiten Komponente.

(2) Es ist

$$\langle v, w \rangle \ = \ \langle w, v \rangle$$

für alle $v, w \in V$.

(3) Es ist $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.

Die dabei auftretenden Eigenschaften heißen *Bilinearität*, *Symmetrie* und *positive Definitheit*.

Beispiel 32.5. Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (v,w) = ((v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^n v_i w_i\ ,$$

ein Skalarprodukt, das man das *Standardskalarprodukt* nennt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass dies in der Tat ein Skalarprodukt ist.

Beispielsweise ist im $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \ = \ 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \ = \ -11.$$

Definition 32.6. Ein reeller, endlichdimensionaler Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, heißt *euklidischer Vektorraum*.

Zu einem euklidischen Vektorraum V ist jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ selbst wieder ein euklidischer Vektorraum, da man das Skalarprodukt auf U einschränken kann und dabei die definierenden Eigenschaften erhalten bleiben.

Im komplexen Fall sieht die Definition etwas anders aus. Es liegt keine Bilinearität und keine Symmetrie im strengen Sinne vor, sondern nur bis auf komplexe Konjugation. Diese Variante ist nötig, um die positive Definitheit zu sichern, auf der der Abstandsbegriff ruht.

Definition 32.7. Sei V ein komplexer Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{C},\ (v,w) \longmapsto \langle v,w \rangle ,$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist
$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle \ = \ \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$$
für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $x_1, x_2, y \in V$ und
$$\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle \ = \ \overline{\lambda_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle x, y_2 \rangle$$
für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $x, y_1, y_2 \in V$.

(2) Es ist
$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$
für alle $v, w \in V$.

(3) Es ist $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.

Definition 32.8. Das auf dem $\mathbb{C}^n$ durch

$$\langle u, v \rangle \ := \ \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$$

gegebene Skalarprodukt heißt *(komplexes) Standardskalarprodukt.*

Wir werden die beiden Fälle parallel behandeln. Wenn man zu einem komplexen Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ den zugrunde liegenden reellen Vektorraum betrachten, so ist der Realteil des komplexen Skalarprodukts ein reelles Skalarprodukt, siehe Aufgabe 32.8. Daher kann man sich bei Abstandsfragen auf den reellen Fall konzentrieren.

Norm und Abstand

Mit einem Skalarprodukt kann man die Länge eines Vektors und damit auch den Abstand zwischen zwei Vektoren erklären.

Definition 32.9. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$. Dann nennt man zu einem Vektor $v \in V$ die reelle Zahl

$$|| v || = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

die *Norm* von v.

Satz 32.10. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$. Dann gilt die* Cauchy-Schwarzsche Abschätzung, *nämlich*

$$|\langle v,w\rangle| \leq || v || \cdot || w ||$$

für alle $v, w \in V$.

Beweis. Bei $w = 0$ ist die Aussage richtig. Sei also $w \neq 0$ und damit auch $|| w || \neq 0$. Damit hat man die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle v - \frac{\langle v,w\rangle}{|| w ||^2} w, v - \frac{\langle v,w\rangle}{|| w ||^2} w \right\rangle \\
&= \langle v,v\rangle - \frac{\langle v,w\rangle}{|| w ||^2} \langle w,v\rangle - \frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{|| w ||^2} \langle v,w\rangle + \frac{\langle v,w\rangle \overline{\langle v,w\rangle}}{|| w ||^4} \langle w,w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle - \frac{\langle v,w\rangle}{|| w ||^2} \overline{\langle v,w\rangle} - \frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{|| w ||^2} \langle v,w\rangle + \frac{\langle v,w\rangle \overline{\langle v,w\rangle}}{|| w ||^2} \\
&= \langle v,v\rangle - \frac{\langle v,w\rangle \overline{\langle v,w\rangle}}{|| w ||^2} \\
&= \langle v,v\rangle - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{|| w ||^2}.
\end{aligned}$$

