Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Vorlesung 30

Gewöhnliche Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Definition 30.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

mit zwei Funktionen (dabei sind I und J reelle Intervalle)

$$g\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto g(t),$$

und

$$h\colon J \longrightarrow \mathbb{R},\, y \longmapsto h(y),$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

Eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen ist auf der Produktmenge $U = I \times J$ definiert. Diese ist offen, wenn I und J offen sind. Eine homogene lineare Differentialgleichung besitzt offenbar getrennte Variablen (mit $h(y) = y$), dagegen besitzt eine inhomogene lineare Differentialgleichung im Allgemeinen keine getrennten Variablen. Die Differentialgleichungen mit getrennten Variablen lassen sich durch Integrieren lösen. Wenn $h(y_0) = 0$ ist, so bestätigt man direkt die konstante Lösung $y(t) = y_0$. Daher beschränken wir uns im Folgenden auf die Situation, dass h keine Nullstelle besitzt. Die Grundidee ist dann, in der Gleichung

$$\frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t)$$

die beiden Seiten zu integrieren , wobei man links die Substitutionsregel anwendet.

Satz 30.2. *Es sei*

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit stetigen Funktionen

$$g\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto g(t),$$

und

$$h\colon J \longrightarrow \mathbb{R},\, y \longmapsto h(y),$$

wobei h keine Nullstelle besitze. Es sei G eine Stammfunktion von g und H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$. Weiter sei $I' \subseteq I$ ein Teilintervall mit $G(I') \subseteq H(J)$. Dann ist H eine bijektive Funktion auf sein Bild $H(J)$ und die Lösungen dieser Differentialgleichung haben die Form

$$y(t) = H^{-1}(G(t))\,.$$

Wenn zusätzlich die Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0 \textit{ mit } (t_0, y_0) \in I \times J$$

gegeben ist, und wenn die Stammfunktionen die zusätzlichen Eigenschaften $G(t_0) = 0$ *und* $H(y_0) = 0$ *erfüllen, so ist*

$$y(t) = H^{-1}(G(t))$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Beweis. Da h stetig ist und keine Nullstelle besitzt, ist h bzw. $\frac{1}{h}$ entweder stets positiv oder stets negativ, so dass H streng monoton und daher injektiv (also bijektiv auf sein Bild) ist. Sei $y(t) = H^{-1}(G(t))$ wie angegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{G'(t)}{H'\left(H^{-1}(G(t))\right)} \\ &= \frac{g(t)}{\frac{1}{h}\left(H^{-1}(G(t))\right)} \\ &= g(t) \cdot h\left(H^{-1}(G(t))\right) \\ &= g(t) \cdot h(y(t)), \end{aligned}$$

so dass in der Tat eine Lösung vorliegt. Es sei nun $y(t)$ eine differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung erfüllt. Daraus folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\, dt = \int_{y(t_1)}^{y(t_2)} \frac{1}{h(z)}\, dz,$$

wobei wir die Substitution $z = y(t)$ angewendet haben. Für die zugehörigen Stammfunktionen (mit den unteren Integralgrenzen t_1 bzw. $y(t_1)$) bedeutet dies $G(t) = H(y(t))$, also ist $y(t) = H^{-1}(G(t))$. Um die Anfangsbedingung zu erfüllen, kann man t_0 bzw. y_0 als untere Integralgrenze wählen. Wir zeigen, dass dies die einzige Lösung ist. Seien also H und $\tilde{H}$ zwei Stammfunktionen zu $\frac{1}{h}$ und G und $\tilde{G}$ zwei Stammfunktionen zu g derart, dass sowohl $y(t) = H^{-1}(G(t))$ als auch $\tilde{y}(t) = \tilde{H}^{-1}(\tilde{G}(t))$ die Anfangsbedingung erfüllen. D.h. die beiden Funktionen stimmen zum Zeitpunkt t_0 überein. Da sich Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden, können wir $\tilde{H} = H + c$ und $\tilde{G} = G + d$ mit zwei Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ ansetzen. Es gilt also einerseits $H(y(t)) = G(t)$ und andererseits $H(\tilde{y}(t)) + c = \tilde{H}(\tilde{y}(t)) = \tilde{G}(t) = G(t) + d$, so dass $H(\tilde{y}(t)) - H(y(t)) = d - c$ gilt, woraus wegen $\tilde{y}(t_0) = y(t_0)$ sofort $c = d$ folgt. Also ist $H(\tilde{y}(t)) = G(t) = H(y(t))$ und somit wegen der Injektivität von H auch $\tilde{y}(t) = y(t)$ für alle t. □

