Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2014/2015

Analysis I

Vorlesung 21

Die Zahl π

Die Zahl π ist der Flächeninhalt bzw. der halbe Kreisumfang eines Kreises mit Radius 1. Um darauf eine präzise Definition dieser Zahl aufzubauen müsste man zuerst die Maßtheorie (bzw. die Länge von „krummen Kurven“) entwickeln. Auch die trigonometrischen Funktionen haben eine intuitive Interpretation am Einheitskreis, doch auch diese setzt das Konzept der Bogenlänge voraus. Ein alternativer Zugang ist es, die Zahl π über analytische Eigenschaften der durch ihre Potenzreihen definierten Funktionen Sinus und Kosinus zu definieren und dann erst nach und nach die Beziehung zum Kreis herzustellen.

Lemma 21.1. *Die Kosinusfunktion besitzt im reellen Intervall* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle.*

Beweis. Wir betrachten die Kosinusreihe

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Für $x=0$ ist $\cos 0 = 1$. Für $x=2$ kann man geschickt klammern und erhält

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \ldots \\ &= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1 - \frac{4}{3\cdot 4}\right) - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{4}{7\cdot 8}\right) - \ldots \\ &= 1 - 2(2/3) - \ldots \\ &\leq -1/3. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also mindestens eine Nullstelle im angegebenen Intervall. Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachten wir die Ableitung des Kosinus, diese ist nach Satz 20.15

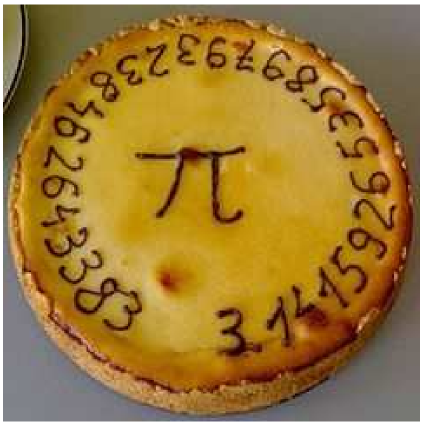
$$\cos' x = -\sin x .$$

Es genügt zu zeigen, dass der Sinus im Intervall $]0,2[$ positiv ist, denn dann ist das Negative davon stets negativ und der Kosinus ist dann nach Satz 19.5 im angegebenen Intervall streng fallend, so dass es nur eine Nullstelle gibt. Für $x \in]0,2]$ gilt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
&= x\left(1-\frac{x^2}{3!}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6\cdot 7}\right)+\ldots \\
&\geq x\left(1-\frac{4}{3!}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{4}{6\cdot 7}\right)+\ldots \\
&\geq x/3 \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

$\square$



Eine rationale Approximation der Zahl π auf einem π-Pie.

Definition 21.2. Es sei s die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0,2]$. Die *Kreiszahl* π ist definiert durch

$$\pi := 2s\,.$$

Im weiteren Verlauf dieses Kurses werden wir sehen, dass die so definierte Zahl mit der Kreiszahl übereinstimmt, dass also der Umfang eines Kreises mit Radius r gleich $2\pi r$ und sein Flächeninhalt gleich πr^2 ist.

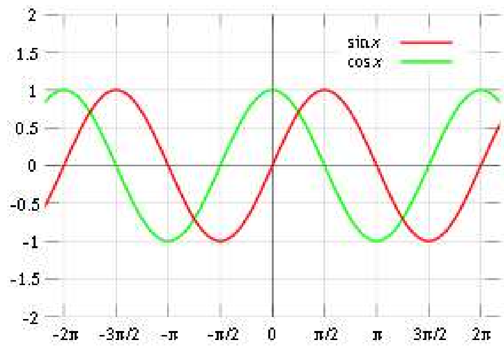
Satz 21.3. *Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion erfüllen in* $\mathbb{C}$ *folgende* Periodizitätseigenschaften.

