Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Vorlesung 76

Der Satz über implizite Abbildungen und Mannigfaltigkeiten

Die Einheitssphäre, die wir in der letzten Vorlesung als ein motivierendes Beispiel einer Mannigfaltigkeit besprochen haben, ist die Faser zur differenzierbaren Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y,z) \longmapsto x^2+y^2+z^2,$$

über 1. Diese Abbildung ist mit Ausnahme des Nullpunkts regulär. Der Satz über implizite Abbildung macht in dieser Situation weitreichende Aussagen über die lokale Gestalt der Faser zu einer Abbildung $\varphi\colon\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, nämlich, dass es lokal Homöomorphismen zwischen der Faser in einem regulären Punkt und einer offenen Menge des $\mathbb{R}^k$ gibt, wobei k die Differenz zwischen der Dimension des Ausgangsraumes und der Dimension des Zielraumes ist. Wir werden gleich sehen, dass solche Fasern nicht nur topologische Mannigfaltigkeiten, sondern auch differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind. Wir formulieren den Satz über implizite Abbildungen in einer Version, aus der sich ablesen lässt, dass die regulären Fasern differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind.

Satz 76.1. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei*

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $Z = \varphi^{-1}(0)$ die Faser über $0 \in \mathbb{R}^m$, und φ sei in jedem Punkt der Faser regulär. Dann gibt es zu jedem Punkt $P \in Z$ eine offene Umgebung $P \in W \subseteq G$, offene Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ und $V' \subseteq \mathbb{R}^m$, und einen C^1-Diffeomorphismus

$$\theta\colon\, W \longrightarrow V \times V'$$

mit $\varphi|_W = p_2 \circ \theta$, der eine Bijektion zwischen $Z \cap W$ und $V \times \{0\}$ induziert, und so, dass das totale Differential $(D\theta)_Q$ für jedes $Q \in W$ eine Bijektion zwischen $\operatorname{kern}(D\varphi)_Q$ *und $\mathbb{R}^{n-m}$ stiftet.*

Beweis. Diese Aussage wurde im Beweis des Satzes über implizite Abbildungen mitbewiesen. Der Zusatz ergibt sich aus

$$\operatorname{kern}(D\varphi)_Q \cong \operatorname{kern}(Dp_2)_{\theta(Q)} = \mathbb{R}^{n-m}.$$

$\square$

Für die Faser selbst ergibt sich daraus die Struktur einer Mannigfaltigkeit. Der Satz über implizite Abbildungen beschert uns also mit einer riesigen Klasse von Mannigfaltigkeiten. Es handelt sich dabei um sogenannte *abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten*, die wir bald, wenn wir Tangentialräume zur Verfügung haben, systematischer behandeln werden.

SATZ 76.2. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei*

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $Z = \varphi^{-1}(Q)$ die Faser über einem Punkt $Q \in \mathbb{R}^m$. Das totale Differential $(D\varphi)_P$ sei surjektiv für jeden Punkt $P \in Z$. Dann ist Z eine (C^1)-differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n - m$.

Beweis. Wir setzen $Q = 0$. Aufgrund von Satz 76.1 gibt es zu jedem Punkt $P \in Z$ eine offene Umgebung $P \in W \subseteq G$ und einen C^1-Diffeomorphismus

$$\theta\colon\, W \longrightarrow V \times V'$$

mit offenen Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ und $V' \subseteq \mathbb{R}^m$, so dass θ eine Bijektion zwischen $Z \cap W$ und $V \times \{0\} \cong V$ induziert. Die Einschränkungen dieser Diffeomorphismen auf $Z \cap W$ bzw. V nehmen wir als Karten für Z. Zum Nachweis, dass dies eine differenzierbare Struktur auf Z definiert, seien offene Umgebungen (im $\mathbb{R}^n$) W_1 und W_2 von $P \in Z$ gegeben zusammen mit Diffeomorphismen

$$\theta_1\colon\, W_1 \longrightarrow V_1 \times V_1'$$

und

$$\theta_2\colon\, W_2 \longrightarrow V_2 \times V_2'.$$

Durch Übergang zu $W = W_1 \cap W_2$ können wir annehmen, dass beide offenen Mengen gleich sind. Die Übergangsabbildung $\theta_2 \circ \theta_1^{-1}$ ist ein C^1-Diffeomorphismus zwischen (offenen Teilmengen von) $V_1 \times V_1'$ und $V_2 \times V_2'$, der $V_1 \times \{0\}$ in $V_2 \times \{0\}$ überführt. Daher ist nach Aufgabe 52.22 auch die auf diese Teilmengen eingeschränkte Übergangsabbildung ein C^1-Diffeomorphismus (zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^{n-m}$). □

