Analysis III

Vorlesung 73

Folgerungen aus dem Satz von Fubini

Beispiel 73.1. Wir wollen das Integral der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2 - xy + 2y^3,$$

über dem Rechteck $Q = [-2,1] \times [0,2]$ mit dem Satz von Fubini ausrechnen. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \int_Q f\, d\lambda^2 &= \int_0^2 \left(\int_{-2}^1 \left(x^2 - xy + 2y^3\right)\, dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + 2y^3x \right) |_{-2}^1 \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}y + 2y^3 + \frac{8}{3} + 2y + 4y^3 \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(3 + \frac{3}{2}y + 6y^3 \right) dy \\ &= \left(3y + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y^4 \right) |_0^2 \\ &= 6 + 3 + 24 \\ &= 33. \end{aligned}$$

Korollar 73.2. *Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und es seien $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ und $g\colon N \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion*

$$fg\colon M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ (x,y) \longmapsto f(x) \cdot g(y),$$

integrierbar und es gilt

$$\int_{M\times N} fg\, d(\mu \otimes \nu) = \int_M f\, d\mu \cdot \int_N g\, d\nu.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst f und g als nichtnegativ an. Dann gilt nach Satz 72.10

$$\begin{aligned} \int_{M\times N} fg\, d(\mu \otimes \nu) &= \int_M \left(\int_N (fg)(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_M \left(\int_N f(x)g(y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_M f(x) \left(\int_N g(y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

$$= \left(\int_N g(y)\,d\nu(y)\right)\cdot\left(\int_M f(x)\,d\mu(x)\right).$$

Für beliebige integrierbare Funktionen folgt daraus, angewendet auf die Betragsfunktionen, zunächst die Integrierbarkeit des Produkts und daraus mit derselben Rechnung die Formel. □

Dichten

Die bisher bewiesenen Eigenschaften des Integrals erlauben es, ausgehend von einem Maß und einer integrierbaren Funktion neue Maße zu definieren.

Definition 73.3. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und es sei

$$g\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative messbare Funktion. Dann nennt man das für jede messbare Teilmenge $T \subseteq M$ durch

$$\nu(T) := \int_T g\,d\mu$$

definierte Maß auf M das *Maß zur Dichte* g. Es wird mit $g\mu$ bezeichnet.

Bemerkung 73.4. Die Vorstellung, die hinter einer Dichte liegt und zu dem Namen geführt hat, ist die physikalische Dichte eines Körpers. Zu einem Körper im Raum berechnet das Borel-Lebesgue-Maß das Volumen. Wenn man aber an der Masse dieses Körpers interessiert ist, so reicht die Kenntnis des Volumens nicht aus, es sei denn, der Körper ist homogen und besitzt überall eine konstante Dichte. In diesem Fall ist die Masse proportional zum Volumen. Bei einem nicht homogenen Körper hingegen muss man wissen, wie sich die Masse auf dem Körper verteilt. Eine solche Massenverteilung wird durch eine Dichtefunktion beschrieben, die jedem Punkt des Körpers die „infinitesimale Dichte“ in diesem Punkt zuordnet. Die Gesamtmasse ergibt sich dann durch Integration dieser Dichte bezüglich des Volumenmaßes.

Nullmengen unter differenzierbaren Abbildungen

Wir beginnen nun mit den Vorbereitungen zum Beweis der Transformationsformel.

Lemma 73.5. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei*

$$\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Lipschitz-stetige Abbildung. Es sei $S \subseteq G$ eine Nullmenge. Dann ist auch $\varphi(S)$ eine Nullmenge.

Beweis. Es gelte
$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L \cdot d(x, y)$$
mit einer Lipschitz-Konstanten $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zunächst ist für jeden Würfel $W \subseteq G$ mit der Kantenlänge δ das Bild $\varphi(W)$ in einem Ball mit einem Radius $\leq n\delta L$ enthalten. Daher gibt es ein $c > 0$ mit
$$\lambda^n(\varphi(W)) \leq c\delta^n = c\lambda^n(W)$$
für alle Würfel. Diese Abschätzung gilt dann auch für alle Quader, da diese beliebig nahe durch Vereinigungen von Würfeln approximiert werden können.