(1) *Es ist* $\cos\,(z+2\pi)=\cos\,z$ *und* $\sin\,(z+2\pi)=\sin\,z$ *für alle* $z\in\mathbb{C}$.
(2) *Es ist* $\cos\,(z+\pi)=-\cos\,z$ *und* $\sin\,(z+\pi)=-\sin\,z$ *für alle* $z\in\mathbb{C}$.
(3) *Es ist* $\cos\,(z+\pi/2)=-\sin\,z$ *und* $\sin\,(z+\pi/2)=\cos\,z$ *für alle* $z\in\mathbb{C}$.
(4) *Es ist* $\cos\,0=1$, $\cos\,\pi/2=0$, $\cos\,\pi=-1$, $\cos\,3\pi/2=0$ *und* $\cos\,2\pi=1$. *Die Nullstellen des Kosinus sind von der Form* $\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$.
(5) *Es ist* $\sin\,0=0$, $\sin\,\pi/2=1$, $\sin\,\pi=0$, $\sin\,3\pi/2=-1$ *und* $\sin\,2\pi=0$. *Die Nullstellen des Sinus sind von der Form* $n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$.

Beweis. Aufgrund der Kreisgleichung

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$$

ist $\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$, also ist $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ wegen der Überlegung im Beweis zu Lemma 21.1. Daraus folgen mit den Additionstheoremen die in (3) angegebenen Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus. Es genügt daher, die Aussagen für den Kosinus zu beweisen. Alle Aussagen folgen dann aus der Definition von π und aus (3). $\square$



Korollar 21.4. *Die reelle Sinusfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion*

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1],$$

und die reelle Kosinusfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1].$$

Beweis. Siehe Aufgabe 21.3. $\square$

Polarkoordinaten für $\mathbb{C}$

Satz 21.5. *Die komplexe Exponentialfunktion besitzt die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Es ist* $e^z = e^{z+2\pi i}$.
(2) *Es ist* $e^z = 1$ *genau dann, wenn* $z = 2\pi i n$ *für ein* $n \in \mathbb{Z}$ *ist.*
(3) *Es ist* $e^z = e^w$ *genau dann, wenn* $z - w = 2\pi i n$ *für ein* $n \in \mathbb{Z}$ *ist.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 15.10, aus Satz 21.3 und aus Satz 15.7. $\square$

Insbesondere gilt also die berühmte Formel

$$e^{2\pi i} = 1\,.$$

Aus der *Eulerschen Gleichung*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

kann man ebenso die Gleichung $e^{\pi i} = -1$ bzw. $e^{\pi i} + 1 = 0$ ablesen, die die fünf wichtigsten Zahlen der Mathematik enthält.

Satz 21.6. *Zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, gibt es eine eindeutige Darstellung*

$$z = r \cdot \exp(i\varphi) = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$ und mit $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Beweis. Wegen Satz 15.10 ist

$$|z| = |r|\left|e^{i\varphi}\right| = |r| = r,$$

d.h. r ist als Betrag der komplexen Zahl z festgelegt. Wir können durch den Betrag teilen und können dann davon ausgehen, dass eine komplexe Zahl $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und mit $a^2 + b^2 = 1$ vorliegt. Es ist dann zu zeigen, dass es eine eindeutige Darstellung

$$z = a + bi = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

gibt. Bei $a = 1$ (bzw. -1) ist $b = 0$ und $\varphi = 0$ (bzw. $\varphi = \pi$) ist die einzige Lösung. Wir zeigen, dass es für ein gegebenes $a \in]-1, 1[$ stets genau zwei Möglichkeiten für φ mit $a = \cos\varphi$ gibt, und eine davon wird durch das Vorzeichen von b ausgeschlossen. Bei $b \geq 0$ gibt es aufgrund von Korollar 21.4 ein eindeutiges $\varphi \in [0, \pi]$ mit $a = \cos\varphi$. Für dieses gilt $b = \sin\varphi$ wegen $a^2 + b^2 = 1$ und $b \geq 0$. Bei $b < 0$ gibt es wiederum ein eindeutiges $\theta \in [0, \pi]$ mit $a = \cos\theta$. Wegen $\sin\theta \geq 0$ ist dies aber keine Lösung für beide Gleichungen. Stattdessen erfüllt $\varphi := 2\pi - \theta$ beide Gleichungen. $\square$

Die in diesem Satz beschriebene Darstellung für eine komplexe Zahl heißen ihre *Polarkoordinaten.* Zu $z = x + iy$ heißt r der *Betrag* und φ das *Argument* (oder der *Winkel*) von z.