Wegen

$$(H + c)^{-1}(G(t) + d) = H^{-1}(G(t) + d - c)$$

(wende $H + c$ an) genügt es, bei der Stammfunktion zu $g(t)$ eine Konstante zuzulassen, um die allgemeine Lösung zu erhalten. Durch einen Übergang von G nach $G+c$ mit einer geeigneten Konstanten c kann man auch erreichen, dass es ein (echtes) Intervall I' gibt mit $G(I') \subseteq H(J)$. Sowohl orts- als auch zeitunabhängige Differentialgleichungen kann man als Differentialgleichung mit getrennten Variablen auffassen. Für zeitunabhängige Differentialgleichungen erhält man den folgenden Lösungsansatz.

KOROLLAR 30.3. *Es sei*

$$y' = h(y)$$

eine zeitunabhängige Differentialgleichung mit einer stetigen Funktion

$$h\colon\, J \longrightarrow \mathbb{R},\, y \longmapsto h(y),$$

ohne Nullstelle. Es sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ mit der Umkehrfunktion

$$H^{-1}\colon\, J' \longrightarrow J.$$

Dann sind die Funktionen

$$y(t) = H^{-1}(t + c) \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

die Lösungen dieser Differentialgleichung auf dem Intervall[1] $H(J) - c$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 30.2. □

KOROLLAR 30.4. *Eine Differentialgleichung der Form*

$$y' = g(t) \cdot y^2$$

mit $y > 0$ und einer stetigen Funktion

$$g\colon\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto g(t),$$

besitzt auf $I' \subseteq \mathbb{R}$ die Lösungen

$$y(t) = -\frac{1}{G(t)}\,,$$

wobei G eine Stammfunktion zu g mit $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ sei.

Beweis. Siehe Aufgabe 30.11. □

BEISPIEL 30.5. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \sin y$$

für $y \in J =]0, \pi[$. Nach Korollar 30.3 müssen wir also $\frac{1}{\sin y}$ integrieren, eine Stammfunktion dazu ist nach Beispiel 27.6 die Funktion

$$H\colon\, J \longrightarrow J' = \mathbb{R},\, y \longmapsto H(y) = \ln\left(\tan \frac{y}{2}\right).$$

Die Umkehrfunktion H^{-1} berechnet sich über $u = \ln\left(\tan \frac{y}{2}\right)$ zu

$$H^{-1}(y) = 2 \arctan\left(e^u\right).$$

Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = 2 \arctan\left(e^{t+c}\right)$$

[1]Mit $I + c$ ist das um c verschobene Intervall gemeint. Es ist also $I + c = \{x \in \mathbb{R} \mid x - c \in I\}$. Bei $I = [a, b]$ ist also $I + c = [a + c, b + c]$, bei $I = \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R} + c = \mathbb{R}$.

mit einem $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 30.6. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{y}$$

für $y > 0$. Es ist also $h(y) = \frac{1}{y}$ und damit müssen wir nach Korollar 30.3 y integrieren, eine Stammfunktion dazu ist

$$H(y) = \frac{1}{2}y^2 .$$

Die Umkehrfunktion berechnet sich aus dem Ansatz $z = \frac{1}{2}y^2$ zu $y = \sqrt{2z} = H^{-1}(z)$. Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = \sqrt{2(t+c)}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 30.7. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = t \cdot y^3$$

für $y > 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = t$ sind $\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{t^2 + 2c}}.$$

Hierbei muss c negativ gewählt werden, damit diese Lösung einen nichtleeren Definitionsbereich besitzt. Der Definitionsbereich ist dann das Intervall $]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[$. Insbesondere sind die Lösungen nur auf einem beschränkten offenen Intervall definiert, obwohl die Differentialgleichung auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist. An den Intervallgrenzen strebt $y(t)$ gegen $+\infty$, d.h. die Lösung „entweicht“.

