**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2015/2016**

# Analysis III

## Vorlesung 80

### Eigenschaften des Dachprodukts

Die folgende Aussage beschreibt die universelle Eigenschaft des Dachproduktes.

SATZ 80.1. *Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Es sei*

$$\psi\colon V^n \longrightarrow W$$

*eine alternierende multilineare Abbildung in einen weiteren $K$-Vektorraum $W$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung*

$$\tilde{\psi}\colon \bigwedge^n V \longrightarrow W$$

*derart, dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} V^n \arrow[r] \arrow[dr] & \bigwedge^n V \arrow[d] \\ & W \end{tikzcd}$$

*kommutiert.*

*Beweis.* Wir verwenden die Notation aus Konstruktion 79.4. Durch die Zuordnung

$$e_{(v_1,\ldots,v_n)} \longmapsto \psi(v_1,\ldots,v_n)$$

wird nach Satz 10.9 (Lineare Algebra (Osnabrück 2015-2016)) eine $K$-lineare Abbildung

$$\bar{\psi}\colon H \longrightarrow W$$

definiert. Da $\psi$ multilinear und alternierend ist, wird unter $\bar{\psi}$ der Untervektorraum $U \subseteq H$ auf 0 abgebildet. Nach Satz 48.4 (Lineare Algebra (Osnabrück 2015-2016)) gibt es daher eine $K$-lineare Abbildung

$$\tilde{\psi}\colon H/U \longrightarrow W,$$

die mit $\bar{\psi}$ verträglich ist. Die Eindeutigkeit ergibt sich daraus, dass die $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^n V$ bilden und diese auf $\psi(v_1,\ldots,v_n)$ abgebildet werden müssen. □

Es bezeichne $\operatorname{Alt}^n(V,K)$ die Menge aller alternierenden Abbildungen von $V^n$ nach $K$. Diese Menge kann man mit einer natürlichen $K$-Vektorraumstruktur versehen.

Korollar 80.2. *Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\left(\bigwedge^n V\right)^* \longrightarrow \operatorname{Alt}^n(V,K),\ \psi \longmapsto ((v_1,\ldots,v_n) \mapsto \psi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)).$$

*Beweis.* Die Abbildung ist einfach die Verknüpfung $\psi \mapsto \delta \circ \psi$, wobei $\delta\colon V \times \cdots \times V \to \bigwedge^n V$ die kanonische Abbildung bezeichnet. Die Linearität der Zuordnung ergibt sich aus den linearen Strukturen des Dualraumes und des Raumes der alternierenden Formen. Die Bijektivität der Abbildung folgt aus Satz 80.1, angewendet auf $W = K$. □

Satz 80.3. *Es sei $K$ ein Körper und $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum der Dimension $m$. Es sei $v_1,\ldots,v_m$ eine Basis von $V$ und es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann bilden die Dachprodukte*

$$v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n} \text{ mit } 1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m$$

*eine Basis von $\bigwedge^n V$.*

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass ein Erzeugendensystem vorliegt. Da die Elemente der Form $w_1 \wedge \ldots \wedge w_n$ nach Lemma 79.6 (1) ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^n V$ bilden, genügt es zu zeigen, dass man diese durch die angegebenen Elemente darstellen kann. Für jedes $w_j$ gibt es eine Darstellung $w_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i$, daher kann man nach Lemma 79.6 (4) die $w_1 \wedge \ldots \wedge w_n$ als Linearkombinationen von Dachprodukten der Basiselemente darstellen, wobei allerdings jede Reihenfolge vorkommen kann. Sei also $v_{k_1} \wedge \ldots \wedge v_{k_n}$ gegeben mit $k_j \in \{1,\ldots,m\}$. Durch Vertauschen von benachbarten Vektoren kann man nach Lemma 79.6 (3) (unter Inkaufnahme eines anderen Vorzeichens) erreichen, dass die Indizes (nicht notwendigerweise streng) aufsteigend geordnet sind. Wenn sich ein Index wiederholt, so ist nach Lemma 79.6 (2) das Dachprodukt 0. Also wiederholt sich kein Index und diese Dachprodukte sind in der gewünschten Form.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit zeigen wir, dass es zu jeder $n$-elementigen Teilmenge $I = \{i_1,\ldots,i_n\} \subseteq \{1,\ldots,m\}$ (mit $i_1 < \ldots < i_n$) eine $K$-lineare Abbildung