Der Satz sagt insbesondere, dass die Abbildung

$$[0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \varphi \longmapsto (\cos\varphi, \sin\varphi),$$

eine bijektive Parametrisierung des Einheitskreises liefert. Zu φ gehört also ein eindeutig bestimmter Punkt des Einheitskreises. Wir werden später sehen, dass φ die Länge des Kreisbogens zwischen $(1, 0)$ und dem Punkt $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ ist. Das bedeutet, dass φ der Winkel im Bogenmaß ist.

Die Grundidee des Winkels ist es, ein Paar aus zwei Halbgeraden durch einen Punkt gleichmäßig und beliebig fein unterteilen zu können. Diese Homogenitätseigenschaft wird durch das Argument φ erfüllt.

Lemma 21.7. *Seien* $\varphi, \psi \in [0, 2\pi[$. *Dann hängt der (euklidische) Abstand zwischen*

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) \text{ und } (\cos(\varphi+\psi), \sin(\varphi+\psi))$$

nur von ψ *ab. Insbesondere wird der Kreisbogen zwischen*

$$(1,0) \text{ und } (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

durch $\left(\cos\left(\frac{j}{n}\varphi\right), \sin\left(\frac{j}{n}\varphi\right)\right)$, $j = 0, \ldots, n$, *in* $n+1$ *Punkte derart unterteilt, dass benachbarte*[1] *Punkte den gleichen Abstand besitzen.*

Beweis. Der euklidische Abstand zwischen den beiden Punkten ist

$$\sqrt{(\cos(\varphi+\psi) - \cos\varphi)^2 + (\sin(\varphi+\psi) - \sin\varphi)^2}\,.$$

Unter Verwendung der Additionstheoreme kann man den Radikanden umformen zu

$$\begin{aligned}
& (\cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi - \cos\varphi)^2 + (\sin\varphi\,\cos\psi + \sin\psi\,\cos\varphi - \sin\varphi)^2 \\
= \; & \cos^2\varphi\,\cos^2\psi + \sin^2\varphi\,\sin^2\psi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\,\cos^2\psi + \sin^2\psi\,\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \\
& -2\cos\varphi\,\cos\psi\,\sin\varphi\,\sin\psi - 2\cos^2\varphi\,\cos\psi + 2\sin\varphi\,\sin\psi\,\cos\varphi \\
& +2\sin\varphi\,\cos\psi\,\sin\psi\,\cos\varphi - 2\sin^2\varphi\,\cos\psi - 2\sin\varphi\,\sin\psi\,\cos\varphi \\
= \; & 1 - 2\cos\psi + \cos^2\psi + \sin^2\psi \\
= \; & 2 - 2\cos\psi\,.
\end{aligned}$$

□

Korollar 21.8. *Für zwei komplexe Zahlen* $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ *und* $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ *ist*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Zwei komplexe Zahlen $\neq 0$ *werden also miteinander multipliziert, indem man ihre Beträge in* $\mathbb{R}_+$ *multipliziert und ihre Argumente (Winkel) addiert.*

Beweis. Die Aussage ist ein Spezialfall von Satz 15.7, die Interpretation als Winkel beruht auf Satz 21.6. □

Wurzeln aus komplexen Zahlen

Korollar 21.9. *Sei* $z \in \mathbb{C}$ *eine komplexe Zahl und* $n \in \mathbb{N}_+$. *Dann gibt es eine komplexe Zahl* w *mit*

$$w^n = z\,.$$

Beweis. Bei $z = 0$ ist $w = 0$ eine Lösung, sei also $z \neq 0$. Nach Satz 21.6 gibt es eine Darstellung

$$z = re^{i\varphi}$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$. Es sei $s = r^{1/n}$ die reelle n-te Wurzel von r, die nach Satz 13.7 existiert. Wir setzen

$$w = se^{\frac{i\varphi}{n}}\,.$$

[1] Gemeint ist in der Indizierung benachbart.

