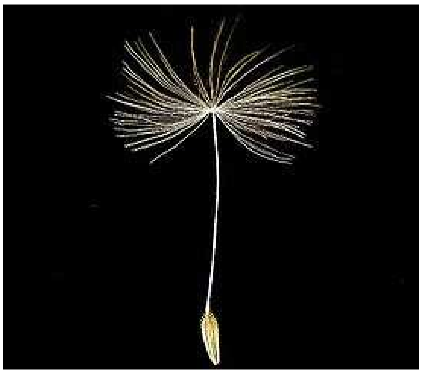
Prof. Dr. H. Brenner   Osnabrück WS 2014/2015

Analysis I

Vorlesung 28

Gewöhnliche Differentialgleichungen



Welche Bewegung vollzieht ein Löwenzahnfallschirmchen? Das Fallschirmchen lässt sich zu jedem Zeitpunkt von dem Wind tragen, der an der Stelle herrscht, wo es sich gerade befindet. Der Wind, seine Stärke und seine Richtung, hängt sowohl von der Zeit als auch vom Ort ab. Das bedeutet, dass hier ein gewisser „Rückkopplungsprozess“ vorliegt: Die bisherige Bewegung (also die Vergangenheit) bestimmt, wo sich das Fallschirmchen befindet und damit auch, welcher Wind auf es einwirkt und damit den weiteren Bewegungsablauf. Solche Bewegungsprozesse werden durch Differentialgleichungen beschrieben.

Differentialgleichungen sind ein fundamentaler Bestandteil der Mathematik und der Naturwissenschaften. Sie drücken eine Beziehung zwischen einer abhängigen Größe (häufig $y(t)$) und der Änderung dieser Größe ($y'(t)$) aus. Viele Gesetzmäßigkeiten in der Natur wie Bewegungsprozesse, Ablauf von chemischen Reaktionen, Wachstumsverhalten von Populationen werden durch Differentialgleichungen beschrieben. Hier besprechen wir nur solche Differentialgleichungen, die durch Integration gelöst werden können.

Die Vektorfelder werden im Folgenden nicht immer auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert sein, sondern auf einer *offenen Menge* $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Dabei heißt U offen, wenn es zu jedem Punkt $P \in U$ eine offene Ballumgebung $U(P, r)$ gibt, die ganz in U liegt.

Definition 28.1. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und es sei

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$y' = f(t, y)$$

die (gewöhnliche) *Differentialgleichung* zu f (oder zum *Vektorfeld* oder zum *Richtungsfeld* f).

Dabei ist $y' = f(t, y)$ erstmal nur ein formaler Ausdruck, dem wir aber sofort eine inhaltliche Interpretation geben. Das y soll eine Funktion in einer Variablen repräsentieren und y' ihre Ableitung. Dies wird präzisiert durch den Begriff der *Lösung einer Differentialgleichung*.

Definition 28.2. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und es sei

$$f \colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt eine Funktion

$$y \colon I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem (mehrpunktigen) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Es ist $(t, y(t)) \in U$ für alle $t \in I$.
(2) Die Funktion y ist differenzierbar.
(3) Es ist $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$.

Differentialgleichungen beschreiben häufig physikalische Prozesse, insbesondere Bewegungsprozesse. Daran soll auch die Notation erinnern, es steht t für die Zeit und y für den Ort. Dabei ist hier der Ort eindimensional, d.h. die Bewegung findet nur auf einer Geraden statt. Den Wert $f(t, y)$ sollte man sich als eine zu einem Zeit- und Ortspunkt vorgegebene Richtung auf der Ortsgeraden vorstellen. Eine Lösung ist dann eine Funktion

$$y \colon I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

die differenzierbar ist und deren Ableitung, vorgestellt als Momentangeschwindigkeit, zu jedem Zeitpunkt t mit dem durch $f(t, y(t))$ gegebenen Richtungsvektor übereinstimmt. In Analysis II werden wir auch Bewegungen betrachten, die sich in der Ebene oder im Raum abspielen, und die durch ein entsprechendes Richtungsfeld gesteuert werden.

Die Lösung einer Differentialgleichung ist im Allgemeinen nicht eindeutig, man muss noch Anfangsbedingungen festlegen.

Definition 28.3. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und es sei

$$f \colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ vorgegeben. Dann nennt man

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit der *Anfangsbedingung* $y(t_0) = y_0$.

Definition 28.4. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und es sei

$$f \colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ vorgegeben. Dann nennt man eine Funktion

$$y \colon I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0\,,$$

wenn y eine Lösung der Differentialgleichung ist und wenn zusätzlich

$$y(t_0) = y_0$$

gilt.

Es gibt kein allgemeines Verfahren eine Differentialgleichung bzw. ein Anfangswertproblem explizit zu lösen. Die Lösbarkeit hängt wesentlich von der gegebenen Funktion $f(t, y)$ ab.