$$\bigwedge^n V \longrightarrow K$$

gibt, die $v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n}$ nicht auf 0 abbildet, aber alle anderen in Frage stehenden Dachprodukte auf 0 abbildet. Dazu genügt es nach Satz 80.1, eine alternierende multilineare Abbildung

$$\triangle\colon V^n \longrightarrow K$$

anzugeben mit $\triangle(v_{i_1},\ldots,v_{i_n}) \neq 0$, aber mit $\triangle(v_{j_1},\ldots,v_{j_n}) = 0$ für jedes andere aufsteigende Indextupel. Es sei $U$ der von den $v_i$, $i \neq i_k$, erzeugte Untervektorraum von $V$ und $W = V/U$ der Restklassenraum. Dann bilden die Bilder der $v_{i_k}$, $k = 1, \ldots, n$, eine Basis von $W$, und die Bilder von allen anderen $n$-Teilmengen der gegebenen Basis bilden dort keine Basis, da mindestens ein Element davon auf 0 geht. Wir betrachten nun die zusammengesetzte Abbildung

$$\triangle : V^n \longrightarrow W^n \cong (K^n)^n \xrightarrow{\det} K .$$

Diese Abbildung ist nach Satz 16.9 (Lineare Algebra (Osnabrück 2015-2016)) multilinear und nach Satz 16.10 (Lineare Algebra (Osnabrück 2015-2016)) alternierend. Nach Satz 16.11 (Lineare Algebra (Osnabrück 2015-2016)) ist $\triangle(z_1, \ldots, z_n) = 0$ genau dann, wenn die Bilder von $z_i$ in $W$ keine Basis bilden. $\square$

Bei $V = K^m$ mit der Standardbasis $e_1, \ldots, e_m$ nennt man die $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ mit $i_1 < \ldots < i_n$ die *Standardbasis* von $\bigwedge^n K^m$.

Korollar 80.4. *Es sei $K$ ein Körper und $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum der Dimension $m$. Dann besitzt das $n$-te äußere Produkt $\bigwedge^n V$ die Dimension*

$$\binom{m}{n} .$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 80.3 und Aufgabe 3.15. $\square$

Insbesondere ist die äußere Potenz für $n = 0$ eindimensional (es ist $\bigwedge^0 V = K$) und für $n = 1$ $m$-dimensional (es ist $\bigwedge^1 V = V$). Für $n = m$ ist $\bigwedge^m V$ eindimensional, und die Determinante induziert (nach einer Identifizierung von $V$ mit $K^m$) einen Isomorphismus

$$\bigwedge^m V \longrightarrow K,\ (v_1, \ldots, v_m) \longmapsto \det(v_1, \ldots, v_m).$$

Für $n > m$ sind die äußeren Produkte der Nullraum und besitzen die Dimension 0.

Wir erweitern die oben gezeigte natürliche Isomorphie $(\bigwedge^n V)^* \cong \operatorname{Alt}^n(V, K)$ zu einer natürlichen Isomorphie

$$\bigwedge^n V^* \cong \left( \bigwedge^n V \right)^* \cong \operatorname{Alt}^n(V, K).$$

Satz 80.5. *Es sei $K$ ein Körper und $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\psi\colon \bigwedge^k V^* \longrightarrow \left( \bigwedge^k V \right)^*$$

*mit*

$$(\psi(f_1 \wedge \ldots \wedge f_k))(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = \det(f_i(v_j))_{ij}$$