Da S eine messbare Nullmenge ist, gibt es aufgrund der Konstruktion des Borel-Lebesgue-Maßes über das äußere Maß zu jedem $\epsilon > 0$ eine abzählbare Überpflasterung
$$S \subseteq \bigcup_{i \in I} Q_i$$
mit Quadern Q_i und mit
$$\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i) \leq \epsilon\,.$$
Daher gilt $\varphi(S) \subseteq \bigcup_{i \in I} \varphi(Q_i)$ und somit
$$\begin{aligned} \lambda^n(\varphi(S)) &\leq \lambda^n\left(\bigcup_{i \in I} \varphi(Q_i)\right) \\ &\leq \sum_{i \in I} \lambda^n(\varphi(Q_i)) \\ &\leq \sum_{i \in I} c\lambda^n(Q_i) \\ &= c\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i) \leq c\epsilon. \end{aligned}$$
Da man ϵ beliebig klein wählen kann, muss $\varphi(S)$ eine Nullmenge sein. □

KOROLLAR 73.6. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei*
$$\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $S \subseteq G$ eine Nullmenge. Dann ist auch $\varphi(S)$ eine Nullmenge.

Beweis. Nach (einem Spezialfall von) Lemma 55.4 ist φ lokal Lipschitz-stetig. Die Nullmenge S kann man abzählbar überdecken mit offenen Mengen, worauf φ Lipschitz-stetig ist. Die Aussage folgt dann aus Lemma 73.5. □

Die Transformationsformel für Quader

LEMMA 73.7. *Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei*

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x) \,=\, \det\,(D\varphi)_x$$

für $x \in G$. Es sei $Q \subseteq G$ ein kompakter achsenparalleler Quader Dann gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned}\lambda^n(Q)\cdot \min\,(|(J(\varphi))(x)|\,, x\in Q) \;&\leq\; \lambda^n(\varphi(Q))\\ &\leq\; \lambda^n(Q)\cdot \max\,(|(J(\varphi))(x)|\,, x\in Q).\end{aligned}$$

Beweis. Wir setzen $j(x) = |\det\,(D\varphi)_x|$. Wir beweisen zuerst die Abschätzung nach oben. Wir schreiben $\lambda^n(\varphi(Q)) = c\cdot\lambda^n(Q)$ mit einem $c \geq 0$ und wir müssen $c \leq \max\,(j(x), x \in Q)$ zeigen. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Teilquadern Q_m, $m \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft

$$\lambda^n(\varphi(Q_m)) \,\geq\, c\cdot\lambda^n(Q_m).$$

Es sei $Q_0 = Q$. Für den Induktionsschluss von m auf $m+1$ betrachten wir sämtliche 2^n Teilquader von Q_m mit halbierter Kantenlänge. Würden diese Teilquader K_i alle die Ungleichung $\lambda^n(\varphi(K_i)) \,<\, c\cdot\lambda^n(K_i)$ erfüllen, so ergebe sich durch Aufsummieren sofort ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung. Es gibt also mindestens einen Quader $Q_{m+1} = K_i$ mit $\lambda^n(\varphi(Q_{m+1})) \,\geq\, c\cdot\lambda^n(Q_{m+1})$. Diese Quaderschachtelung definiert in jeder Komponente eine Intervallschachtelung und damit nach Satz 7.3 einen Punkt $P \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} Q_m$. Wegen der Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes können wir $P = 0$ und $\varphi(P) = 0$ annehmen. Sei $L = (D\varphi)_0$ das totale Differential. Da φ in 0 differenzierbar ist, gilt

$$\varphi(v) \,=\, (D\varphi)_0\,(v) + ||\,v\,||\; r(v)$$

mit einer in 0 stetigen Abbildung r, die dort den Limes 0 besitzt. Die lineare Approximation

$$L\colon\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, v \longmapsto L(v) = (D\varphi)_0\,(v)\,,$$

bildet jeden Quader K auf ein Parallelotop $T = L(K)$ ab, das nach Satz 67.2 das Maß $\lambda^n(L(K)) = j(0)\cdot\lambda^n(K)$ besitzt. Wir wollen $\varphi(K)$ mit $L(K)$ für einen geeigneten Quader K vergleichen. Da ein Diffeomorphismus vorliegt, ist L ein Isomorphismus und daher gibt es ein $b \geq 0$ mit $||\,v\,|| \leq b\,||\,L(v)\,||$. Somit gibt es wegen der Stetigkeit von $b\,||\,r(v)\,||$ zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$||\,v\,||\cdot||\,r(v)\,|| \leq\, \epsilon\,||\,L(v)\,||$$

für alle v mit $||\,v\,|| \leq \delta$. Es sei $K \subseteq B\,(0,\delta)$, $0 \in K$, ein Quader. Für $v \in K$ ist

$$\begin{aligned}||\,\varphi(v) - L(v)\,|| \;&=\; ||\,v\,||\cdot||\,r(v)\,||\\ &\leq\; \epsilon\,||\,L(v)\,||\,.\end{aligned}$$

