Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2014/2015

# Analysis I

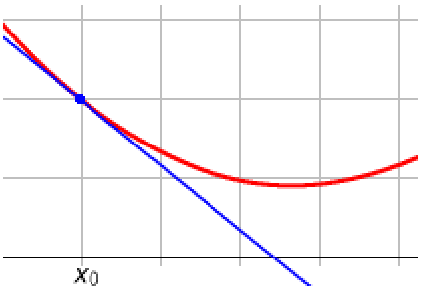
## Vorlesung 18

### Differenzierbare Funktionen

In dieser Vorlesung betrachten wir Funktionen

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei $D \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Menge in $\mathbb{K}$ ist. Das ist eine Menge derart, dass es zu jedem $a \in D$ auch eine offene Umgebung $U(a,r)$, $r > 0$, gibt, die ganz in $D$ liegt. Typische Beispiele sind $D = \mathbb{K}$, $U(a,r)$, $\mathbb{K} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.




Definition 18.1. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Zu $x \in D$, $x \neq a$, heißt die Zahl

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der *Differenzenquotient* von $f$ zu $a$ und $x$.

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante am Graphen durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Für $x = a$ ist dieser Quotient *nicht* definiert. Allerdings kann ein sinnvoller Limes für $x \to a$ existieren. Dieser repräsentiert dann die Steigung der „1“.

Definition 18.2. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass $f$ *differenzierbar* in $a$ ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in D \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Im Fall der Existenz heißt dieser Limes der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von $f$ in $a$, geschrieben

$$f'(a)\,.$$

Die Ableitung in einem Punkt $a$ ist, falls sie existiert, ein Element in $\mathbb{K}$. Häufig nimmt man die Differenz $h = x - a$ als Parameter für den Limes des Differenzenquotienten, und lässt $h$ gegen 0 gehen, d.h. man betrachtet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,.$$

Die Bedingung $x \in D \setminus \{a\}$ wird dann zu $a + h \in D$, $h \neq 0$.

Beispiel 18.3. Es seien $s, c \in \mathbb{K}$ und sei

$$\alpha\colon\ \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ z \longmapsto sz + c,$$

eine sogenannte affin-lineare Funktion. Zur Bestimmung der Ableitung in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$ betrachtet man

$$\frac{(sx+c) - (sa+c)}{x-a} = \frac{s(x-a)}{x-a} = s\,.$$

Dies ist konstant gleich $s$, so dass der Limes für $x$ gegen $a$ existiert und gleich $s$ ist. Die Ableitung in jedem Punkt existiert demnach und ist gleich $s$. Die *Steigung* der affin-linearen Funktion ist also die Ableitung.

Beispiel 18.4. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ z \longmapsto z^2.$$

Der Differenzenquotient zu $a$ und $a + h$ ist

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a+h.$$

Der Limes davon für $h$ gegen 0 ist $2a$. Die Ableitung ist daher $f'(a) = 2a$.

## Lineare Approximierbarkeit

Satz 18.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{K}$$

*eine Funktion. Dann ist $f$ in $a$ genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{K}$ und eine Funktion*

$$r\colon\ D \longrightarrow \mathbb{K}$$

*gibt mit $r$ stetig in $a$ und $r(a) = 0$ und mit*

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)\,.$$

*Beweis.* Wenn $f$ differenzierbar ist, so setzen wir $s := f'(a)$. Für die Funktion $r$ muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \text{ für } x \neq a\,, \\ 0 \text{ für } x = a\,, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\lim_{x\to a,\, x\in D\setminus\{a\}} r(x) \;=\; \lim_{x\to a,\, x\in D\setminus\{a\}} \left( \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \right),$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass $r$ in $a$ stetig ist. Wenn umgekehrt $s$ und $r$ mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für $x \neq a$ die Beziehung

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = s + r(x)\,.$$

Da $r$ stetig in $a$ ist, muss auch der Limes links für $x \to a$ existieren. $\square$

Die in diesem Satz formulierte Eigenschaft, die zur Differenzierbarkeit äquivalent ist, nennt man auch die *lineare Approximierbarkeit*. Die affin-lineare Abbildung

$$D \longrightarrow \mathbb{K},\; x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a),$$

heißt dabei die *affin-lineare Approximation*. Ihr Graph heißt die *Tangente* an $f$ im Punkt $a$. Die durch $f(a)$ gegebene konstante Funktion kann man als konstante Approximation ansehen.