*(mit $f_i \in V^*$ und $v_j \in V$).*

*Beweis.* Wir betrachten die Abbildung (mit $k$ Faktoren)

$$V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow \operatorname{Abb}(V \times \cdots \times V, K)$$

mit

$$(f_1, \ldots, f_k) \longmapsto \left( (v_1, \ldots, v_k) \longmapsto \det\, (f_i(v_j))_{ij} \right) .$$

Für fixierte $f_1, \ldots, f_k$ ist die Abbildung rechts multilinear und alternierend, wie eine direkte Überprüfung unter Verwendung der Determinantenregeln zeigt. Daher entspricht diese nach Korollar 80.2 einem Element in $\left( \bigwedge^k V \right)^*$. Insgesamt liegt also eine Abbildung

$$V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow \left( \bigwedge^k V \right)^*$$

vor. Eine direkte Prüfung zeigt, dass die Gesamtzuordung ebenfalls multilinear und alternierend ist. Aufgrund der universellen Eigenschaft gibt es daher eine lineare Abbildung

$$\psi \colon \bigwedge^k V^* \longrightarrow \left( \bigwedge^k V \right)^* .$$

Diese müssen wir als Isomorphismus nachweisen. Sei dazu $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $V$ mit der zugehörigen Dualbasis $v_1^*, \ldots, v_n^*$. Nach Satz 80.3 bilden die

$$v_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge v_{i_k}^*, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n,$$

eine Basis von $\bigwedge^k V^*$. Ebenso bilden die

$$v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k}, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n,$$

eine Basis von $\bigwedge^k V$ mit zugehöriger Dualbasis $(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k})^*$. Wir zeigen, dass $v_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge v_{i_k}^*$ unter $\psi$ auf $(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k})^*$ abgebildet wird. Für $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ ist

$$\left( \psi \left( v_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge v_{i_k}^* \right) \right) (v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_k}) = \det \left( v_{i_r}^* \left( v_{j_s} \right)_{1 \leq r,s \leq k} \right) .$$

Bei $\{i_1, \ldots, i_k\} \neq \{j_1, \ldots, j_k\}$ gibt es ein $i_r$, das von allen $j_s$ verschieden ist. Daher ist die $r$-te Zeile der Matrix 0 und somit ist die Determinante 0. Wenn dagegen die Indexmengen übereinstimmen, so ergibt sich die Einheitsmatrix mit der Determinante 1. Diese Wirkungsweise stimmt mit der von $(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k})^*$ überein. $\square$

## Dachprodukte bei linearen Abbildungen

Korollar 80.6. *Es sei $K$ ein Körper, $V$ und $W$ seien $K$-Vektorräume und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

*sei eine $K$-lineare Abbildung. Dann gibt es zu jeden $n \in \mathbb{N}$ eine $K$-lineare Abbildung*

$$\bigwedge^n \varphi\colon \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n W$$

*mit $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \mapsto \varphi(v_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(v_n)$.*

*Beweis.* Die Abbildung

$$V^n \stackrel{\varphi\times\cdots\times\varphi}{\longrightarrow} W^n \stackrel{\delta}{\longrightarrow} \bigwedge^n W$$

ist multilinear und alternierend. Daher gibt es nach Satz 80.1 eine eindeutig bestimmte alternierende multilineare Abbildung

$$\bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n W$$

mit $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \mapsto \varphi(v_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(v_n)$. □

Proposition 80.7. *Es sei $K$ ein Körper, $V$ und $W$ seien $K$-Vektorräume und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

*sei eine $K$-lineare Abbildung. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\bigwedge^n \varphi\colon \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n W$$

*die zugehörige $K$-lineare Abbildung. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Wenn $\varphi$ surjektiv ist, dann ist auch $\bigwedge^n \varphi$ surjektiv.*
(2) *Wenn $\varphi$ injektiv ist, dann ist auch $\bigwedge^n \varphi$ injektiv.*
(3) *Wenn $U$ ein weiterer $K$-Vektorraum und*

$$\psi\colon U \longrightarrow V$$

*eine weitere $K$-lineare Abbildung ist, so gilt*

$$\bigwedge^n (\varphi \circ \psi) = \left(\bigwedge^n \varphi\right) \circ \left(\bigwedge^n \psi\right).$$

