

## Analysis III

### Vorlesung 78

#### Abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten

DEFINITION 78.1. Es sei  $N$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  und  $M \subseteq N$  eine abgeschlossene Teilmenge. Dann heißt  $M$  eine *abgeschlossene Untermannigfaltigkeit* der Dimension  $m$  von  $N$ , wenn es zu jedem Punkt  $P \in M$  eine Karte<sup>1</sup>

$$\theta: W \longrightarrow W'$$

gibt mit  $P \in W \subseteq N$  offen,  $W' \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und mit

$$M \cap W = \theta^{-1}((\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W').$$

Dies ist genau die Eigenschaft, die die Faser einer differenzierbaren Abbildung zwischen euklidischen Räumen in einem regulären Punkt aufgrund des Satzes über implizite Abbildungen besitzt. D.h. solche Fasern sind abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten von  $N = \mathbb{R}^n$ .

SATZ 78.2. *Es sei  $N$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  und  $M \subseteq N$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Dimension  $m$  von  $N$ . Dann ist  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit derart, dass die Inklusion  $M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung ist.*

*Beweis.* Die differenzierbare Struktur auf  $M$  ist durch die eingeschränkten Karten

$$\theta|_M: M \cap W \longrightarrow (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W'$$

gegeben. Dass sich die Diffeomorphieeigenschaft der Kartenwechsel auf die Einschränkungen überträgt ergibt sich wie im Beweis zu Satz 76.2. Dass eine differenzierbare Abbildung vorliegt ergibt sich daraus, dass zu einem offenen Kartengebiet  $W \subseteq N$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M \cap W & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & N \end{array}$$

gehört, wobei die vertikalen Pfeile offene und die horizontalen Pfeile abgeschlossene Einbettungen repräsentieren. Der obere Pfeil korrespondiert über die Kartenwechsel zu

$$(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W' \longrightarrow W',$$

---

<sup>1</sup>Hier ist mit Karte jede Karte gemeint, die mit dem vorgegebenen Atlas verträglich ist; sie muss nicht selbst zum Atlas gehören.

also zur abgeschlossenen Einbettung eines Koordinatenunterraums, die natürlich differenzierbar ist.  $\square$

**SATZ 78.3.** *Es sei  $N$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  und es sei  $M \subseteq N$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Dimension  $m$ . Dann ist für jeden Punkt  $P \in M$  die Tangentialabbildung*

$$T_P M \longrightarrow T_P N$$

*injektiv. D.h. der Tangentialraum  $T_P M$  ist ein Untervektorraum der Dimension  $m$  von  $T_P N$ .*

*Beweis.* Sei  $P \in M$  und  $P \in V \subseteq N$  ein Kartengebiet mit der Karte

$$\alpha: V \longrightarrow V'$$

und mit der eingeschränkten Karte

$$U = M \cap V \longrightarrow U' = \mathbb{R}^m \cap V'.$$

Nach Lemma 77.10 (2) haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_P M & \longrightarrow & T_P N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(D(\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}))_{\alpha(P)}} & \mathbb{R}^n \end{array} .$$

Die untere horizontale Abbildung ist dabei das totale Differential zur Inklusion  $\mathbb{R}^m \cap V' \rightarrow V'$ , und diese ist die lineare Inklusion  $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ , also injektiv. Da die vertikalen Abbildungen bijektiv sind, ist auch die obere horizontale Abbildung injektiv.  $\square$

Durch die letzte Aussage ergibt sich auch, dass der in einem regulären Punkt  $P$  der Faser  $M$  einer differenzierbaren Abbildung  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, als Kern des totalen Differentials (als Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n = T_P \mathbb{R}^n$ ) definierte Tangentialraum mit dem Tangentialraum an die Faser als einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit übereinstimmt. Der (abstrakte) Tangentialraum  $T_P M$  ist aufgrund von Satz 78.3 ein Untervektorraum von  $T_P \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - k$ . Auch der Kern des surjektiven totalen Differentials  $(D\varphi)_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  ist ein  $(n - k)$ -dimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$ . Die Gleichheit der beiden Untervektorräume ergibt sich daraus, dass die den abstrakten Tangentialraum definierenden differenzierbaren Kurven

$$\gamma: I \longrightarrow M$$

verknüpft mit  $\varphi$  konstant sind, siehe Aufgabe 78.21.

## Das Tangentialbündel

Zu jedem Punkt  $P \in M$  einer Mannigfaltigkeit gehört der Tangentialraum  $T_P M$ . Der Tangentialraum ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum, wobei  $n$  die

Dimension der Mannigfaltigkeit ist. Seine Elemente sind die Tangentenvektoren, das sind „infinitesimale Richtungen“ an diesem Punkt. Solche Tangenten-Richtungen an zwei verschiedenen Punkten haben zunächst einmal nichts miteinander zu tun, da ihre präzise Definition jeweils nur von beliebig kleinen offenen Umgebungen der Punkte abhängt, und da diese aufgrund der Hausdorff-Eigenschaft disjunkt gewählt werden können.