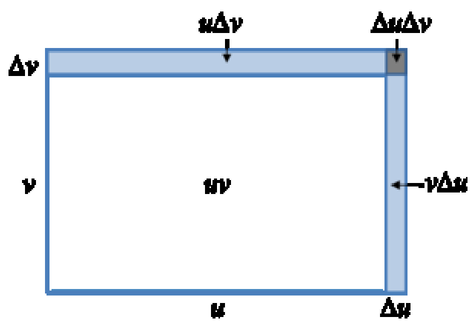
Korollar 18.6. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

*eine Funktion, die im Punkt $a$ differenzierbar sei. Dann ist $f$ stetig in $a$.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 18.5. $\square$

## Ableitungsregeln



Eine Veranschaulichung der Produktregel: Der Zuwachs eines Flächeninhalts entspricht der Summe der beiden Produkte aus Seitenlänge und Seitenlängezuwachs. Für den infinitesimalen Zuwachs ist das Produkt der beiden Seitenlängenzuwächse irrelevant.

Lemma 18.7. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f, g \colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

*zwei Funktionen, die in $a$ differenzierbar seien. Dann gelten folgende Differenzierbarkeitsregeln.*

(1) *Die Summe $f+g$ ist differenzierbar in $a$ mit*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) .$$
(2) *Das Produkt $f \cdot g$ ist differenzierbar in $a$ mit*
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) .$$
(3) *Für $c \in \mathbb{K}$ ist auch $cf$ in $a$ differenzierbar mit*
$$(cf)'(a) = cf'(a) .$$
(4) *Wenn $g$ keine Nullstelle in $D$ besitzt, so ist $1/g$ differenzierbar in $a$ mit*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2} .$$
(5) *Wenn $g$ keine Nullstelle in $D$ besitzt, so ist $f/g$ differenzierbar in $a$ mit*
$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} .$$

*Beweis.* (1). Wir schreiben $f$ bzw. $g$ mit den in Satz 18.5 formulierten Objekten, also
$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$
und
$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a) .$$
Summieren ergibt
$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (s+\tilde{s})(x-a) + (r+\tilde{r})(x)(x-a) .$$
Dabei ist die Summe $r+\tilde{r}$ wieder stetig in $a$ mit dem Wert 0. (2). Wir gehen wieder von
$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$
und
$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)$$
aus und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu
$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a))(g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)) \\ &= f(a)g(a) + (sg(a) + \tilde{s}f(a))(x-a) \\ &\quad +(f(a)\tilde{r}(x) + g(a)r(x) + s\tilde{s}(x-a) \end{aligned}$$

$$+s\tilde{r}(x)(x-a)+\tilde{s}r(x)(x-a)+r(x)\tilde{r}(x)(x-a))(x-a).$$

Aufgrund von Lemma 12.10 für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0 für $x = a$. (3) folgt aus (2), da eine konstante Funktion differenzierbar ist mit Ableitung 0. (4). Es ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \, .$$

Da $g$ nach Korollar 18.6 stetig in $a$ ist, konvergiert für $x \to a$ der linke Faktor gegen $-\frac{1}{g(a)^2}$ und wegen der Differenzierbarkeit von $g$ in $a$ konvergiert der rechte Faktor gegen $g'(a)$. (5) folgt aus (2) und (4). □

KOROLLAR 18.8. *Eine Polynomfunktion*

$$f = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n$$

*ist in jedem Punkt differenzierbar, und für die Ableitung gilt*

$$f'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \cdots + (n-1)c_{n-1} z^{n-2} + n c_n z^{n-1} \, .$$