*Beweis.* (1). Seien $w_1, \ldots, w_n \in W$ gegeben und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ Urbilder davon, also $\varphi(v_i) = w_i$. Dann ist

$$\left(\bigwedge^n \varphi\right)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = w_1 \wedge \ldots \wedge w_n.$$

Nach Lemma 79.6 (1) ergibt sich die Surjektivität. (2). Wir können aufgrund der Konstruktion des Dachproduktes annehmen, dass $V$ und $W$ endlichdimensional ist. Die Aussage folgt dann aufgrund der expliziten Beschreibung der Basen in Satz 80.3. (3). Es genügt, die Gleichheit für das Erzeugendensystem $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ mit $u_i \in U$ zu zeigen, wofür es klar ist. $\square$

LEMMA 80.8. *Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte multilineare Abbildung*

$$\left( \bigwedge^n V \right) \times \left( \bigwedge^m V \right) \longrightarrow \bigwedge^{n+m} V$$

*mit*

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n, w_1 \wedge \ldots \wedge w_m) \longmapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_m .$$

*Beweis.* Da die Dachprodukte $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ bzw. $w_1 \wedge \ldots \wedge w_m$ jeweils Erzeugendensysteme sind, kann es maximal eine multilineare Abbildung geben, die für die Dachprodukte einfach die Verkettung ist. Für beliebige Linearkombinationen $\alpha = \sum_{i \in I} a_i v_{i1} \wedge \ldots \wedge v_{in}$ und $\beta = \sum_{j \in J} b_j w_{j1} \wedge \ldots \wedge w_{jm}$ muss dann (wegen der geforderten Multilinearität)

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \left( \sum_{i \in I} a_i v_{i1} \wedge \ldots \wedge v_{in} \right) \wedge \left( \sum_{j \in J} b_j w_{j1} \wedge \ldots \wedge w_{jm} \right) \\ &= \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j v_{i1} \wedge \ldots \wedge v_{in} \wedge w_{j1} \wedge \ldots \wedge w_{jm} \end{aligned}$$

gelten. Wir müssen zeigen, dass dadurch eine wohldefinierte Abbildung gegeben ist, d.h. dass die Summe rechts nicht von den für $\alpha$ bzw. $\beta$ gewählten Darstellungen abhängt. Sei also $\alpha = \sum_{i \in I} c_i v_{i1} \wedge \ldots \wedge v_{in}$ eine zweite Darstellung, wobei wir die Indexmenge als gleich annehmen dürfen, da wir fehlende Summanden mit dem Koeffizienten 0 versehen können. Die Differenz $\sum_{i \in I} (a_i - c_i) v_{i1} \wedge \ldots \wedge v_{in}$ ist dann eine (im Allgemeinen nicht triviale) Darstellung der 0. D.h. $\sum_{i \in I} (a_i - c_i) e_{v_{i1}, \ldots, v_{in}}$ ist eine Linearkombination aus den in Konstruktion 79.4 beschriebenen Standardrelationen für das Dachprodukt. Wenn man eine solche Standardrelation der Länge $n$ in jedem Summanden um das Indextupel $w_1, \ldots, w_m$ erweitert, so erhält man eine Standardrelation der Länge $n + m$. Dies bedeutet, dass aus einer Darstellung der 0 bei der Verknüpfung mit einem beliebigen $\beta$ eine Darstellung der 0 entsteht. Daher ist das Dachprodukt $\alpha \wedge \beta$ unabhängig von der gewählten Darstellung für $\alpha$. Da man die Rollen von $\alpha$ und $\beta$ vertauschen kann, ist die Darstellung auch unabhängig von der gewählten Darstellung für $\beta$. Die Multilinearität folgt unmittelbar aus der expliziten Beschreibung. $\square$

# Abbildungsverzeichnis