Multiplikation mit $|| w ||^2$ und Wurzelziehen ergibt das Resultat. ☐

Bemerkung 32.11. Für zwei von 0 verschiedene Vektoren v und w in einem euklidischen Vektorraum V folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, dass

$$-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{|| v || \cdot || w ||} \leq 1$$

ist. Damit kann man mit Hilfe der trigonometrischen Funktion *Kosinus* bzw. der Umkehrfunktion den Winkel zwischen den beiden Vektoren definieren, nämlich durch

$$\angle(v,w) := \arccos \frac{\langle v,w\rangle}{|| v || \cdot || w ||}.$$

Lemma 32.12. *Sei V ein Vektorraum über K mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$. Dann gelten für die zugehörige Norm folgende Eigenschaften.*

(1) $|| v || \geq 0$,
(2) $|| v || = 0$ *genau dann, wenn* $v = 0$ *ist.*
(3) *Für $\lambda \in K$ und $v \in V$ gilt*

$$|| \lambda v || = |\lambda| \cdot || v || \; .$$

(4) *Für* $v, w \in V$ *gilt*

$$|| v + w || \leq || v || + || w || \; .$$

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften folgen direkt aus der Definition des Skalarprodukts. Die Multiplikativität folgt aus

$$|| \lambda v ||^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle \; = \; \lambda \langle v, \lambda v \rangle \; = \; \lambda \overline{\lambda} \langle v, v \rangle \; = \; |\lambda|^2 \; || v ||^2 \; .$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung schreiben wir

$$\begin{aligned} || v + w ||^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= || v ||^2 + || w ||^2 + \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} \\ &= || v ||^2 + || w ||^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\langle v, w \rangle \right) \\ &\leq || v ||^2 + || w ||^2 + 2 \left| \langle v, w \rangle \right| \end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 32.10 ist dies $\leq (|| v || + || w ||)^2$. Diese Abschätzung überträgt sich auf die Quadratwurzeln. □

Lemma 32.13. *Sei* V *ein Vektorraum über* $\mathbb{R}$ *mit einem Skalarprodukt* $\langle -, - \rangle$ *und der zugehörigen Norm* $|| - ||$. *Dann gilt die Beziehung*

$$\langle v, w \rangle \; = \; \frac{1}{2} \left(|| v + w ||^2 - || v ||^2 - || w ||^2 \right) .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 32.6. □

Definition 32.14. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zu zwei Vektoren $v, w \in V$ nennt man

$$d(v, w) \; := || v - w ||$$

den *Abstand* zwischen v und w.

Lemma 32.15. *Sei* V *ein Vektorraum über* $\mathbb{K}$ *mit einem Skalarprodukt* $\langle -, - \rangle$. *Dann besitzt der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften (dabei sind* $u, v, w \in V$*).*

(1) *Es ist* $d(v, w) \geq 0$.
(2) *Es ist* $d(v, w) = 0$ *genau dann, wenn* $v = w$.
(3) *Es ist* $d(v, w) = d(w, v)$.
(4) *Es ist*

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) \, .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 32.10. □

Damit ist ein euklidischer Raum insbesondere ein *metrischer Raum*, womit wir uns in den nächsten Vorlesungen beschäftigen werden.

Isometrien

Definition 32.16. Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt φ eine *Isometrie*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Lemma 32.17. *Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(1) *φ ist eine Isometrie.*
(2) *Für alle $u, v \in V$ ist $d(\varphi(u), \varphi(v)) = d(u, v)$.*
(3) *Für alle $v \in V$ ist $\| \varphi(v) \| = \| v \|$.*

Beweis. Die Richtungen (1) $\Rightarrow$ (2) und (2) $\Rightarrow$ (3) sind Einschränkungen und (3) $\Rightarrow$ (1) folgt aus Lemma 32.13. $\square$

Abbildungsverzeichnis