Differenzierbare Abbildungen

DEFINITION 76.3. Es seien L und M zwei C^k-Mannigfaltigkeiten mit Atlanten $(U_i, U_i', \alpha_i, i \in I)$ und $(V_j, V_j', \beta_j, j \in J)$. Es sei $1 \leq \ell \leq k$. Eine stetige Abbildung

$$\varphi\colon\, L \longrightarrow M$$

heißt eine *C^ℓ-differenzierbare Abbildung*, wenn für alle $i \in I$ und alle $j \in J$ die Abbildungen

$$\beta_j \circ \varphi \circ (\alpha_i)^{-1}\colon\, \alpha_i(\varphi^{-1}(V_j) \cap U_i) \longrightarrow V_j'$$

C^ℓ-differenzierbar sind.

Da die $\alpha_i\left(\varphi^{-1}(V_j) \cap U_i\right)$ offen sind, ist durch diese Definition der Differenzierbarkeitsbegriff für Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten auf den Differenzierbarkeitsbegriff von Abbildungen zwischen offenen Mengen in reellen Vektorräumen zurückgeführt. Da man eine C^k-Mannigfaltigkeit als eine C^ℓ-Mannigfaltigkeit für $\ell \leq k$ auffassen kann, genügt es im Wesentlichen, von C^k-Abbildungen zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten zu sprechen. Wichtig sind insbesondere die Fälle $k = 1, 2, \infty$. Man beachte, dass wir bei $k = 1$ von einer differenzierbaren Abbildung sprechen, ohne dass es (bisher) eine „Ableitung“ gibt.

PROPOSITION 76.4. *Es seien L, M und N C^k-Mannigfaltigkeiten. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Identität*
$$\mathrm{Id}:\ L \longrightarrow L$$
ist eine C^k-Abbildung.
(2) *Jede konstante Abbildung*
$$\varphi\colon\ L \longrightarrow M$$
ist eine C^k-Abbildung.
(3) *Für jede offene Teilmenge $U \subseteq L$ ist die offene Einbettung $U \to L$ eine C^k-Abbildung.*
(4) *Es seien*
$$\varphi\colon\ L \longrightarrow M$$
und
$$\psi\colon\ M \longrightarrow N$$
C^k-Abbildungen. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung
$$\psi \circ \varphi\colon\ L \longrightarrow N$$
eine C^k-Abbildung.

Beweis. (1). Die zu überprüfenden Abbildungen sind genau die Kartenwechsel $\alpha_j \circ \alpha_i^{-1}$, die nach Definition einer C^k-differenzierbaren Mannigfaltigkeit C^k-Diffeomorphismen sind. (2). Die zu überprüfenden Abbildungen sind bezüglich jeder Karte konstant, also beliebig oft differenzierbar. (3). Die zu überprüfenden Abbildungen sind zu $i, j \in I$ gleich
$$\alpha_i\left(U \cap U_i \cap U_j\right) \subseteq \alpha_i\left(U_i \cap U_j\right) \stackrel{\alpha_j \circ \alpha_i^{-1}}{\longrightarrow} U_j',$$
also eine offene Einbettung gefolgt von einem differenzierbaren Kartenwechsel. (4). Es seien
$$\gamma_\ell\colon\ W_\ell \longrightarrow W_\ell'$$
die Karten für N. Dann sind für alle möglichen Indexkombinationen die (auf gewissen offenen Teilmengen eingeschränkten) Hintereinanderschaltungen
$$\gamma_\ell \circ (\psi \circ \varphi) \circ \alpha_i^{-1} \ = \ \gamma_\ell \circ \psi \circ \beta_j^{-1} \circ \beta_j \circ \varphi \circ \alpha_i^{-1} \ = \ \left(\gamma_\ell \circ \psi \circ \beta_j^{-1}\right) \circ \left(\beta_j \circ \varphi \circ \alpha_i^{-1}\right)$$

nach der Kettenregel differenzierbar. Bei $k \geq 2$ verwendet man Aufgabe 46.9.
$\square$

Definition 76.5. Es seien L und M zwei C^k-Mannigfaltigkeiten. Ein Homöomorphismus

$$\varphi\colon\ L \longrightarrow M$$

heißt ein C^k-*Diffeomorphismus*, wenn sowohl φ als auch φ^{-1} C^k-Abbildungen sind.

