**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2014/2015**

# Analysis I

## Vorlesung 17

### Logarithmen

Satz 17.1. *Die reelle Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x,$$

*ist stetig und stiftet eine Bijektion zwischen* $\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{R}_+$.

*Beweis.* Die Stetigkeit folgt aus Korollar 16.10. Nach Korollar 15.8 (4) liegt das Bild in $\mathbb{R}_+$ und ist nach dem Zwischenwertsatz ein Intervall. Die Unbeschränktheit des Bildes folgt aus Korollar 15.8 (3), woraus wegen Korollar 15.8 (2), folgt, dass auch beliebig kleine positive reelle Zahlen zum Bild gehören. Daher ist das Bild gleich $\mathbb{R}_+$. Die Injektivität ergibt sich aus Korollar 15.8 (6). $\square$

Definition 17.2. Der *natürliche Logarithmus*

$$\ln :\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

ist als die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion definiert.

Satz 17.3. *Der natürliche Logarithmus*

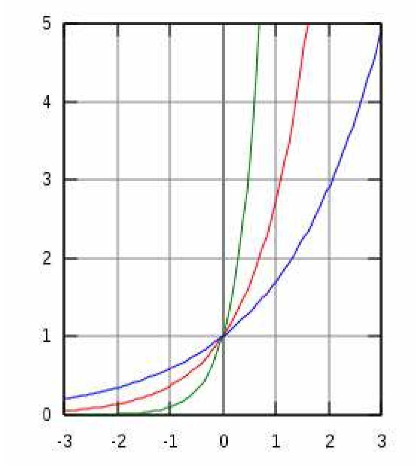
$$\ln :\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

*ist eine stetige, streng wachsende Funktion, die eine Bijektion zwischen* $\mathbb{R}_+$ *und* $\mathbb{R}$ *stiftet. Dabei gilt*

$$\ln (x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

*für alle* $x, y \in \mathbb{R}_+$.

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 17.1, Satz 13.5, Satz 15.7 und Korollar 15.8. $\square$




Die Exponentialfunktionen für verschiedene Basen

Definition 17.4. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$ definiert man die *Exponentialfunktion zur Basis* $b$ von $z \in \mathbb{C}$ als

$$b^z := \exp(z \ln b).$$

Aufgabe 17.1 zeigt, dass für reelle Argumente diese Definition mit der aus der 14ten Vorlesung übereinstimmt.

Satz 17.5. *Für die Exponentialfunktionen*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto a^z,$$

*zur Basis $a \in \mathbb{R}_+$ gelten die folgenden Rechenregeln (dabei seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $z, w \in \mathbb{C}$, bei (4) sei zusätzlich $z \in \mathbb{R}$).*

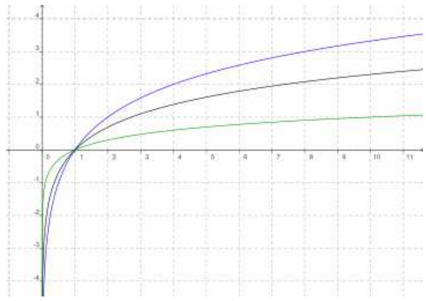
(1) $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$.
(2) $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$.
(3) $(ab)^z = a^z b^z$.
(4) $(a^z)^w = a^{zw}$.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 17.2. □

Definition 17.6. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$ wird der *Logarithmus zur Basis* $b$ von $x \in \mathbb{R}_+$ durch

$$\log_b x := \frac{\ln x}{\ln b}$$

definiert.



Logarithmen zu verschiedenen Basen

Satz 17.7. *Die Logarithmen zur Basis $b$ erfüllen die folgenden Rechenregeln.*

(1) *Es ist* $\log_b(b^x) = x$ *und* $b^{\log_b(y)} = y$, *das heißt der Logarithmus zur Basis $b$ ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis $b$.*
(2) *Es gilt* $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
(3) *Es gilt* $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ *für* $u \in \mathbb{R}$.
(4) *Es gilt*

$$\log_a y \,=\, \log_a \left(b^{\log_b y}\right) \,=\, \log_b y \cdot \log_a b.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 17.3. □

## Summierbarkeit

Bei einer Reihe sind die aufzusummierenden Glieder durch die natürlichen Zahlen geordnet. Häufig kommt es vor, dass diese Ordnung verändert wird. Dafür ist es sinnvoll, einen Summationsbegriff zu besitzen, der unabhängig von jeder Ordnung der Indexmenge ist. Wir werden diese Theorie nicht systematisch entwickeln, sondern nur den großen Umordnungssatz beweisen, den wir sogleich für das Entwickeln einer Potenzreihen in einem neuen Entwicklungspunkt benötigen. Die Familie sei als $a_i$ , $i \in I$, gegeben. Für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ kann man die zugehörigen Glieder aufsummieren, und wir setzen

$$a_E \,=\, \sum_{i \in E} a_i.$$

Eine sinnvolle Aufsummierung der gesamten Familie muss auf diese endlichen Teilsummen $a_E$ Bezug nehmen.

