Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Vorlesung 3

Körper

Wir werden nun die Eigenschaften der reellen Zahlen besprechen. Grundlegende Eigenschaften von mathematischen Strukuren werden als *Axiome* bezeichnet. In der Mathematik werden sämtliche Eigenschaften aus den Axiomen logisch abgeleitet. Die Axiome für die reellen Zahlen gliedern sich in algebraische Axiome, Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Die algebraischen Axiome werden im Begriff des Körpers zusammengefasst. Unter algebraischen Eigenschaften versteht man solche Eigenschaften, die sich auf die Rechenoperationen, also die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division, beziehen. Diese Operationen ordnen zwei reellen Zahlen eine weitere reelle Zahl zu, es handelt sich also um Verknüpfungen.

Definition 3.1. Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

$$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(1) Axiome der Addition
  - (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
  - (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
  - (c) 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
  - (d) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.

(2) Axiome der Multiplikation
  - (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
  - (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
  - (c) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
  - (d) Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.

(3) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Dass all diese Axiome für die reellen Zahlen (und die rationalen Zahlen) mit den natürlichen Verknüpfungen gelten, ist aus der Schule bekannt. Unter Verwendung des Gruppenbegriffs kann man auch sagen, dass ein Körper eine

Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ und zwei fixierten Elementen $0 \neq 1$ ist, derart, dass $(K, +, 0)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ jeweils kommutative Gruppen[1] sind und dass das Distributivgesetz gilt. Daher gelten für die Addition und die Multiplikation häufig strukturell ähnliche Eigenschaften. Da wir in dieser Vorlesung die Gruppentheorie nicht systematisch entwickeln werden, ist das nur eine Nebenbemerkung.

In einem Körper gilt die *Klammerkonvention*, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Man kann daher $a \cdot b + c \cdot d$ statt $(a \cdot b) + (c \cdot d)$ schreiben. Zur weiteren Notationsvereinfachung wird das Produktzeichen häufig weggelassen. Die besonderen Elemente 0 und 1 in einem Körper werden als *Nullelement* und als *Einselement* bezeichnet. Nach der Definition müssen sie verschieden sein.

Die wichtigsten Beispiele für einen Körper sind für uns die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen, die wir später kennenlernen werden.

Lemma 3.2. *In einem Körper K ist zu einem Element $x \in K$ das Element y mit $x + y = 0$ eindeutig bestimmt. Bei $x \neq 0$ ist auch das Element z mit $xz = 1$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei x vorgegeben und seien y und y' Elemente mit $x+y = 0 = x+y'$. Dann gilt

$$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = (x + y) + y' = 0 + y' = y'.$$

Insgesamt ist also $y = y'$. Für den zweiten Teil sei x mit $x \neq 0$ vorgegeben. Es seien z und z' Elemente mit $xz = 1 = xz'$. Dann ist

$$z = z1 = z(xz') = (zx)z' = 1z' = z'.$$

Also ist $z = z'$. $\square$

Zu einem Element $a \in K$ nennt man das nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element y mit $a + y = 0$ das *Negative* von a und bezeichnet es mit $-a$. Es ist $-(-a) = a$, da wegen $a + (-a) = 0$ das Element a gleich dem eindeutig bestimmten Negativen von $-a$ ist.

Statt $b + (-a)$ schreibt man abkürzend $b - a$ und spricht von der *Differenz*. Die Differenz ist also keine grundlegende Verknüpfung, sondern wird auf die Addition mit dem Negativen zurückgeführt.

Das zu $a \in K$, $a \neq 0$, nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element z mit $az = 1$ nennt man das *Inverse* von a und bezeichnet es mit a^{-1}.

Für $a, b \in K$, $b \neq 0$, schreibt man auch abkürzend

$$a/b := \frac{a}{b} := ab^{-1}.$$

[1] Das beinhaltet hier insbesondere, dass die Multiplikation sich zu einer Verknüpfung auf $K \setminus \{0\}$ einschränken lässt. Aus den Körperaxiomen folgt dies, siehe Lemma 3.4 (6).

Die beiden linken Ausdrücke sind also eine Abkürzung für den rechten Ausdruck.