Das eine Differentialgleichung beschreibende Vektorfeld $f(t, y)$ hängt im Allgemeinen von beiden Variablen t und y ab. Einfache, aber keineswegs triviale Spezialfälle von Differentialgleichungen liegen vor, wenn das Vektorfeld nur von einer der beiden Variablen abhängt.

Ortsunabhängige Differentialgleichungen

Definition 28.5. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *ortsunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von y abhängt, wenn also $f(t, y) = g(t)$ mit einer Funktion g in der einen Variablen t gilt.

Eine ortsunabhängige gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

zu einer stetigen Funktion g ist nichts anderes als das Problem, eine Stammfunktion $G(t)$ von g zu finden; eine Lösung y der Differentialgleichung ist ja genau durch die Bedingung ausgezeichnet, dass $y'(t) = g(t)$ ist. Da eine Stammfunktion nur bis auf die Integrationskonstante bestimmt ist, besitzt ein ortsunabhängiges Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung.

Beispiel 28.6. Wir betrachten das ortsunabhängige Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{t^2 - 1} \text{ mit der Anfangsbedingung } y(5) = 3\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{t^2-1}$ besitzt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1},$$

daher sind die Stammfunktionen (wir beschränken uns auf $t > 1$) gleich

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln (t-1) - \frac{1}{2} \cdot \ln (t+1) + c\,.$$

Die Anfangsbedingung $y(5) = 3$ führt auf

$$\frac{1}{2} \cdot \ln 4 - \frac{1}{2} \cdot \ln 6 + c = 3\,,$$

also ist

$$c = 3 - \frac{1}{2} \cdot \ln 4 + \frac{1}{2} \cdot \ln 6$$

und die Lösungsfunktion des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln (t-1) - \frac{1}{2} \cdot \ln (t+1) + 3 - \frac{1}{2} \cdot \ln 4 + \frac{1}{2} \cdot \ln 6\,.$$

Beispiel 28.7. Wir betrachten das ortsunabhängige Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{\cosh t} \text{ mit der Anfangsbedingung } y(0) = 5\,.$$

Es ist

$$\frac{1}{\cosh t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^t}{e^{2t}+1},$$

so dass eine rationale Funktion in der Exponentialfunktion vorliegt, die wir nach Lemma 27.1 über die Substitution $t = \ln s$ lösen können. Das transformierte Integral ist dabei

$$\int \frac{2s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s} ds\,.$$

Eine Stammfunktion dazu ist

$$2 \arctan s\,.$$

Somit ist

$$2 \arctan \left(e^t\right)$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{\cosh t}$. Für das Anfangswertproblem setzen wir

$$2 \arctan \left(e^0\right) + c = 5$$

an. Dies führt auf

$$c = 5 - 2 \arctan 1,$$

also ist

$$y(t) = 2 \arctan \left(e^t\right) + 5 - 2 \arctan 1$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Zeitunabhängige Differentialgleichungen

Definition 28.8. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *zeitunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von t abhängt, wenn also $f(t, y) = h(y)$ mit einer Funktion h in der einen Variablen y gilt.

Bei einer zeitunabhängigen Differentialgleichung hängt nur das zugrunde liegende „Vektorfeld" nicht von der Zeit ab, die Lösungsfunktionen sind hingegen im Allgemeinen zeitabhängig.

Beispiel 28.9. Wir betrachten die zeitliche Entwicklung einer Population, die durch folgende Eigenschaften charakterisiert ist.

(1) Die Individuen der Population leben ewig.
(2) Alle Individuen beteiligen sich ab ihrer Geburt mit gleichem Engagement und gleichem Erfolg an der Fortpflanzung.
(3) Zeugung und Geburt finden gleichzeitig statt.
(4) Der Fortpflanzungserfolg eines Individuums ist unabhängig von der Größe der Gesamtpopulation.

Unter diesen Bedingungen ist die Vermehrung, also der Zuwachs der Population, allein von der momentanen Populationsgröße abhängig und proportional zu dieser. Wenn man die Populationsentwicklung als $y(t)$ ansetzt, so erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'(t) = cy(t)$$

(oder kurz $y' = cy$) mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}_+$. Die Lösungsfunktionen sind

$$\lambda e^{ct}$$

(wobei im Populationsbeispiel $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist). Man spricht von *exponentiellem Wachstum* der Population, und zwar unabhängig davon, ob c groß oder klein ist.

Beispiel 28.10. Eine Wüste (oder ein Kornblumenfeld) sei kreisrund und breite sich mit der Zeit kontinuierlich aus, indem die Grenze gleichmäßig nach außen geschoben werde, und zwar pro Zeiteinheit um einen gewissen Vortrieb. Die Fläche der Wüste werde durch die Funktion $z(t)$ beschrieben. Die Grenze der Wüste hat somit die Länge $2\sqrt{\pi}\sqrt{z(t)}$ und diese Länge ist proportional zum Wüstenzuwachs zum Zeitpunkt t. Es ergibt sich daher eine Differentialgleichung

$$z'(t) = c\sqrt{z(t)}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}_+$. Die Lösungen haben die Form

$$z(t) = \frac{c^2}{4}t^2,$$

wie man direkt durch Ableiten bestätigen kann.