Definition 17.8. Sei $I$ eine Indexmenge und $a_i$, $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Diese Familie heißt *summierbar*, wenn es ein $s \in \mathbb{C}$ gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart, dass für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$ die Beziehung

$$|a_E - s| \,\leq\, \epsilon$$

gilt. Dabei ist $a_E \,=\, \sum_{i \in E} a_i$. Im summierbaren Fall heißt $s$ die *Summe* der Familie.

DEFINITION 17.9. Sei $I$ eine Indexmenge und $a_i$, $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Diese Familie heißt eine *Cauchy-Familie*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart gibt, dass für jede endliche Teilmenge $D \subseteq I$ mit $E_0 \cap D = \emptyset$ die Beziehung

$$|a_D| \leq \epsilon$$

gilt. Dabei ist $a_D = \sum_{i \in D} a_i$.

LEMMA 17.10. *Sei $I$ eine Indexmenge und $a_i$, $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Dann ist die Familie genau dann summierbar, wenn sie eine Cauchy-Familie ist.*

*Beweis.* Sei zunächst die Familie summierbar mit der Summe $s$, und sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\epsilon/2$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart, dass für alle endlichen Mengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$ die Abschätzung $|a_E - s| \leq \epsilon/2$ gilt. Für jede zu $E_0$ disjunkte endliche Teilmenge $D$ gilt dann

$$\begin{aligned} |a_D| &= |a_D + a_{E_0} - s - a_{E_0} + s| \\ &\leq |a_D + a_{E_0} - s| + |a_{E_0} - s| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

so dass die Cauchy-Bedingung erfüllt ist. Sei nun $a_i$ , $i \in I$, eine Cauchy-Familie. Wir brauchen zunächst einen Kandidaten für die Summe. Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_n \subseteq I$ derart, dass für jede endliche Teilmenge $D \subseteq I$ mit $E_n \cap D = \emptyset$ die Abschätzung $|a_D| \leq 1/n$ gilt. Wir können annehmen, dass $E_n \subseteq E_{n+1}$ für alle $n$ gilt. Wir setzen

$$x_n := a_{E_n} = \sum_{i \in E_n} a_i.$$

Für $k \geq m \geq n$ gilt

$$|x_k - x_m| = \left| \sum_{i \in E_k} a_i - \sum_{i \in E_m} a_i \right| = \left| a_{E_k \setminus E_m} \right| \leq 1/m \leq 1/n,$$

da die Menge $E_k \setminus E_m$ disjunkt zu $E_m$ ist. Daher ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und somit wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ konvergent gegen ein $s \in \mathbb{C}$. Wir behaupten, dass die Familie summierbar ist mit der Summe $s$. Sei dazu ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt $n \in \mathbb{N}_+$ mit $1/n \leq \epsilon/2$. Dann ist wegen der Folgenkonvergenz und der Abschätzung von eben $|x_n - s| \leq \epsilon/2$. Für jedes endliche $E \supseteq E_n$ schreiben wir $E = E_n \cup D$ mit $E_n \cap D = \emptyset$. Damit gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |a_E - s| &= |a_{E_n} + a_D - s| \\ &\leq |a_{E_n} - s| + |a_D| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Korollar 17.11. *Es sei $a_i$ , $i \in I$, eine summierbare Familie komplexer Zahlen und $J \subseteq I$ eine Teilmenge. Dann ist auch $a_i$ , $i \in J$, summierbar.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 17.7. □