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 18.7. □

SATZ 18.9. *Seien $D$ und $E$ offene Mengen in $\mathbb{K}$ und seien*

$$f \colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

*und*

$$g \colon E \longrightarrow \mathbb{K}$$

*Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Es sei $f$ in $a$ differenzierbar und $g$ sei in $b = f(a)$ differenzierbar. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung*

$$g \circ f \colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

*in $a$ differenzierbar mit der Ableitung*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \, .$$

*Beweis.* Aufgrund von Satz 18.5 kann man

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + s(y)(y - f(a))$$

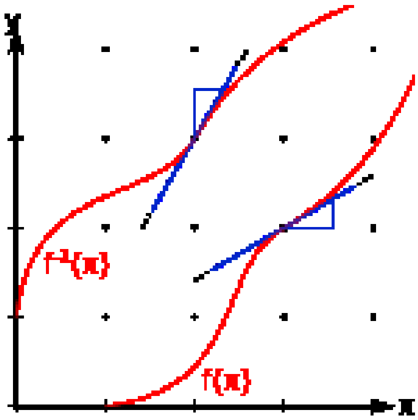
schreiben. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))\left(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)\right) \\ &\quad + s(f(x))\left(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)\right) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) \\ &\quad + \left(g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))\right)(x-a). \end{aligned}$$

Die hier ablesbare Restfunktion

$$t(x) := g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$$

ist stetig in $a$ mit dem Wert 0. □




Eine Veranschaulichung für die Ableitung der Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion besitzt den an der Hauptdiagonalen gespiegelten Graphen und die Tangente wird mitgespiegelt.

Satz 18.10. *Seien $D$ und $E$ offene Mengen in $\mathbb{K}$ und sei*

$$f\colon D \longrightarrow E$$

*eine bijektive stetige Funktion mit einer stetigen Umkehrfunktion*

$$f^{-1}\colon E \longrightarrow D$$

*Es sei $f$ in $a \in D$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}$ in $b = f(a)$ differenzierbar mit*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

*Beweis.* Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für $y \to b$ existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $E \setminus \{b\}$, die gegen $b$ konvergiert. Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von $f^{-1}$ konvergiert auch die Folge mit den Gliedern $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen $a$. Wegen der Bijektivität ist $x_n \neq a$ für alle $n$. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right)^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert. □

Beispiel 18.11. Die Funktion

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion $f$ mit $f(x) = x^2$ (eingeschränkt auf $\mathbb{R}_+$). Deren Ableitung in einem Punkt $a$ ist $f'(a) = 2a$. Nach Satz 18.10 gilt daher für $b \in \mathbb{R}_+$ die Beziehung

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Funktion

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{\frac{1}{3}},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion $f$ mit $f(x) = x^3$ Deren Ableitung in $a$ ist $f'(a) = 3a^2$, dies ist für $a \neq 0$ von 0 verschieden. Nach Satz 18.10 ist für $b \neq 0$ somit

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{3\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{3}b^{-\frac{2}{3}}.$$

Im Nullpunkt ist $f^{-1}$ nicht differenzierbar.

## Höhere Ableitungen

Definition 18.12. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass $f$ *differenzierbar* ist, wenn für jeden Punkt $a \in D$ die Ableitung $f'(a)$ von $f$ in $a$ existiert. Die Abbildung

$$f'\colon D \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f'(x),$$

heißt die *Ableitung* (oder *Ableitungsfunktion*) von $f$.

Definition 18.13. Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass $f$ $n$-mal *differenzierbar* ist, wenn $f$ $(n-1)$-mal differenzierbar ist und die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f^{(n)}(z) := (f^{(n-1)})'(z)$$

nennt man dann die $n$-te *Ableitung* von $f$.

Definition 18.14. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass $f$ *n-mal stetig differenzierbar* ist, wenn $f$ n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung $f^{(n)}$ stetig ist.

## Abbildungsverzeichnis