Zu einem Körperelement $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ wird a^n als das n-fache Produkt von a mit sich selbst definiert, und bei $a \neq 0$ wird a^{-n} als $(a^{-1})^n$ interpretiert.

Ein „kurioser“ Körper wird im folgenden Beispiel beschrieben. Dieser Körper mit zwei Elementen ist in der Informatik und der Kodierungstheorie wichtig, wird für uns aber keine große Rolle spielen. Er zeigt, dass es nicht für jeden Körper sinnvoll ist, seine Elemente auf der Zahlengeraden zu verorten.

Beispiel 3.3. Wir suchen nach einer Körperstruktur auf der Menge $\{0, 1\}$. Wenn 0 das neutrale Element einer Addition und 1 das neutrale Element einer Multiplikation sein soll, so ist dadurch schon alles festgelegt, da $1 + 1 = 0$ sein muss, da 1 ein inverses Element bezüglich der Addition besitzen muss, und da in jedem Körper nach Lemma 3.4 (1) $0 \cdot 0 = 0$ gelten muss. Die Operationstafeln sehen also wie folgt aus.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

und

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Durch etwas aufwändiges Nachrechnen stellt man fest, dass es sich in der Tat um einen Körper handelt.

Die folgenden Eigenschaften sind für den Körper der reellen Zahlen vertraut, wir beweisen sie aber allein aus den Axiomen eines Körpers. Sie gelten daher für einen jeden Körper.

Lemma 3.4. *Es sei K ein Körper und seien $a, b, c, a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ Elemente aus K. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) $a0 = 0$ *(*Annullationsregel*).*
(2) $(-a)b = -ab = a(-b)$.
(3) $(-a)(-b) = ab$ *(*Vorzeichenregel*).*
(4) $a(b - c) = ab - ac$.
(5) $\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{s} b_k\right) = \sum_{1 \leq i \leq r,\, 1 \leq k \leq s} a_i b_k$ *(*allgemeines Distributivgesetz*).*
(6) *Aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.*

Beweis. (1) Es ist $a0 = a(0+0) = a0+a0$. Durch beidseitiges Abziehen (also Addition mit dem Negativen von $a0$) von $a0$ ergibt sich die Behauptung.

(2)
$$(-a)b + ab \;=\; (-a+a)b \;=\; 0b \;=\; 0$$
nach Teil (1). Daher ist $(-a)b$ das (eindeutig bestimmte) Negative von ab. Die zweite Gleichheit folgt analog.

(3) Nach (2) ist $(-(-a))b = (-a)(-b)$ und wegen $-(-a) = a$ folgt die Behauptung.

(4) Dies folgt auch aus dem bisher Bewiesenen.

(5) Dies folgt aus einer Doppelinduktion, siehe Aufgabe 3.21.

(6) Nehmen wir an, dass a und b beide von 0 verschieden sind. Dann gibt es dazu inverse Elemente a^{-1} und b^{-1} und daher ist $(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = 1$. Andererseits ist aber nach Voraussetzung $ab = 0$ und daher ist nach der Annullationsregel
$$(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) \;=\; 0\left(b^{-1}a^{-1}\right) \;=\; 0,$$
so dass sich der Widerspruch $0 = 1$ ergibt.

$\square$

Die rationalen Zahlen

Wir geben eine Definition der rationalen Zahlen allein unter Bezug auf die ganzen Zahlen.

Definition 3.5. Unter einer *rationalen Zahl* versteht man einen Ausdruck der Form
$$\frac{a}{b}\,,$$
wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ sind, und wobei zwei Ausdrücke $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ genau dann als gleich betrachtet werden, wenn $ad = bc$ (in $\mathbb{Z}$) gilt. Die Menge aller rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Einen Ausdruck $\frac{a}{b}$ nennt man Bruch, wobei a der *Zähler* und b der *Nenner* des Bruches heißt. Eine rationale Zahl wird durch verschiedene Brüche beschrieben, beispielsweise ist $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Man sagt auch, dass diese beiden Brüche gleichwertig sind. Für die rationale Zahl $\frac{a}{1}$ schreibt man einfach a. In diesem Sinne sind ganze Zahlen insbesondere auch rationale Zahlen. Es gelten die folgenden Identitäten (dabei seien $c, d \neq 0$, ansonsten seien alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ beliebig).