Dann ist nach Satz 15.7

$$w^n = (se^{\frac{i\varphi}{n}})^n = s^n(e^{\frac{i\varphi}{n}})^n = re^{n\frac{i\varphi}{n}} = re^{i\varphi} = z.$$

□

Diese letzte Aussage besagt, dass jedes Polynom der Form $X^n - z$ in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Insofern handelt es sich dabei um eine Vorstufe für den Fundamentalsatz der Algebra. Ein wichtiger Spezialfall liegt bei $z = 1$ vor. Man spricht von *komplexen Einheitswurzeln.*

Definition 21.10. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Dann heißen die komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^n - 1$$

n-te *komplexe Einheitswurzeln.*

Die 1 ist für jedes n eine n-te komplexe Einheitswurzel, und die -1 ist für jedes gerade n eine n-te komplexe Einheitswurzel.

Lemma 21.11. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Die Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$ über $\mathbb{C}$ sind*

$$e^{2\pi ik/n} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

In $\mathbb{C}[X]$ gilt die Faktorisierung

$$X^n - 1 = (X-1)(X - e^{2\pi i/n})\cdots(X - e^{2\pi i(n-1)/n})$$

Beweis. Es ist

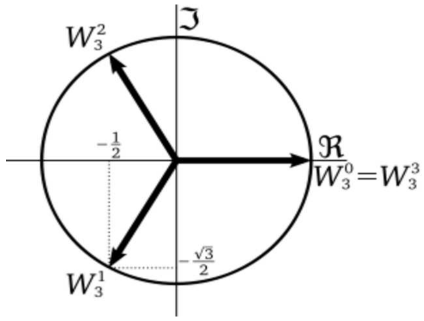
$$\left(e^{2\pi ik/n}\right)^n = e^{2\pi ik} = \left(e^{2\pi i}\right)^k = 1^k = 1.$$

Die angegebenen komplexen Zahlen sind also wirklich Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$. Diese Nullstellen sind alle untereinander verschieden, da aus

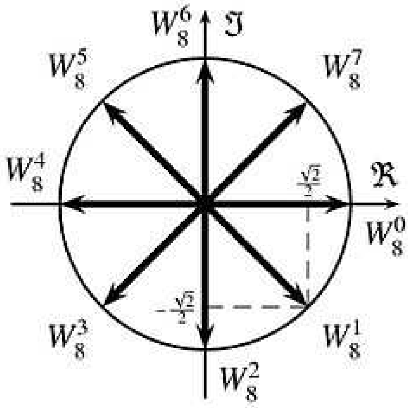
$$e^{2\pi ik/n} = e^{2\pi i\ell/n}$$

mit $0 \leq k \leq \ell \leq n-1$ sofort durch betrachten des Quotienten $e^{2\pi i(\ell-k)/n} = 1$ folgt, und daraus $\ell - k = 0$. Es gibt also n explizit angegebene Nullstellen und daher müssen dies alle Nullstellen des Polynoms sein. Die explizite Beschreibung in Koordinaten folgt aus der eulerschen Formel. Die Faktorzerlegung folgt aus Lemma 11.6. □

Es gibt also insbesondere genau n n-te komplexe Einheitswurzeln. Die komplexen Einheitswurzeln bilden nach Lemma 21.7 die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks, wobei die Eckpunkte auf dem Einheitskreis liegen und $(1, 0)$ dazugehört.



$\Im$
W_3^2
$-\frac{1}{2}$
$\Re$
$W_3^0 = W_3^3$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
W_3^1



W_8^6
$\Im$
W_8^5
W_8^7
W_8^4
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\Re$
W_8^0
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
W_8^3
W_8^1
W_8^2

Abbildungsverzeichnis