Differentialgleichungen höherer Ordnung

Viele physikalische Bewegungsprozesse sind nicht dadurch determiniert, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt die Bewegungsrichtung (also die gerichtete Geschwindigkeit) vorgegeben wird, sondern dadurch, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt eine Kraft auf ein Teilchen wirkt, die dieses beschleunigt. In diesem Fall kann die Bewegung also nicht durch die erste Ableitung (Geschwindigkeit) modelliert werden, sondern durch die zweite Ableitung (Beschleunigung). Typische Beispiele hierzu sind die durch die Gravitation oder eine Federkraft hervorgerufenen Bewegungen.

Galileo Galilei (1564-1642) entdeckte das Gesetz des freien Falls.

Beispiel 28.11. Ein Gegenstand der Masse m wird im Vakuum aus einer Höhe 0 zum Zeitpunkt 0 losgelassen und fällt unter dem Einfluss der Gravitation zu Boden (freier Fall im Vakuum). Dabei wirkt auf den Körper die Gravitationskraft gm (die Erdbeschleunigung g nehmen wir für diesen Bewegungsvorgang als konstant an), die ihn nach dem Gesetz „Kraft ist Masse mal Beschleunigung" beschleunigt. Die Beschleunigung ist also konstant und unabhängig von der Masse. Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeit $v(t)$ des Körpers die Differentialgleichung

$$v'(t) = -g$$

erfüllt (die Wahl des Vorzeichens bewirkt, dass der Körper ins Negative fällt). Die durch die Anfangsbedingung (der Gegenstand ruhe zum Zeitpunkt 0) $v(0) = 0$ festgelegte Lösung für die Geschwindigkeit ist daher

$$v(t) = -gt.$$

Der zurückgelegte Weg $y(t)$ des Körpers ergibt sich wiederum aus der Differentialgleichung

$$y'(t) = v(t) = -gt,$$

die besagt, dass die Ableitung des Weges nach der Zeit die Momentangeschwindigkeit beschreibt. Die Lösung davon ist

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2.$$

Den Gesamtvorgang kann man durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -g$$

ausdrücken.

Beispiel 28.12. Ein Gegenstand der Masse m wird aus der Höhe losgelassen und fällt unter dem Einfluss der Gravitation zu Boden. Dabei wirkt auf den Körper einerseits die Gravitationskraft gm (die Erdbeschleunigung g nehmen wir für diesen Bewegungsvorgang als konstant an), die ihn beschleunigt, andererseits wird diese Beschleunigung durch den Luftwiderstand verringert. Nach einem physikalischen Gesetz ist die Reibung (bei relativ kleinen Geschwindigkeiten) proportional und entgegengesetzt zur Geschwindigkeit des Körpers. Es sei β der Reibungswiderstand, also dieser Proportionalitätsfaktor. Die auf den Körper (nach unten) wirkende Gesamtkraft ist daher

$$F(t) = gm - \beta y'(t).$$

Wegen

$$y''(t) = \frac{F(t)}{m}$$

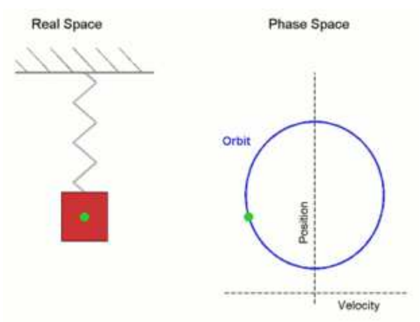
gilt daher für diesen Bewegungsvorgang die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -\frac{\beta}{m}y' + g.$$

Die Lösungsfunktionen dazu sind

$$y(t) = -c\frac{m}{\beta}e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{gm}{\beta}t + d$$

mit beliebigen Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$. Siehe Aufgabe 29.11.



Beispiel 28.13. Wir betrachten die Bewegung eines Punktes auf einer Geraden, wobei die auf den Punkt (in Richtung des Nullpunkts) wirkende Kraft (bzw. Beschleunigung) proportional zur Lage des Punktes sein soll. Wenn der Punkt sich in $\mathbb{R}_+$ befindet und sich in die positive Richtung bewegt, so wirkt diese Kraft bremsend, wenn er sich in die negative Richtung bewegt, so wirkt die Kraft beschleunigend. Mit der Proportionalitätskonstante 1 gelangt man zur Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$y'' = -y,$$

die diesen Bewegungsvorgang beschreibt. Als Anfangsbedingung wählen wir $y(0) = 0$ und $y'(0) = v$, zum Zeitpunkt 0 soll die Bewegung also durch den Nullpunkt gehen und dort die Geschwindigkeit v besitzen. Man kann sofort die Lösung

$$y(t) = v \cdot \sin t$$

angeben.

Abbildungsverzeichnis