Dem steht radikal die Vorstellung gegenüber, die sich mit einer offenen Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  verbindet. Dort kann man für jeden Punkt  $Q \in V$  den Tangentialraum  $T_Q V$  mit dem umgebenden Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  in natürlicher Weise identifizieren, indem man dem Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  den Tangentenvektor zuordnet, der durch die lineare Kurve  $t \mapsto Q + tv$  definiert wird. Da diese Identifizierung für jeden Punkt gilt, besteht zwischen den Tangentialräumen zu  $Q \in V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine direkte Parallelität.

Da eine Mannigfaltigkeit durch offene Mengen überdeckt wird, die diffeomorph zu offenen Mengen in einem euklidischen Raum sind, liegt die Vermutung nahe, dass die verschiedenen Tangentialräume doch nicht völlig isoliert dastehen. Das Konzept des *Tangentialbündels* vereinigt alle Tangentialräume und ermöglicht es, die lokale Verbundenheit der Tangentialräume wiederzuspiegeln.



Zwei Visualisierungen des Tangentialbündels einer Kreislinie. Oben wird zu jedem Punkt  $P$  des Kreises der Tangentialraum an den Kreis „tangential“ angelegt und als eindimensionaler affiner Unterraum im umgebenden  $\mathbb{R}^2$  realisiert. Diese Einbettung führt zu Überschneidungen, die es im Tangentialbündel aber nicht gibt, da der Basispunkt  $P$  mitbedacht werden muss. Unten werden zu jedem Punkt des Kreises die Tangentialräume parallel angeordnet und es ergibt sich ein Zylinder.

DEFINITION 78.4. Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann nennt man die Menge

$$TM = \bigsqcup_{P \in M} T_P M,$$

versehen mit der Projektionsabbildung

$$\pi: TM \longrightarrow M, (P, v) \longmapsto P,$$

das *Tangentialbündel* von  $M$ .

Ein Punkt  $u \in TM$  in einem Tangentialbündel besitzt also stets einen *Basispunkt*  $P \in M$  und ist ein Element im Tangentialraum  $T_P M$ . Man schreibt einen solchen Punkt zumeist als  $(P, v)$  mit  $P \in M$  und  $v \in T_P M$ . Für eine offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $TV = V \times \mathbb{R}^n$ , also ein Produktraum. Dies gilt im Allgemeinen nicht für eine beliebige Mannigfaltigkeit. Das Tangentialbündel bringt zunächst einmal nur die verschiedenen Tangentialräume disjunkt zusammen, ohne dass verschiedene Tangentialräume miteinander identifiziert würden; allerdings entsteht durch die Topologie, die wir auf dem Tangentialbündel gleich einführen werden, eine zusätzliche „Nachbarschaftsstruktur“ zwischen den Tangentialräumen.

DEFINITION 78.5. Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Es seien  $TM$  und  $TN$  die zugehörigen Tangentialbündel. Dann versteht man unter der *Tangentialabbildung*

$$T(\varphi): TM \longrightarrow TN$$

die disjunkte Vereinigung der Tangentialabbildungen in den einzelnen Punkten, also

$$T(\varphi) = \bigsqcup_{P \in M} T_P(\varphi).$$

BEISPIEL 78.6. Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\alpha: U \longrightarrow V$$

eine Karte mit  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann induziert die Karte eine natürliche Bijektion

$$T(\alpha^{-1}): TV = V \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TU, (Q, v) \longmapsto (\alpha^{-1}(Q), [s \mapsto \alpha^{-1}(Q + sv)]).$$

Dabei bewegt sich  $s \in I$  in einem reellen Intervall derart, dass  $Q + sv \in V$  ist (vergleiche Lemma 77.5). Da  $V \times \mathbb{R}^n$  ein Produkt von topologischen Räumen ist, ist  $TV = V \times \mathbb{R}^n$  selbst ein topologischer Raum, und es liegt nahe, diese Topologie auf  $TU$  zu übertragen und daraus insgesamt eine Topologie auf dem Tangentialbündel  $TM$  zu konstruieren.

DEFINITION 78.7. Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  und

$$TM = \bigsqcup_{P \in M} T_P M$$

das Tangentialbündel, versehen mit der Projektionsabbildung

$$\pi: TM \longrightarrow M, (P, v) \longmapsto P.$$

Das *Tangentialbündel* wird mit derjenigen Topologie versehen, bei der eine Teilmenge  $W \subseteq TM$  genau dann offen ist, wenn für jede Karte

$$\alpha: U \longrightarrow V$$

die Menge  $(T(\alpha))(W \cap \pi^{-1}(U))$  offen in  $V \times \mathbb{R}^n$  ist.

Insbesondere ist für jede offene Menge  $U \subseteq M$  das Urbild  $\pi^{-1}(U) = TU \subseteq TM$  offen, d.h. die Projektion  $\pi$  ist stetig.