(1)
$$\frac{1}{-1} = -1\,,$$

(2)
$$\frac{0}{c} = 0\,,$$

(3)
$$\frac{c}{c} = 1\,,$$

(4)
$$\frac{a}{c} = \frac{ad}{cd}\,.$$

Die Addition und die Multiplikation auf rationalen Zahlen wird folgendermaßen festgelegt.

(1)
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} := \frac{ab}{cd}\,,$$

(2)
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} := \frac{ad+bc}{cd}\,.$$

Man addiert also zwei rationale Zahlen, indem man die Nenner gleichnamig macht. Diese Operationen sind wohldefiniert und wieder assoziativ, kommutativ und es gilt das Distributivgesetz. Diese Eigenschaften kann man auf die entsprechenden Eigenschaften der ganzen Zahlen zurückführen, siehe Aufgabe 3.1.

Die $0 = \frac{0}{1}$ hat wieder die Eigenschaft
$$0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$
und die $1 = \frac{1}{1}$ hat wieder die Eigenschaft
$$1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$
Ferner gibt es wieder zu einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ die negative Zahl
$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}.$$
Sie besitzt die charakteristische Eigenschaft
$$-\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{-a+a}{b} = 0.$$
Zu einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ mit $a, b \neq 0$ (also wenn Zähler und Nenner von 0 verschieden sind) ist auch der umgedrehte Bruch $\frac{b}{a}$ eine rationale Zahl, und es gilt
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1.$$
Man nennt $\frac{b}{a}$ die *inverse rationale Zahl* zu $\frac{a}{b}$. Mit all diesen Festlegungen ist $\mathbb{Q}$ ein Körper.

Man kann die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden platzieren (die ganzen Zahlen seien dort schon platziert). Die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}_+$ findet man so: Man unterteilt die Strecke von 0 nach a in b gleichlange Teilstrecken. Die Zahl $\frac{a}{b}$ ist dann die rechte Grenze des (von links) ersten Teilintervalls.

Insbesondere ist $\frac{1}{b}$ die Länge des Intervalls, dass b-fach nebeneinander gelegt die Einheitsstrecke (oder das Einheitsintervall) ergibt.[2]

Als Punkte auf der Zahlengeraden lassen sich rationale Zahlen ihrer Größe nach vergleichen. Dabei gilt für $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{N}_+$ die Beziehung

$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$$

genau dann, wenn in $\mathbb{Z}$ die Beziehung

$$ad \geq bc$$

gilt. Um dies von der Zahlengerade her einzusehen, bringt man die beiden rationalen Zahlen auf den Hauptnenner, d.h. man vergleicht $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{cb}{bd}$. Die Größerbeziehung hängt dann, wegen bd positiv, allein von den beiden Zählern ab.

Die Binomialkoeffizienten

Definition 3.6. Zu einer natürlichen Zahl n nennt man die Zahl

$$n! := n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

die *Fakultät* von n (sprich n Fakultät).

Bei einer n-elementigen Menge M gibt es $n!$ bijektive Abbildungen von M nach M. Gleichbedeutend damit ist, dass es $n!$ Möglichkeiten gibt, n Objekte auf n Plätze zu verteilen.

Definition 3.7. Es seien k und n natürliche Zahlen mit $k \leq n$.[3] Dann nennt man

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

den *Binomialkoeffizienten* „n über k“.