## Der große Umordnungssatz

Satz 17.12. *Es sei $a_i$, $i \in I$, eine summierbare Familie von komplexen Zahlen mit der Summe $s$. Es sei $J$ eine weitere Indexmenge und zu jedem $j \in J$ sei eine Teilmenge $I_j \subseteq I$ gegeben mit $\bigcup_{j \in J} I_j = I$ und $I_j \cap I_{j'} = \emptyset$ für $j \neq j'$.*[1] *Dann sind die Teilfamilien $a_i$, $i \in I_j$, summierbar und für ihre Summen $s_j = \sum_{i \in I_j} a_i$ gilt, dass die Familie $s_j$, $j \in J$, summierbar ist mit*

$$s = \sum_{j \in J} s_j \, .$$

*Beweis.* Die Summierbarkeit der Teilfamilien folgt aus Korollar 17.11. Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da die Ausgangsfamilie summierbar ist, gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ mit

$$|a_E - s| \leq \epsilon/2$$

für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$. Es gibt eine endliche Teilmenge $F_0 \subseteq J$ derart, dass

$$E_0 \subseteq \bigcup_{j \in F_0} I_j$$

ist. Wir behaupten, dass dieses $F_0$ für die Familie $s_j$ , $j \in J$, die Summationseigenschaft für $\epsilon$ erfüllt. Sei dazu $F \subseteq J$ mit $F_0 \subseteq F$ endlich und $n = \#(F)$. Da die Familien $a_i$ , $i \in I_j$, summierbar sind mit den Summen $s_j$, gibt es für jedes $j \in F$ ein endliches $G_{j,0} \subseteq I_j$ mit

$$\left| a_{G_j} - s_j \right| \leq \epsilon/2n$$

für alle endlichen $G_j \subseteq I_j$ mit $G_{j,0} \subseteq G_j$. Wir wählen nun für jedes $j \in F$ ein solches $G_j$ so, dass zusätzlich $E_0 \cap I_j \subseteq G_j$ gilt. Dann ist $E_0 \subseteq E := \bigcup_{j \in F} G_j$ und daher $\left| \sum_{j \in F} a_{G_j} - s \right| = \left| \sum_{i \in E} a_i - s \right| \leq \epsilon/2$. Somit haben wir insgesamt die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in F} s_j - s \right| &= \left| \sum_{j \in F} \left( s_j - a_{G_j} \right) + \sum_{j \in F} a_{G_j} - s \right| \\ &\leq \sum_{j \in F} \left| s_j - a_{G_j} \right| + \left| \sum_{j \in F} a_{G_j} - s \right| \end{aligned}$$

[1] D.h. die $I_j$ bilden eine disjunkte Vereinigung von $I$.

$$\begin{aligned} &\leq n \cdot \epsilon/2n + \left| \sum_{i \in E} a_i - s \right| \\ &\leq n \cdot \epsilon/2n + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

## Der Entwicklungssatz für Potenzreihen

Satz 17.13. *Es sei*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

*eine konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$ und sei $b \in U(a, R)$. Dann gibt es eine konvergente Potenzreihe*

$$h = \sum_{i=0}^{\infty} d_i (z-b)^i$$

*mit Entwicklungspunkt $b$ und mit einem Konvergenzradius $s \geq R - |a-b| > 0$ derart, dass die durch diese beiden Potenzreihen dargestellten Funktionen auf $U(b, s)$ übereinstimmen. Die Koeffizienten von $h$ sind*

$$d_i = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} c_n (b-a)^{n-i}$$

*und insbesondere ist*

$$d_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (b-a)^{n-1}.$$

*Beweis.* Zur Notationsvereinfachung sei $a = 0$, $b \in U(0, R)$ und $z \in U(b, R - |b|)$. Wir betrachten die Familie

$$x_{ni} = c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i},\ n \in \mathbb{N},\ i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Wir zeigen zuerst, dass diese Familie summierbar ist. Dies folgt aus der Abschätzung (unter Verwendung von Aufgabe 17.9)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0,\ldots,N,\, i=0,\ldots,n} \left| c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i} \right| &\leq \sum_{n=0}^{N} |c_n| \left( \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} |z-b|^i |b|^{n-i} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{N} |c_n| \left( |z-b| + |b| \right)^n \end{aligned}$$

und daraus, dass wegen $|z-b|+|b|<R$ gemäß Lemma 16.7 die rechte Seite für beliebiges $N$ beschränkt ist. Wegen der Summierbarkeit gelten aufgrund des großen Umordnungssatzes die Gleichungen

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n((z-b)+b)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left( \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i} \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N},\, i=0,\ldots,n} c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} c_n b^{n-i} \right) (z-b)^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} d_i (z-b)^i .
\end{aligned}$$

$\square$

## Abbildungsverzeichnis