Definition 76.6. Zwei C^k-Mannigfaltigkeiten L und M heißen C^k-*diffeomorph*, wenn es zwischen ihnen einen C^k- Diffeomorphismus gibt.

Bemerkung 76.7. Zu einer C^k-Mannigfaltigkeit M mit einem C^k-Atlas $(U_i, U_i', \alpha_i, i \in I)$ gibt es einen *maximalen Atlas*, der mit der durch den Atlas gegebenen differenzierbaren Struktur verträglich ist. Er besteht aus der Menge aller Homöomorphismen

$$\beta\colon\ U \longrightarrow V$$

mit offenen Mengen $U \subseteq M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass diese Abbildungen C^k-Abbildungen (bezüglich der durch den Atlas gegebenen Struktur) sind. Dieser maximale Atlas enhält natürlich den Ausgangsatlas, ist aber im Allgemeinen bei weitem größer. Beispielsweise enthält er zu jeder Karte $\beta\colon U \to V$ und jeder offenen Teilmenge $U' \subseteq U$ auch die auf U' eingeschränkte Kartenabbildung. Wichtig ist, dass die identische Abbildung

$$\mathrm{Id}:\ (M, A) \longrightarrow (M, B),$$

wobei A den Ausgangsatlas und B den maximalen Atlas bezeichnet, ein C^k-Diffeomorphismus von Mannigfaltigkeiten ist, wie unmittelbar aus der Definition folgt. Wichtiger als der Atlas ist die durch ihn vertretene differenzierbare Struktur auf der Mannigfaltigkeit, die festlegt, welche Abbildungen differenzierbar und welche Diffeomorphismen sind. Die Karten des maximalen Atlas werden manchmal auch (verallgemeinerte) Karten der Mannigfaltigkeit genannt.

Differenzierbare Funktionen

Eine C^k-differenzierbare Abbildung

$$f\colon\ M \longrightarrow \mathbb{R}$$

von einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit in die reellen Zahlen nennt man auch eine C^k-*differenzierbare Funktion*. Nach Definition bedeutet das einfach, dass für jede Karte

$$\alpha\colon\ U \longrightarrow V$$

die zusammengesetzte Funktion

$$f \circ \alpha^{-1}\colon\ V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine C^k-Funktion ist. Die Menge aller C^k-Funktionen auf M werden mit $C^k(M,\mathbb{R})$ bezeichnet.

Lemma 76.8. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und*

$$f,g\colon\, M \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen auf M. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(1) *Die Abbildung*

$$f \times g\colon\, M \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, x \longmapsto (f(x), g(x)),$$

ist differenzierbar.

(2) *$f+g$ ist differenzierbar.*

(3) *$f \cdot g$ ist differenzierbar.*

(4) *Wenn f keine Nullstelle besitzt, so ist auch f^{-1} differenzierbar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 76.3. □

Insbesondere bilden die differenzierbaren Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit einen kommutativen Ring.

Wenn

$$\alpha\colon\, U \longrightarrow V$$

eine Karte ist mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so liefert jede Projektion x_i eine differenzierbare Funktion

$$x_i \circ \alpha\colon\, U \longrightarrow \mathbb{R},$$

die meistens wieder mit x_i bezeichnet wird. Man sagt dann, dass die Funktionen $x_1, \ldots, x_n$ *differenzierbare Koordinaten* für $U \subseteq M$ bilden. Für eine stetig differenzierbare Funktion

$$f\colon\, U \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist nach Definition die Funktion

$$f \circ \alpha^{-1}\colon\, V \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar, d.h. für jedes i existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial (f \circ \alpha^{-1})}{\partial x_i},$$

die wiederum (stetige) Funktionen auf V sind. Daher sind

$$\frac{\partial (f \circ \alpha^{-1})}{\partial x_i} \circ \alpha$$

Funktionen auf U. Diese werden im Allgemeinen einfach wieder mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bezeichnet.

Abbildungsverzeichnis