Diesen Bruch kann man auch als

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \cdots 2 \cdot 1}$$

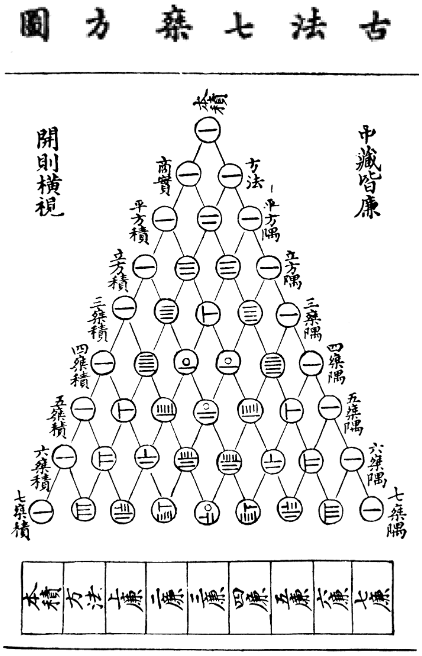
schreiben, da die Faktoren aus $(n-k)!$ auch in $n!$ vorkommen und daher kürzbar sind. In dieser Darstellung stehen im Zähler und im Nenner gleich viele Faktoren. Von der Definition her ist es nicht sofort klar, dass es sich bei den Binomialkoeffizienten um natürliche Zahlen handelt. Dies folgt aus der folgenden Beziehung.

[2] Die Frage, wie man diese Unterteilung elementar durchführt, besprechen wir hier nicht.

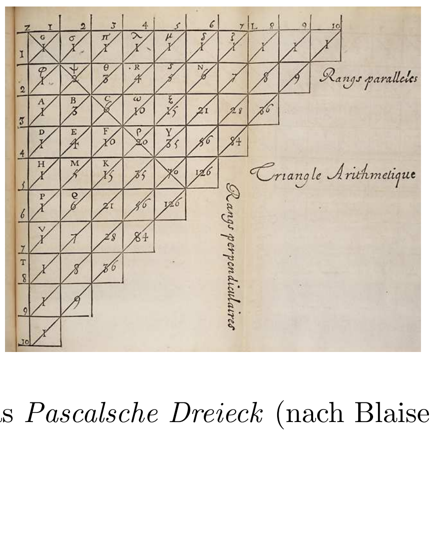
[3] Bei $k > n$ setzen wir die Binomialkoeffizienten gleich 0.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Das *Dreieck der Binomialkoeffizienten* war in Indien und in Persien schon um 1000 bekannt,



in China heißt es *Yanghui-Dreieck* (nach Yang Hui (um 1238-1298)),



in Europa heißt es das *Pascalsche Dreieck* (nach Blaise Pascal (1623-1662)).

LEMMA 3.8. *Die Binomialkoeffizienten erfüllen die rekursive Beziehung*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 3.13. □

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ hat die folgende inhaltliche Bedeutung: Er gibt für eine n-elementige Menge M die Anzahl sämtlicher k-elementigen Teilmengen von M an, siehe Aufgabe 3.15.

Die folgende *allgemeine binomische Formel* bringt die Addition und die Multiplikation in einem Körper miteinander in Beziehung.

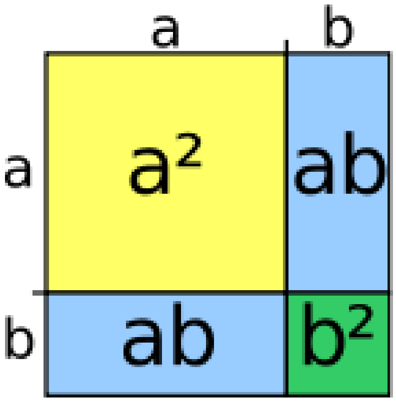
SATZ 3.9. *Es seien a, b Elemente in einem Körper. Ferner sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt*

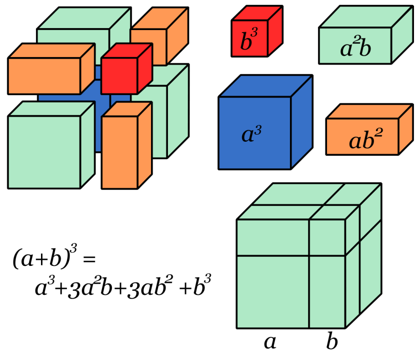
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Wir führen Induktion nach n. Für $n = 0$ steht einerseits $(a+b)^0 = 1$ und andererseits $a^0 b^0 = 1$. Sei die Aussage bereits für n bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\
&= a\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□


a
b
a
a²
ab
b
ab
b²


b³
a²b
a³
ab²
(a+b)³ =
a³+3a²b+3ab² +b³
a
b

Abbildungsverzeichnis