Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Vorlesung 19

In dieser Vorlesung untersuchen wir mit Mitteln der Differentialrechnung, wann eine Funktion

$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist, (lokale) Extrema besitzt und wie ihr Wachstumverhalten aussieht. Da man nur reelle Zahlen der Größe nach miteinander vergleichen kann, nicht aber komplexe Zahlen, muss die Wertemenge reell sein. Die Definitionsmenge könnte grundsätzlich beliebig sein, und wir werden im zweiten Semester entsprechende Überlegungen für Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ anstellen, hier ist aber die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ bzw. ein Teilintervall davon.

Satz 19.1. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und sei*

$$f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die in $a \in D$ ein lokales Extremum besitze und dort differenzierbar sei. Dann ist

$$f'(a) = 0\,.$$

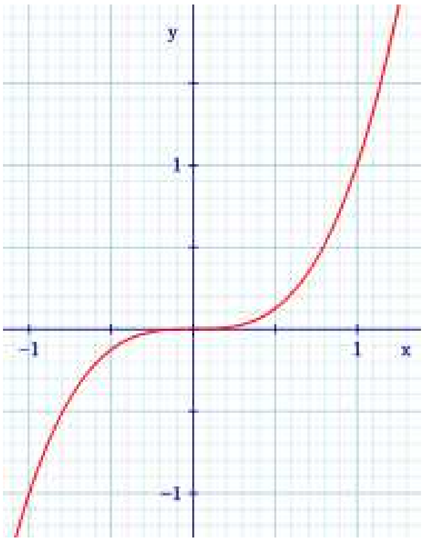
Beweis. Wir können annehmen, dass f ein lokales Maximum in a besitzt. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$. Es sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a - \epsilon \leq s_n < a$, die gegen a („von unten") konvergiere. Dann ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(s_n) - f(a)}{s_n - a} \geq 0\,,$$

was sich dann auf den Limes, den Differentialquotienten, überträgt. Also ist $f'(a) \geq 0$. Für eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a + \epsilon \geq t_n > a$ gilt andererseits

$$\frac{f(t_n) - f(a)}{t_n - a} \leq 0\,.$$

Daher ist auch $f'(a) \leq 0$ und somit ist $f'(a) = 0$. □



Man beachte, dass das Verschwinden der Ableitung nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Extremums ist. Das einfachste Beispiel für dieses Phänomen ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, die streng wachsend ist, deren Ableitung aber im Nullpunkt verschwindet.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

SATZ 19.2. *Sei $a < b$ und sei*

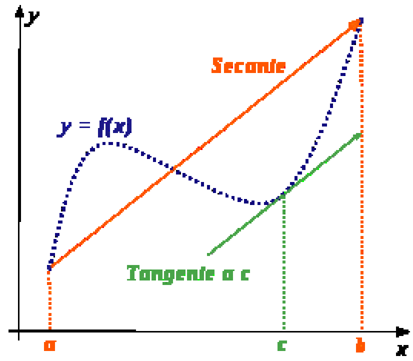
$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in]a,b[$ mit

$$f'(c) = 0\,.$$

Beweis. Wenn f konstant ist, so ist die Aussage richtig. Sei also f nicht konstant. Dann gibt es ein $x \in]a,b[$ mit $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Sagen wir, dass $f(x)$ größer als dieser Wert ist. Aufgrund von Satz 13.10 gibt es ein $c \in [a,b]$, wo die Funktion ihr Maximum annimmt, und dieser Punkt kann kein Randpunkt sein. Für dieses c ist dann $f'(c) = 0$ nach Satz 19.1. □

Der vorstehende Satz heißt *Satz von Rolle*.



Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt anschaulich gesprochen, dass es zu einer Sekante eine parallele Tangente gibt.

Der folgende Satz heißt *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*. Er besagt beispielsweise, dass bei einem differenzierbaren eindimensionalen Bewegungsvorgang die Durchschnittsgeschwindigkeit mindestens einmal als Momentangeschwindigkeit auftritt.