D.h. dass $\varphi(K)$ in dem Parallelotop T' liegt, das aus $T = L(K)$ durch Streckung mit dem Streckungsfaktor $1+\epsilon$ ensteht. Damit gilt

$$\lambda^n(\varphi(K)) \leq \lambda^n(T') = (1+\epsilon)^n \cdot \lambda^n(T) = (1+\epsilon)^n \cdot j(0) \cdot \lambda^n(K).$$

Wir nehmen an, dass $\max\,(j(x), x \in Q) < c$ gilt. Dann kann man auch ein $\epsilon > 0$ mit $(1+\epsilon)^n j(0) < c$ finden. Wir nehmen ein $\delta > 0$ derart, dass die oben beschriebene Eigenschaft bezüglich diesem ϵ besitzt. Für m hinreichend groß kann man dann die obige Überlegung auf die Quader $K = Q_m$ anwenden und erhält

$$\lambda^n(\varphi(Q_m)) < c \cdot \lambda^n(Q_m)$$

im Widerspruch zur Konstruktion dieser Quaderfolge.Wir zeigen zunächst, dass die Abschätzung nach oben nicht nur für Quader, sondern für beliebige kompakte Mengen T gilt. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine abzählbare Überpflasterung Q_i, $i \in I$, von T mit

$$\lambda^n(T) \leq \sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i) \leq \lambda^n(T) + \epsilon.$$

Durch Beschränkung der Kantenlängen der Q_i kann man weiter erreichen, dass alle Q_i in einer größeren ebenfalls kompakten Menge $\tilde{T} \supseteq T$ liegen. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von j auf $\tilde{T}$ kann man zu gegebenem $\tilde{\epsilon} > 0$ die Q_i so wählen, dass $\max\,(j(x), x \in Q_i) \leq \max\,(j(x), x \in T) + \tilde{\epsilon}$ gilt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lambda^n(\varphi(T)) &\leq \lambda^n\left(\bigcup_{i \in I} \varphi(Q_i)\right) \\
&\leq \sum_{i \in I} \lambda^n(\varphi(Q_i)) \\
&\leq \sum_{i \in I} \max\,(j(x), x \in Q_i) \lambda^n(Q_i) \\
&\leq \sum_{i \in I} (\max\,(j(x), x \in T) + \tilde{\epsilon})\, \lambda^n(Q_i) \\
&= (\max\,(j(x), x \in T) + \tilde{\epsilon}) \cdot \left(\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i)\right) \\
&\leq (\max\,(j(x), x \in T) + \tilde{\epsilon}) \cdot (\lambda^n(T) + \epsilon)\,.
\end{aligned}$$

Da ϵ und $\tilde{\epsilon}$ beliebig klein gewählt werden können, gilt diese Abschätzung auch ohne ϵ und $\tilde{\epsilon}$. Wir wenden nun die Abschätzung nach oben auf die Umkehrabbildung φ^{-1} und $T = \varphi(Q)$ an. Als Bild einer kompakten Menge ist T kompakt. Dabei gilt aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes die Beziehung

$$\left(D(\varphi^{-1})\right)_y = ((D\varphi)_x)^{-1}$$

mit $y = \varphi(x)$. Dies ergibt

$$
\begin{aligned}
\lambda^n(Q) &= \lambda^n(\varphi^{-1}(\varphi(Q))) \\
&\leq \max\left(\left|\det\left(D\varphi^{-1}\right)_y\right|, y \in \varphi(Q)\right) \cdot \lambda^n(\varphi(Q)) \\
&= \max\left(\left|\det\left(D\varphi^{-1}\right)_{\varphi(x)}\right|, x \in Q\right) \cdot \lambda^n(\varphi(Q)) \\
&= \max\left(\left|\det\left(D\varphi\right)_x^{-1}\right|, x \in Q\right) \cdot \lambda^n(\varphi(Q)) \\
&= \max\left(\left|\det\left(D\varphi\right)_x\right|^{-1}, x \in Q\right) \cdot \lambda^n(\varphi(Q)).
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\lambda^n(Q) \cdot \min\left(\left|\det\left(D\varphi\right)_x\right|, x \in Q\right) \\
&\qquad = \lambda^n(Q) \cdot \frac{1}{\max\left(\left|\det\left(D\varphi\right)_x\right|^{-1}, x \in Q\right)} \leq \lambda^n(\varphi(Q))
\end{aligned}
$$

. $\square$

Abbildungsverzeichnis