LEMMA 78.8. *Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei*

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

*eine differenzierbare Abbildung. Es sei*

$$T(\varphi): TM \longrightarrow TN$$

*die zugehörige Tangentialabbildung. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Es gibt ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T(\varphi)} & TN \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array} .$$

- (2) *Für ein Karte*

$$\alpha: U \longrightarrow V$$

*zu  $U \subseteq M$  offen und mit  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{T(\alpha)} & TV = V \times \mathbb{R}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\alpha} & V \end{array} .$$

- (3) *Wenn  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen sind und die Tangentialbündel mit  $M \times \mathbb{R}^m$  bzw.  $N \times \mathbb{R}^n$  identifiziert werden, so ist die Tangentialabbildung gleich*

$$M \times \mathbb{R}^m \longrightarrow N \times \mathbb{R}^n, (P, v) \longmapsto (\varphi(P), (D\varphi)_P(v)).$$

- (4) *Wenn  $L$  eine weitere Mannigfaltigkeit und*

$$\psi: L \longrightarrow M$$

*eine weitere differenzierbare Abbildung ist, so gilt*

$$T(\varphi \circ \psi) = T(\varphi) \circ T(\psi).$$

- (5) Die Tangentialabbildung  $T(\varphi)$  ist stetig.  
 (6) Wenn  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist, so ist  $T(\varphi)$  ein Homöomorphismus.

*Beweis.* (1) folgt unmittelbar aus der Definition der Tangentialabbildung. (2) folgt aus (1) unter Verwendung der natürlichen Identifizierung  $TV \cong V \times \mathbb{R}^n$  für eine offene Menge im  $\mathbb{R}^n$ . (3) folgt aus Lemma 77.10 (1). (4) folgt aus Lemma 77.10 (4). (5). Zu einer offenen Menge  $V \subseteq N$  ist  $TV = \pi^{-1}V \subseteq TN$  offen und daher ist  $(T(\varphi))^{-1}TV = T\varphi^{-1}(V) \subseteq TM$  offen. Es genügt die Stetigkeit von

$$T\varphi^{-1}(V) \longrightarrow TV$$

nachzuweisen. Dabei kann man  $V$  als ein Kartengebiet ansetzen und  $\varphi^{-1}(V)$  durch Kartengebiete überdecken. Dann genügt es, die Stetigkeit

$$TU \longrightarrow TV$$

für Kartengebiete  $U \subseteq M$  und  $V \subseteq N$  zu zeigen. Es gibt dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{T(\varphi)} & TV \\ \downarrow & & \downarrow \\ U' \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & V' \times \mathbb{R}^n, \end{array}$$

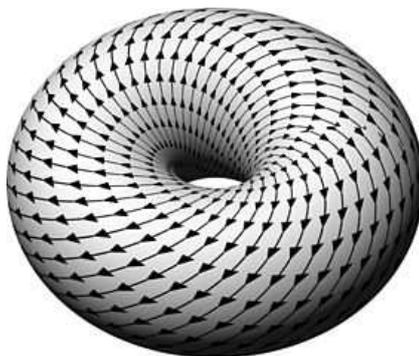
wobei die vertikalen Abbildungen Homöomorphismen sind. Für die untere horizontale Abbildung sind wir in der unter (3) beschriebenen Situation. Wir müssen also die Stetigkeit der Abbildung

$$U' \times \mathbb{R}^m \longrightarrow V' \times \mathbb{R}^n, (P, v) \longmapsto (\varphi(P), (D\varphi)_P(v)),$$

beweisen, wobei wir nur die hintere Komponente, also  $(D\varphi)_P(v)$ , betrachten müssen. Die  $j$ -te Komponente davon ist

$$\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(P),$$

und dies sind nach der  $C^1$ -Differenzierbarkeits-Voraussetzung stetige Abbildungen. (6) folgt aus (5).  $\square$



Ein Vektorfeld auf einem Torus. Jedem Punkt des Torus wird eine tangentielle Richtung zugeordnet, dies wird durch die Pfeile angedeutet.

DEFINITION 78.9. Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung

$$F: M \longrightarrow TM$$

mit der Eigenschaft, dass  $F(P) \in T_P M$  für jeden Punkt  $P \in M$  ist, heißt (zeitunabhängiges) *Vektorfeld*.

Ein Vektorfeld weist also jedem Punkt einen Richtungsvektor in diesem Punkt zu. Man sagt auch kurz, das ein Vektorfeld ein *Schnitt* im Tangentialbündel ist. Vektorfelder führen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten.

DEFINITION 78.10. Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann nennt man die Menge

$$T^*M = \bigsqcup_{P \in M} T_P^*M,$$

versehen mit der Projektionsabbildung

$$\pi: T^*M \longrightarrow M, (P, u) \longmapsto P,$$

und derjenigen Topologie, bei der eine Teilmenge  $W \subseteq T^*M$  genau dann offen ist, wenn für jede Karte

$$\alpha: U \longrightarrow V$$

die Menge  $(T^*(\alpha))^{-1}(W \cap \pi^{-1}(U))$  offen in  $V \times (\mathbb{R}^n)^*$  ist, das *Kotangentialbündel* von  $M$ .

Die Schnitte im Kotangentialbündel heißen 1-Differentialformen. Wir werden darauf ausführlich zurückkommen.



## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Tangent bundle.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD 3
- Quelle = Torus vectors oblique.jpg , Autor = Benutzer RokerHRO auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 7