SATZ 19.3. *Sei $a < b$ und sei*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a,b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Diese Funktion ist ebenfalls stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Ferner ist $g(a) = f(a)$ und

$$g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Daher erfüllt g die Voraussetzungen von Satz 19.2 und somit gibt es ein $c \in]a,b[$ mit $g'(c) = 0$. Aufgrund der Ableitungsregeln gilt also

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

KOROLLAR 19.4. *Sei*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a,b[$. Dann ist f konstant.

Beweis. Wenn f nicht konstant ist, so gibt es $x < x'$ mit $f(x) \neq f(x')$. Dann gibt es aufgrund von Satz 19.3 ein c, $x < c < x'$, mit $f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \neq 0$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. ☐

SATZ 19.5. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Funktion f ist genau dann auf I wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in I$ ist.*
(2) *Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng wachsend.*
(3) *Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng fallend.*

Beweis. (1). Es genügt, die Aussagen für wachsende Funktionen zu beweisen. Wenn f wachsend ist, und $x \in I$ ist, so gilt für den Differenzenquotient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

für jedes h mit $x + h \in I$. Diese Abschätzung gilt dann auch für den Grenzwert, und dieser ist $f'(x)$. Sei umgekehrt die Ableitung ≥ 0. Nehmen wir an, dass es zwei Punkte $x < x'$ in I gibt mit $f(x) > f(x')$. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es dann ein c mit $x < c < x'$ mit

$$f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} < 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. (2). Es sei nun $f'(x) > 0$ mit nur endlich vielen Ausnahmen. Angenommen es wäre $f(x) = f(x')$ für zwei Punkte $x < x'$. Da f nach dem ersten Teil wachsend ist, ist f auf dem Intervall $[x, x']$ konstant. Somit ist $f' = 0$ auf diesem gesamten Intervall, ein Widerspruch dazu, dass f' nur endlich viele Nullstellen besitzt. ☐

KOROLLAR 19.6. *Eine reelle Polynomfunktion*

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ besitzt maximal $d-1$ lokale Extrema, und die reellen Zahlen lassen sich in maximal d Intervalle unterteilen, auf denen abwechselnd f streng wachsend oder streng fallend ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 19.5. ☐

Der zweite Mittelwertsatz und die Regel von l'Hospital

Die folgende Aussage heißt auch *zweiter Mittelwertsatz*.

Satz 19.7. *Es sei $b > a$ und seien*

$$f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit

$$g'(x) \neq 0$$

für alle $x \in]a, b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $c \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Beweis. Die Aussage

$$g(a) \neq g(b)$$

folgt aus Satz 19.2. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

Es ist

$$h(a) = h(b)$$

und Satz 19.2 liefert die Existenz eines $c \in]a, b[$ mit

$$h'(c) = 0.$$

Umstellen ergibt die Behauptung. □

L'Hospital (1661-1704)

Zur Berechnung von Grenzwerten einer Funktion, die als Quotient gegeben ist, ist die folgende *Regel von l'Hospital* hilfreich.

Korollar 19.8. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$ ein Punkt. Es seien*

$$f, g\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar seien mit $f(a) = g(a) = 0$ und mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq a$. Es sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert

$$w := \lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

und sein Wert ist ebenfalls w.

Beweis. Zur Ermittlung des Grenzwertes benutzen wir das Folgenkriterium. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Zu jedem x_n gibt es nach Satz 19.7, angewandt auf $I_n := [x_n, a]$ bzw. $[a, x_n]$, ein c_n (im Innern von I_n) mit

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}\,.$$

Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a, so dass nach Voraussetzung die rechte Seite gegen $\frac{f'(a)}{g'(a)} = w$ konvergiert. Daher konvergiert auch die linke Seite gegen w, und wegen $f(a) = g(a) = 0$ bedeutet das, dass $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ gegen w konvergiert. $\square$

Beispiel 19.9. Die beiden Polynome

$$3x^2 - 5x - 2 \text{ und } x^3 - 4x^2 + x + 6$$

haben beide für $x = 2$ eine Nullstelle. Es ist also nicht von vornherein klar, ob der Limes

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

existiert und welchen Wert er besitzt. Aufgrund der Regel von l'Hospital kann man den Grenzwert über die Ableitungen bestimmen, und das ergibt

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{6x - 5}{3x^2 - 8x + 1} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}.$$

Abbildungsverzeichnis