Beispiel 30.8. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = -t \cdot y^3$$

für $y = 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

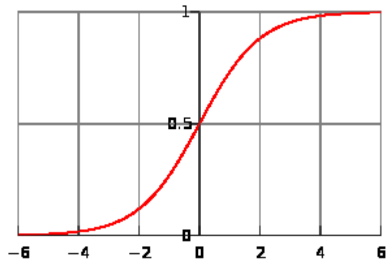
$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = -t$ sind $-\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{t^2 - 2c}}.$$

Insbesondere erhält man bei $c = 0$ die auf $\mathbb{R}_+$ definierte Lösung

$$y(t) = \frac{1}{t}.$$



Eine logistische Funktion

Beispiel 30.9. Es sei $p(t)$ die Größe einer Population zu einem Zeitpunkt t. Wie setzen voraus, dass die Populationsentwicklung differenzierbar ist; die Ableitung $p'(t)$ repräsentiert dann das (infinitesimale) Bevölkerungswachstum zum Zeitpunkt t. Den Quotienten

$$r(t) = \frac{p'(t)}{p(t)}$$

nennt man die *Wachstumsrate* zum Zeitpunkt t. Wir fragen uns, inwiefern man den Populationsverlauf aus der Wachstumsrate rekonstruieren kann. Die Wachstumsrate kann von der Zeit (Jahreszeit, Nahrungsvorkommen, Entwicklung von anderen Populationen etc.) abhängen, aber auch von der aktuellen Populationsgröße p. Die Zeitabhängigkeit der Wachstumsrate beruht auf äußeren Einflüssen, während die Abhängigkeit von der aktuellen Populationsgröße eine innere Dynamik ausdrückt. Sie beruht darauf, dass eine große Population sich hemmend auf die Fortpflanzung auswirkt.

Wir beschränken uns auf eine Situation, wo die Wachstumsrate nur von der Populationsgröße abhängt, nicht aber von sonstigen Einflüssen. Dann wird die Wachstumsrate durch eine Funktion $w(p)$ beschrieben, und die Wachstumsrate zum Zeitpunkt t ist demnach durch $r(t) = w(p(t))$ gegeben. Die Wachstumsrate wirkt sich auf die Populationsentwicklung aus. Gemäß des oben formulierten Zusammenhanges gilt

$$p'(t) = p(t) \cdot r(t) = p(t) \cdot w(p(t)).$$

Es liegt also eine Differentialgleichung der Form

$$p' = p \cdot w(p)$$

vor, die zeitunabhängig ist, so dass insbesondere getrennte Variablen vorliegen (mit der Funktion $h(p) = p \cdot w(p)$). Bei *konstanter Wachstumsrate* $w(p) = a$ liegt die Differentialgleichung $p' = ap$ vor, deren Lösungen die Funktionen ce^{at} sind. Das bedeutet *exponentielles Wachstum*.

Wenn wir die Wachstumsrate so ansetzen, dass es bei einer gewissen Populationsgröße g kein Wachstum mehr gibt, und bei sehr kleiner Bevölkerung die Wachstumsrate maximal gleich s ist, und dazwischen die Wachstumsrate linear von p abhängt, so erhält man die Wachstumsrate

$$w(p) = s\left(1 - \frac{1}{g}p\right)$$

und die Differentialgleichung

$$p' = sp\left(1 - \frac{1}{g}p\right) = sp - \frac{s}{g}p^2.$$

Eine solche Differentialgleichung nennt man *logistische Differentialgleichung*. Gemäß dem Lösungsansatz für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen müssen wir eine Stammfunktion zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{sp\left(1 - \frac{1}{g}p\right)} &= \frac{g}{s} \cdot \frac{1}{p(g-p)} \\ &= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{g-p}\right) \end{aligned}$$

finden. Eine solche Stammfunktion ist

$$H(p) = \frac{1}{s}(\ln p - \ln(g-p)) = \frac{1}{s}\ln\frac{p}{g-p}.$$

Zur Berechnung der Umkehrfunktion H^{-1} lösen wir die Gleichung

$$u = \frac{1}{s}\ln\frac{p}{g-p}$$

nach p auf. Es ergibt sich

$$\exp(su) = \frac{p}{g-p}$$

und daraus

$$g \cdot \exp(su) = p + p \cdot \exp(su)$$

und damit

$$p = \frac{g \cdot \exp(su)}{1 + \exp(su)} = \frac{g}{1 + \exp(-su)}.$$

Da die Differentialgleichung zeitunabhängig ist, ist

$$p(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

eine Lösung. Bei $t = 0$ ist $p(0) = \frac{g}{2}$, für $t \to +\infty$ strebt die Lösung gegen g (die Grenzbevölkerung) und für $t \to -\infty$ gegen 0.

Abbildungsverzeichnis